第 16 卷第 5 期
1999 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.5
Oct., 1999

参数摄动系统线性分式变换的系统求解

恒庆海
(天津大学电气自动化与能源工程学院·天津,300072)

摘要: 对参数摄动系统的互联结构阵及其线性分式变换(LFTs)给出了可在统一框架下进行处理的方法.本文的结果可用于控制系统的鲁棒性能分析.

关键词: 参数摄动系统; 互联结构阵; 线性分式变换

Systematic Formulation of the Linear Fractional Transformations of Parameter Perturbed Systems

Heng Qinghai
(School of Electrical Engineering and Energy, Tianjin University·Tianjin, 300072, P.R.China)

Abstract: This paper presents the interconnection structure and its linear fractional transformation (LFTs) of a class of parameter perturbed systems. It is pointed out that this problem can be solved under a unified frame. The results can be used to analyze robust performance of control systems.

Key words: parameter perturbed system; interconnection structure; linear fractional transformations

1 引言(Introduction)

互联结构阵及其线性分式变换(LFTs)直接与系统鲁棒性能分析有关[1].文[2]对系统摄动阵秩为1,且系统方程左边单位阵没有摄动的情况给出了互联结构阵的求解方法.本文对较一般形式的摄动系统进行了推导,给出了一个列写互联结构阵及其LFTs的系统方法.

2 互联结构阵与线性分式变换的系统求解(Systematic formulation of the interconnection structure and its linear fractional transformations)

2.1 线性分式变换(Linear fractional transformations)

线性分式变换的框图如图1所示[1].设复数阵 M 分块为

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

并设对应的不确定性块 Δ 与 M_{22} 的阶次是相容的,即 $M_{22}\Delta$ 是方的. 考虑回路方程

$$e = M_{11}d + M_{12}w, \tag{2a}$$

$$z = M_{21}d + M_{22}w, \tag{2b}$$

$$w = \Delta z. \tag{2c}$$

当 $I - M_{22}\Delta$ 的逆阵存在时,向量 e 和 d 之间的关系为

$$e = F_l(M,\Delta)d. \tag{3}$$

其中

$$F_l(M,\Delta) := M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22}\Delta)^{-1}M_{21}. \tag{4}$$

$F_l(M,\Delta)$ 称为线性分式变换,简记为 LFT. 这里的 M 阵称为图1所示系统的互联结构阵. 在系统鲁棒性能分析中一般需要将摄动系统转化为互联结构阵 M 及其 LFT 形式.

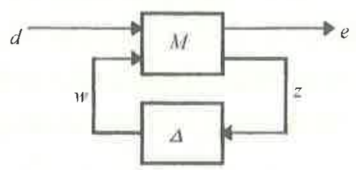

图 1 线性分式变换
Fig. 1 Linear fractional transformation

2.2 互联结构阵及其 LFTs 的系统求解(Systematic formulation of the interconnection structure and its LFTs)

对以状态空间形式表示的参数摄动系统,现采用奇异值分解技术[3]来求解其互联结构阵.

设系统方程为

本文于 1996 年 7 月 1 日收到, 1998 年 9 月 9 日收到修改稿.

$$I\begin{bmatrix}\dot{x}\\ y\end{bmatrix} = N\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}. \tag{5}$$

其中 x,u,y 分别为适当维数的状态向量、控制向量和输出向量.若控制向量与输出向量的维数不同,可在系统矩阵 N 中增加相应的零行或零列,并修改单位阵 I 的阶次来使其满足式(5) 的形式.

设有 n 个独立线性参数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 在 $\alpha_{li}\leqslant\alpha_i\leqslant\alpha_{ui}$ 范围内变化.对参数 α_i 的摄动 $\Delta\alpha_i$,系统阵 N 的变化可表示为

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i P_i. \tag{6}$$

相似地,设有 m 个独立线性参数 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 在 $\beta_{lj}\leqslant\beta_j\leqslant\beta_{uj}$ 范围内变化.对参数 β_j 的摄动 $\Delta\beta_j$,摄动方程左边单位阵 I 的变化可表示为

$$\Delta I = \sum_{j=1}^{m}\Delta\beta_j Q_j. \tag{7}$$

这样,摄动系统的方程式可表示为

$$\Big(I+\sum_{j=1}^{m}\Delta\beta_j Q_j\Big)\begin{bmatrix}\dot{x}\\ y\end{bmatrix} = \Big(N+\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i P_i\Big)\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}. \tag{8}$$

式(8)可看作有 $n+m$ 个参数变化 $\Delta\alpha_1,\cdots,\Delta\alpha_n,\Delta\beta_1,\cdots,\Delta\beta_m$ 的摄动系统方程.为方便起见,可适当选取 P_i 和 Q_j 使参数摄动规范化;即对所有的 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 和 $j(1\leqslant j\leqslant m)$, $|\Delta\alpha_i|$, $|\Delta\beta_j|$ 的最大值为 1.

摄动阵 P_i 和 Q_j 可看作当参数 α_i 和 β_j 单独变化时,系统方程产生的最大变化.利用奇异值分解技术[3], P_i 和 Q_j 可分解为

$$P_i = U_{P_i}S_{P_i}V_{P_i}^{\mathrm{T}} = A_iB_i^{\mathrm{T}}(i=1,\cdots,n), \tag{9a}$$

$$Q_j = U_{Q_j}S_{Q_j}V_{Q_j}^{\mathrm{T}} = C_jD_j^{\mathrm{T}}(j=1,\cdots,m). \tag{9b}$$

其中

$$A_i = U_{P_i}S_{P_i}^{\frac{1}{2}}, \tag{10a}$$

$$B_i^{\mathrm{T}} = S_{P_i}^{\frac{1}{2}}V_{P_i}^{\mathrm{T}}, \tag{10b}$$

$$C_j = U_{Q_j}S_{Q_j}^{\frac{1}{2}}, \tag{10c}$$

$$D_j^{\mathrm{T}} = S_{Q_j}^{\frac{1}{2}}V_{Q_j}^{\mathrm{T}}. \tag{10d}$$

将式(9)代入式(8)得

$$\Big(I+\sum_{j=1}^{m}\Delta\beta_j C_jD_j^{\mathrm{T}}\Big)\begin{bmatrix}\dot{x}\\ y\end{bmatrix} = \Big(N+\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i A_iB_i^{\mathrm{T}}\Big)\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}. \tag{11}$$

令

$$z_{2j} = D_j^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ y\end{bmatrix}, \tag{12a}$$

$$w_{2j} = \Delta\beta_j z_{2j}, \tag{12b}$$

$$z_{1i} = B_i^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}, \tag{12c}$$

$$w_{1i} = \Delta\alpha_i z_{1i}. \tag{12d}$$

则根据式(11)可得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ y\\ z\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix}x\\ u\\ w\end{bmatrix}. \tag{13}$$

式中互联结构阵

$$M = \begin{bmatrix}[N\quad R]\\ [B_1^{\mathrm{T}}\quad 0]\\ \vdots\\ [B_n^{\mathrm{T}}\quad 0]\\ D_1^{\mathrm{T}}[N\quad R]\\ \vdots\\ D_m^{\mathrm{T}}[N\quad R]\end{bmatrix}. \tag{14}$$

其中

$$R = [A_1,\cdots,A_n,-C_1,\cdots,-C_m]. \tag{15}$$

又由式(12d)和式(12b)得

$$w = \Delta z. \tag{16}$$

其中

$$w = [w_{11},\cdots,w_{1i},\cdots,w_{1n}w_{21},\cdots,w_{2j},\cdots,w_{2m}]^{\mathrm{T}}, \tag{17a}$$

$$z = [z_{11},\cdots,z_{1i},\cdots,z_{1n}z_{21},\cdots,z_{2j},\cdots,z_{2m}]^{\mathrm{T}}, \tag{17b}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix}\Delta\alpha_1 I_{l1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \Delta\alpha_n I_{ln} & & \\ & & & \Delta\beta_1 I_{ln+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \Delta\beta_m I_{ln+m}\end{bmatrix}, \tag{17c}$$

$$|\Delta\alpha_i|\leqslant 1(i=1,\cdots,n), \tag{17d}$$

$$|\Delta\beta_j|\leqslant 1(j=1,\cdots,m), \tag{17e}$$

且 l_i 为向量 z_{1i} 的维数, l_{n+j} 为向量 z_{2j} 的维数.则由式(13),(16) 和式(4) 得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ y\end{bmatrix} = F_l(M,\Delta)\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}. \tag{18}$$

其中 $F_l(M,\Delta)$ 为关于互联结构阵 M 和摄动 Δ 的线性分式变换.

式(14),(18)就是求解参数摄动系统互联结构阵及 LFT 的标准公式.

3 结论(Conclusions)

本文对参数摄动系统的互联结构阵及其线性分

式变换给出了系统性的求解方法,本文的结果可用于参数摄动系统的鲁棒性能分析.

参考文献(References)

1 Packard A, Doyle J. The Complex structured singular value. Automatica, 1993, 29(1): 71 – 109

2 Morton B G, McAfoos R M. A mu-test for robustness analysis of a real-parameter variation problem. Proceedings of American Control Conference, Boston, 1985, 135 – 138

3 Skogestad S, Morari M and Doyle J C. Robust control of ill-conditioned plants: high-purity distillation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(12): 1092 – 1105

本文作者简介

恒庆海 见本刊1999年第2期第271页。

(上接第735页)

报, 1995, 23(6): 84 – 88

3 潘士先. 谱估计和自适应滤波. 北京: 北京航天航空大学出版社, 1991

4 Dandawate A V. Modeling periodic moving average processes using cyclic statistics. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44(3): 673 – 684

5 Mohler I. Nonlinear Time Series and Signal Processing: Lecture Notes in Control and Information Science. Berlin: Springer-Verlag, 1988

本文作者简介

易东云 1965年生. 1992年毕业于国防科技大学系统工程与数学系, 获硕士学位, 副教授. 获部委级一等奖一项, 合作出版著作2本, 发表论文30篇. 目前主要从事动态系统分析等方面的研究.

王正明 1962年生. 1986年毕业于华中理工大学应用数学系. 自动控制专业博士, 教授, 控制理论与系统工程博士生导师. 已获部委级一等奖一项、二等奖三项, 发表学术论文40余篇, 合作出版著作3本. 1994年获准享受政府特殊津贴. 目前主要从事动态系统分析与测量数据处理方面的研究工作.