一类不确定非线性动力系统的鲁棒镇定*

向峥嵘　陈庆伟　吴晓蓓　胡维礼
(南京理工大学自动化系·南京, 210094)

摘要：研究一类带有匹配不确定性非线性动力系统的鲁棒稳定问题.基于 Lyapunov 稳定性理论给出了一种连续型的鲁棒指数镇定控制器设计方案,算例仿真结果证实了本文设计方案的有效性.

关键词：非线性动力系统；不确定性；鲁棒镇定；指数稳定性；Lyapunov 方法

Robust Stabilization of a Kind of Uncertain Nonlinear Dynamical Systems

Xiang Zhengrong, Chen Qingwei, Wu Xiaobei and Hu Weili
(Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology· Nanjing, 210094, P.R.China)

Abstract: The problem of robust stabilization for a kind of nonlinear dynamical systems with the matched uncertainties is studied in this paper. A kind of continuous robust controller is presented based on Lyapunov stability theory, and the controllers which we characterized are shown to guarantee exponential stability of the closed-loop systems. A numerical example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: nonlinear dynamical systems; uncertainties; robust stabilization; exponential stability; Lyapunov method

1 引言(Introduction)

不确定非线性动力系统的鲁棒镇定,一直是控制理论界深受重视的研究课题之一[1~8],近年来,有很多研究工作集中在应用 Lyapunov 稳定性理论设计控制器以保证不确定非线性动力系统的实用稳定或渐近稳定性.已有的文献在为不确定非线性动力系统设计镇定控制器时,多数只考虑了使其闭环系统实用稳定或渐近稳定,较少涉及闭环系统的指数稳定性.然而在一些实际应用中,常需要闭环系统是指数稳定的,这是因为指数稳定的系统具有诸如清晰的暂态性能,对有界扰动或未建模动力学更强的鲁棒性等优越的性能,使得对其研究更富有挑战性.

本文针对一类不确定性满足匹配条件的非线性动力系统,在标称系统是指数稳定的条件下,设计了一种非线性鲁棒状态反馈控制器.所设计的控制器控制作用连续,且可保证反馈后的闭环系统是指数稳定的.最后给出了一个数值算例,仿真说明了本文设计方案的可用性.

2 系统的描述与假设(Problem statement and basic assumptions)

考虑下列不确定非线性动力系统

$$\dot{x}(t)=f(x,t)+\Delta f(x,q,t)+[g(x,t)+\Delta g(x,q,t)]u(t). \quad (1)$$

式中 $x\in\mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是控制输入, $q(t)\in\mathbb{R}^p$ 是不确定参数向量; $f(x,t)$, $\Delta f(x,q,t)$, $g(x,t)$, $\Delta g(x,q,t)$ 是具有适当维数的向量或矩阵.设 $f(0,t)=0$, 不确定向量 $q(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$ 是 Lebesgue 可测函数,其值域 $Q\subset\mathbb{R}^p(0\in Q)$ 是一给定闭集且有界.用 $\|x\|$ 表示向量或者矩阵 x 的 Euclidean 模, ∇_x 表示对 x 的梯度算子, $\lambda_{\max}(W)$, $\lambda_{\min}(W)$ 分别表示矩阵 W 的最大,最小特征值.下面给出一些假设条件.

假设 1 对 $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $q\in Q$ 和 $t\in\mathbb{R}$, 存在有界连续函数 $h(x,q,t)$, $E(x,q,t)$ 及 $\Delta_1(x,t)$, $\Delta_2(x,t)$, 使得

$$\Delta f(x,q,t)=g(x,t)h(x,q,t), \quad (2)$$

$$\Delta g(x,q,t)=g(x,t)E(x,q,t), \quad (3)$$

$$\Delta_1(x,t)\geqslant\max_{q\in Q}\|h(x,q,t)\|, \quad (4)$$

$$\max_{q\in Q}\|E(x,q,t)\|\leqslant\Delta_2(x,t)<1. \quad (5)$$

假设 2 系统(1)的标称自治系统 $\dot{x}(t)=f(x(t),t)$ 在原点 $x=0$ 处是指数稳定的,即对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, 存在正定函数 $V(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ 满足

$$\lambda_{\min}\|x\|^2\leqslant V(x,t)\leqslant\lambda_{\max}\|x\|^2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)f(x,t)\leqslant-\eta V(x,t). \quad (7)$$

* 高校博士点基金资助项目.
本文于 1997 年 12 月 22 日收到. 1998 年 7 月 13 月收到修改稿.

式中 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ 和 η 是正定常数.

3 主要结果(Main results)

记 $\gamma(x,t) \geqslant \dfrac{\Delta_1(x,t)}{1-\Delta_2(x,t)}$,这时我们有下列定理:

定理 1 如果不确定非线性系统(1)满足假设1,2,则存在下列非线性反馈控制

$$u(t) = p(x,t) = \frac{-\mu(x,t)}{\|\mu(x,t)\| + \varepsilon\|x\|^2}\gamma(x,t), \tag{8}$$

可使相应的闭环系统是指数渐近稳定的,且有

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\|x(t_0)\|\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha(t-t_0)\right\}. \tag{9}$$

其中 $\mu(x,t) = \gamma(x,t)g^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_x V(x,t)$, ε 是满足 $\alpha = \eta - \varepsilon/\lambda_{\min} > 0$ 的正定常数.

证 取假设2中的正定函数 $V(x,t)$ 作为闭环系统的 Lyapunov 函数,则有

$$\begin{aligned}
\dot V(x,t) = & \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \nabla_x^{\mathrm{T}}V[f+\Delta f+(g+\Delta g)u] \leqslant \\
& -\eta V(x,t) + \nabla_x^{\mathrm{T}}Vgu + \nabla_x^{\mathrm{T}}V[\Delta f + \Delta gu] = \\
& -\eta V(x,t) - \nabla_x^{\mathrm{T}}Vg\frac{\mu}{\|\mu\|+\varepsilon\|x\|^2}\gamma + \\
& \nabla_x^{\mathrm{T}}V[gh + gEu] \leqslant \\
& -\eta V(x,t) - \frac{\mu^T\mu}{\|\mu\|+\varepsilon\|x\|^2} + \\
& \|g^{\mathrm{T}}\nabla_x V\|[\|h\| + \|E\|\cdot\|u\|] \leqslant \\
& -\eta V(x,t) - (\|\mu\| - \varepsilon\|x\|^2) + \\
& \|g^{\mathrm{T}}\nabla_x V\|\left[\Delta_1 + \Delta_2\frac{\|\mu\|}{\|\mu\|+\varepsilon\|x\|^2}\gamma\right] \leqslant \\
& -\eta V(x,t) + \varepsilon\|x\|^2 - \gamma\|g^T\nabla_x V\| + \\
& \|g^T\nabla_x V\|(\Delta_1 + \Delta_2\gamma) \leqslant \\
& -\eta V(x,t) + \frac{\varepsilon}{\lambda_{\min}}V(x,t) - \\
& \|g^{\mathrm{T}}\nabla_x V\|(1-\Delta_2)\left[\gamma - \frac{\Delta_1}{1-\Delta_2}\right] \leqslant \\
& -\alpha V(x,t),
\end{aligned}$$

故有

$$V(x(t),t) \leqslant V(x(t_0),t_0)\exp\{-\alpha(t-t_0)\}. \tag{10}$$

再利用(6)式,即得(9)式. 证毕.

注 1 由(8)式知 $\|u(t)\| \leqslant \gamma(x,t)$,故设计的反馈控制 $u(t)$ 是一致有界的.

作为上述定理的一个特例,考虑下列不确定动力系统

$$\dot x(t) = Ax + \Delta f(x,q,t) + [B + \Delta g(x,q,t)]u(t). \tag{11}$$

式中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为常数矩阵.

假设 3 矩阵对 (A,B) 完全可控,且对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q \in Q$ 和 $t \in \mathbb{R}$,存在有界连续函数 $h(x,q,t)$, $E(x,q,t)$ 及 $\Delta_1(x,t), \Delta_2(x,t)$,使得

$$\Delta f(x,q,t) = B\tilde h(x,q,t), \tag{12}$$

$$\Delta g(x,q,t) = B\tilde E(x,q,t), \tag{13}$$

$$\Delta_3(x,t) \geqslant \max_{q\in Q}\|\tilde h(x,q,t)\|, \tag{14}$$

$$\max_{q\in Q}\|\tilde E(x,q,t)\| \leqslant \Delta_4(x,t) < 1. \tag{15}$$

假设 4 存在正定阵 $Q > 0$ 及正数 $\alpha_n, \rho > 0$,下列 Riccati 方程

$$(A+\alpha_n I)^{\mathrm{T}}P + P(A+\alpha_n I) + Q - \rho PBB^{\mathrm{T}}P = 0 \tag{16}$$

有正定对称解 $P > 0$.

取 Lyapunov 函数 $V(x,t) = x^{\mathrm{T}}Px$,由定理1不难得到下列结论.

推论 1 假定系统(11)满足假设3,4,则存在下列非线性状态反馈控制

$$u(t) = -\rho B^{\mathrm{T}}Px - \frac{B^TPx\tilde\gamma^2(x,t)}{\|B^{\mathrm{T}}Px\|\tilde\gamma(x,t) + \delta\|x\|^2}, \tag{17}$$

可使反馈后的闭环系统是指数稳定的,且有

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|x(t_0)\|\exp\left\{-\frac{1}{2}\beta(t-t_0)\right\}. \tag{18}$$

其中 $\tilde\gamma(x,t) \geqslant \dfrac{\Delta_3(x,t)}{1-\Delta_4(x,t)} > 0$, δ 是满足 $\beta = \alpha_n - \delta/\lambda_{\min}(P) > 0$ 的正定常数.

4 算例与结论(Example and conclusion)

考虑下列不确定非线性动力系统

$$\dot x(t) = f(x,t) + \Delta f(x,q,t) + [g(x,t) + \Delta g(x,q,t)]u(t). \tag{19}$$

其中 $f(x,t) = \begin{pmatrix} -3x_1 + 5x_1x_2^2 \\ -2x_2 - 4x_1^2x_2 \end{pmatrix}$, $g(x,t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$, $\Delta f(x,q,t) = g(x,t)h(x,q,t)$, $\Delta g(x,q,t) = g(x,t)E(x,q,t)$,且 $\max\limits_{q\in Q}\|E(x,q,t)\| < 1$.

对系统(19)选取正定函数

$$V(x,t) = 4x_1^2 + 5x_2^2, \tag{20}$$

由(6),(7)式得

$$\lambda_{\max} = 5,\ \lambda_{\min} = 4,\ \eta = 4.$$

选取 $\varepsilon = 4$,显然满足条件 $\alpha = \eta - \varepsilon/\lambda_{\min} = 3 > 0$.

故鲁棒状态反馈控制器可设计为

$$u(t)=\frac{-\mu(x,t)\gamma(x,t)}{|\mu(x,t)|+4(x_1^2+x_2^2)}.\qquad(21)$$

式中 $\mu(x,t)=(8x_1^2+10x_1x_2^2)\gamma(x,t)$. 依文[8]中方法可设计控制 u 为

$$u(t)=\begin{cases}-\operatorname{sgn}(\mu(x,t))\gamma(x,t), & |\mu(x,t)|>\varepsilon\exp(-\beta t),\\ \dfrac{-\mu(x,t)\gamma(x,t)}{\varepsilon\exp(-\beta t)}, & |\mu(x,t)|\leqslant\varepsilon\exp(-\beta t).\end{cases}\qquad(22)$$

式中 sgn(·)表示符号函数.

仿真中初始值取 $x_1(0)=-0.8, x_2(0)=1.2$, $h(x,q,t)=x_1, E(x,q,t)=0.5\sin(x_1x_2)$, 这时由(4),(5)式知 $\Delta_1(x,t)$ 可取 $|x_1|$, $\Delta_2(x,t)$ 可取 0.5, 故 $\gamma(x,t)$ 可取 $\gamma(x,t)=2|x_1|$.

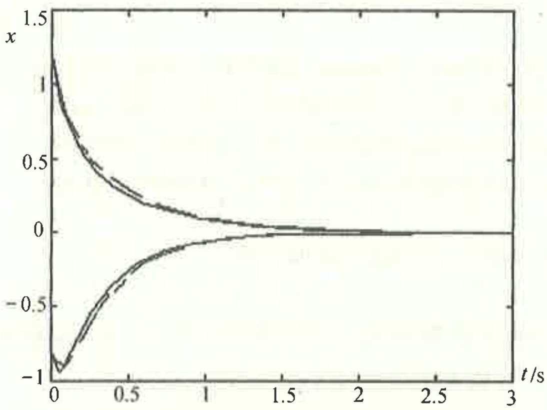

图 1　闭环系统的状态响应曲线 x_1, x_2

Fig. 1　States of closed-loop system x_1, x_2

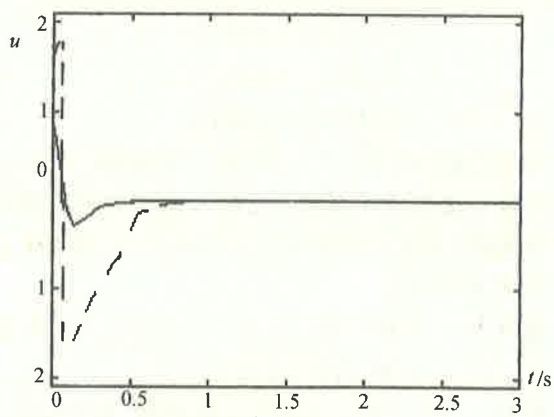

图 2　控制输入 u

Fig. 2　Control input u

系统(19)的仿真结果如图 1,2 所示,图中实线表示在控制(21)作用下系统(19)的仿真曲线,虚线表示在控制(22)作用下 $\varepsilon=0.5, \beta=1$ 得到的仿真图. 由本图 1,图 2 可以看到,在同样的条件下,对本文所研究的系统,利用控制(21)会得到更好的控制效果,且控制结构形式简单,便于实现.

参考文献(References)

1 Corless M J and Leitmann G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundness for uncertain dynamic systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, 26(5): 1139 - 1144

2 Barmish B R, Corless M J and Leimann G. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. SIAM J. Control and Optimization, 1983, 21(2): 246 - 255

3 Wu H S and Mizukami. Exponential stability of a class of nonlinear dynamical systems with uncertainties. System & Control Letters, 1993, 21(5): 307 - 313

4 Chen Y H and Leitmann G. Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions. Int. J. Control, 1987, 45(5): 1527 - 1542

5 Chen Y H. Design of robust controllers for uncertain dynamical systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(5): 487 - 491

6 Chen C C, Hsieh J G, et al. Some generalizations on the ultimate boundness control of uncertain systems. Int. J. Systems Science, 1994, 25(9): 1473 - 1488

7 张克跃,曹登庆. 非线性动力系统的鲁棒控制器设计. 西南交通大学学报, 1997, 32(1): 54 - 59

8 Qu Z and Dawson D M. Continuous feedback control guaranteeing exponential stability for uncertain dynamical systems. In: Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, United Kingdom, 1991, 2636 - 2638

本文作者简介

向峥嵘　1969 年 7 月生. 讲师. 现在南京理工大学自动化系攻读博士学位. 目前研究领域为不确定系统的鲁棒控制,非线性控制,神经网络在控制中的应用等.

陈庆伟　1963 年 11 月生. 高级工程师. 1988 年在南京理工大学自动化系获工学硕士学位. 主要研究方向为智能控制理论及应用,计算机控制系统等.

吴晓蓓　1958 年 11 月生. 副教授. 1984 年在南京理工大学自动化系获工学硕士学位. 目前主要研究方向为智能控制理论及应用,计算机控制系统等.

胡维礼　1941 年 1 月生. 教授,博士生导师. 1965 年毕业于清华大学自控系. 主要研究方向为鲁棒自适应控制,非线性控制及智能控制理论的伺服驱动系统中的应用等.