第 16 卷第 5 期　　控制理论与应用　　Vol.16, No.5
1999 年 10 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Oct., 1999

非线性微分代数控制系统解耦和反馈镇定

陈伯山　　刘永清
（湖北师范学院数学系·黄石，435002）（华南理工大学自动控制工程系·广州，510640）

摘要：讨论了一类非线性微分代数控制系统的输入输出解耦问题，给出了使系统可通过静态反馈达到输入输出解耦控制问题的具体条件，而且得到使系统渐近镇定的反馈控制.

关键词：微分代数系统；解耦；反馈控制；渐近镇定

Decoupling and Feedback Stabilization for Nonlinear Differential-Algebraic Control Systems

Chen Boshan
(Department of Mathematics, Hubei Normal University · Huangshi, 435002, P. R. China)
Liu Yongqing
(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P. R. China)

Abstract: The problem of the input/output decoupling for a class of nonlinear differential-algebraic control systems is discussed. We present and prove the condition under which the nonlinear system can keep decoupling with a feedback controller. Moreover, a feedback control law is proposed which ensure, under appropriate assumptions, that the system is asymptotically stabilized.

Key words: differential-algebraic equations; decoupling; feedback control; asymptotic stabilization

1 引言(Introduction)

考虑仿射非线性微分代数控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_{11}(x) + f_{12}(x)v + g(x)u, \\ 0 = f_{21}(x) + f_{22}(x)v + h(x)u, \\ y = m(x) + n(x)v. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^p$ 和 $m < n$. $f_{ij}(x)(i,j = 1,2), g(x), m(x)$ 和 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上解析. 我们视 v 为受限输入变量，u 为控制输入变量，y 为控制输出变量. 由于出现了由系统(1)的第二式所定义的受限条件，受限输入变量 v 被视为动态方程的额外变量，因此是不能直接改变的. 控制变量 u 则可以用来调节式(1)的解. 由非线性微分代数系统(1)所描述的控制系统是广义系统的一个重要类型.

本文总假定 $\operatorname{rank} f_{22}(x) = r = \text{const.}$，当 $r < m$ 时，系统(1)可能存在脉冲，这些脉冲可能阻止系统做工甚至摧毁系统. 因此在实际的系统设计中尽量避免脉冲出现，或者设计一种脉冲控制器进行无脉冲控制. 当 $f_{22}(x)$ 非奇异时，系统(1)无脉冲，且对任意分段连续的输入 u 和任意的初值 $x(0)$ 的解存在且唯一[1]. 当 $f_{22}(x)$ 是奇异时，情况比较复杂. 这种情况下的系统状态实现问题成为人们十分关心的问题，出现了许多有关方面的结果[2,6~8]. 在 $[f_{22}(x), h(x)]$ 行满秩的条件下，可用形如

$$u = \beta(x)v + w$$

的非奇异状态反馈使得系统(1)相应的闭环系统形如

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + g_1(x)u, \\ v &= f_2(x) + g_2(x)u, \\ y &= f_3(x) + g_3(x)u. \end{aligned}$$

其中 $f_i(t), g_i(x)(i = 1,2,3)$ 关于 x 解析[1]. 文[3]利用这种方法给出了系统(1)输入输出解耦问题局部可解条件. 本文不需要 $[f_{22}(x), h(x)]$ 行满秩而总假定如下条件成立.

条件 A　存在置换 $S: \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^m)$ 使得 $S(x)f_{22}(x) = 0, S(x)h(x) = 0$.

引理　设 G 是一个 $m \times n$ 阶矩阵. 如果 $\operatorname{rank} G = r < \min\{m,n\}$，则存在 $(m-r) \times m$ 阶矩阵 S 使得 $SG \equiv 0$.

令 $k(x) = S(x)f_{21}(x)$，假设存在有限个正整数 $r_1, \cdots, r_s$ 使得

i) 如果 $r_i \geqslant 2$，则 $L_{f_{12}^j} L_{f_{11}}^k k_i(x) = 0, \forall k = 0, \cdots, r_i - 2, i = 1, \cdots, s, j = 1, \cdots, m, \forall x \in \mathbb{R}^n$;

本文于 1998 年 2 月 24 日收到. 1998 年 9 月 3 月收到修改稿.

ii) $\operatorname{rank} M = m, x \in \mathbb{R}^n$，其中 $M = \begin{bmatrix} A(x) \\ f_{22}(x) \end{bmatrix}$，$A(x) = (a_{ij}(x))_{s\times m}, a_{ij}(x) = L_{f_{12}^j} L_{f_{11}}^{r_i-1} k_i(x), i = 1,\cdots,s, j = 1,\cdots,m$.

iii) 如果 $r_i \geqslant 2$，则 $L_{g^j} L_{f_{11}}^k k_i(x) = 0, \forall k = 0,\cdots,r_i-2, i = 1,\cdots,s, j = 1,\cdots,p, \forall x \in M$. 其中 $L_f k_i(x)$ 表示 $k_i(x)$ 沿着向量场 $f(x)$ 的方向导数，即

$$L_f k_i(x) = \frac{\partial_i(x)}{\partial x} f(x), L_f^k k_i(x) = \frac{\partial k_i(x)}{\partial x}(L_f^{k-1} k_i(x)).$$

本文的目的是，在条件 A 下寻找静态状态反馈控制规律使得非线性微分代数控制系统(1)相应的闭环系统. 每个输入通道单独控制一个，且只控制一个输出通道，即通过静态反馈达到输入输出解耦控制问题.

2 解耦问题(Decoupling problem)

首先，注意系统(1)等价于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_{11}(x) + f_{12}(x)v + g(x)u, \\ 0 = f_{21}(x) + f_{22}(x)v + h(x)u, \\ 0 = k(x), \\ y = m(x) + n(x)v. \end{cases} \tag{2}$$

我们定义

$$f^*(x) := f_{11}(x) + f_{12}(x)\gamma(x),$$
$$g^*(x) := g(x) + f_{12}(x)\eta(x),$$
$$m^*(x) := m(x) + n(x)\gamma(x),$$
$$n^*(x) = n(x)\eta(x),$$

其中 $\gamma(x)$ 和 $\eta(x)$ 分别为：

$$\begin{cases} \gamma(x) = -(M^{\mathrm{T}}(x)M(x))^{-1}M^{\mathrm{T}}(x)\begin{bmatrix} E(x) \\ f_{21}(x) \end{bmatrix}, \\ \eta(x) = (M^{\mathrm{T}}(x)M(x))^{-1}M^{\mathrm{T}}(x)\begin{bmatrix} B(x) \\ h(x) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{f_{11}}^{r_1} k_1(x) \\ \vdots \\ L_{f_{11}}^{r_s} k_s(x) \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} L_{g^1} L_{f_{11}}^{r_1-1} k_1(x) & \cdots & L_{g^p} L_{f_{11}}^{r_1-1} k_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g^1} L_{f_{11}}^{r_m-1} k_s(x) & \cdots & L_{g^p} L_{f_{11}}^{r_s-1} k_s(x) \end{bmatrix}.$$

不失一般性，设

$$n^*(x) = \begin{bmatrix} 0_{s\times p} \\ B_2(x) \end{bmatrix},$$

其中 $B_2(x) \in \mathbb{R}^{(p-s)\times p}$ 和 $0 \leqslant s \leqslant p$. 设

$$g^*(x) = [g_1^*(x),\cdots,g_p^*(x)],$$
$$m^* = [m_1^*(x),\cdots,m_p^*(x)]^{\mathrm{T}}.$$

进一步假设，存在正整数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_t$ 使得下面的条件成立：

iv) 如果 $\mu_i \geqslant 2$，则 $L_{g_j^*} L_{f^*}^k m_i^*(x) = 0, \forall k = 0,\cdots,\mu_i-2; j = 1,\cdots,p; i = 1,\cdots,t; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

v) 解耦矩阵 $D(x)$ 满足：$\operatorname{rank} D(x) = p, \forall x \in M$，其中

$$D(x) = \begin{bmatrix} D_1(x) \\ D_2(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}.$$

这里，$D_1(x) \in \mathbb{R}^{t\times p}, (D_1(x))_{ij} = L_{g_j^*} L_{f^*}^{\mu_i-1} m_i^*(x), i = 1,\cdots,t, j = 1,\cdots,p$.

考虑变量代换

$$\begin{cases} \rho_1 = k_1(x),\cdots,\rho_{r_1} = L_f^{r_1-1} k_1(x), \\ \rho_{r_1+1} = k_2(x),\cdots,\rho_{r_1+\cdots+r_s} = L_f^{r_m-1} k_s(x), \\ \theta_1 = m_1^*(x),\cdots,\theta_{\mu_1} = L_f^{\mu_1-1} m_1^*(x), \\ \theta_{\mu_1+1} = m_2^*(x),\cdots,\theta_{\mu_1+\cdots+\mu_s} = L_{f^*}^{\mu_t-1} m_t^*(x), \\ \zeta = \Phi_3(x). \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\zeta \in \mathbb{R}^{n-(r_1+\cdots+r_s)-(\mu_1+\cdots+\mu_t)}$，$\Phi_3(x)$ 是一个光滑映射. 可以证明由式(4)定义的非线性坐标变换在每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 的一个邻域里是一个局部微分同胚. 注意 $\rho = 0$，在坐标变换式(4)下系统(2)成为

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2,\cdots,\dot{\theta}_{\mu_1-1} = \theta_{\mu_1}, \\ \dot{\theta}_{\mu_1} = L_{f^*}^{\mu_1} m_1^*(x) + \sum_{j=1}^{p}(L_{g_j^*} L_{f^*}^{\mu_1-1} m_1^*(x))u_j; \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{t-1}+1} = \theta_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{t-1}+2}, \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_t-1} = \theta_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_t}; \\ \dot{\theta}_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_t} = L_{f^*}^{\mu_t} m_t^*(x) + \sum_{j=1}^{p}(L_{g_j^*} L_{f^*}^{\mu_t-1} m_t^*(x))u_j, \\ \dot{\zeta} = \dfrac{\partial \Phi_3(x)}{\partial x} f^*(x) + \dfrac{\partial \Phi_3(x)}{\partial x} g^*(x)u, \\ v = \gamma(x) + \eta(x)u, y = m^*(x) + \begin{bmatrix} 0_{s\times p} \\ D_2(x) \end{bmatrix} u. \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\gamma(x)$ 和 $\eta(x)$ 由式(3)给出. 系统(5)即为非线性系统(1)的局部正则型，利用它我们可以很容易

地得到解耦问题的解.

定理 在条件A下,假定系统(1)满足条件i)~iv).如果系统(1)在 $x \in \mathbb{R}^n$ 具有相对阶,即条件v)成立,那么系统的输入输出解耦问题在 x 附近可通过一个静态反馈 $u = \alpha(x) + \beta(x)w$($\beta(x)$ 非奇异)解决,问题的一个解是

$$\alpha(x) = - B^{-1}(x)c(x), \beta(x) = B^{-1}(x).$$

其中

$$c(x) = (c_1(x), \cdots, c_p(x)),$$

$$c_i(x) = \begin{cases} L_{f^*}^{\mu_i} m_i^*(x), & i = 1, \cdots, t, \\ m_i^*(x), & i = t+1, \cdots, p. \end{cases}$$

注意到,系统(1)在非奇异变量代换式(4)下成为状态可实现系统(5),因为系统(5)在反馈 $u = B^{-1}(x)(-c(x) + w)$ 作用后的闭环系统在新坐标下成为

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \cdots, \dot{\theta}_{\mu_1 - 1} = \theta_{\mu_1}, \dot{\theta}_{\mu_1} = w_1, \\ \theta_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{t-1}+1} = \theta_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{t-1}+2}; \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_t-1} = \theta_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_t}, \dot{\theta}_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_t} = w_t; \\ y_i = m_i^*(x), \ i = 1, \cdots, s; \\ y_j = w_j, \ j = s+1, \cdots, p; \end{cases} \tag{6a}$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \Phi_3(x)}{\partial x} f^*(x) + \frac{\partial \Phi_3(x)}{\partial x} g^*(x) D^{-1}(x)(-c(x) + w); \tag{6b}$$

$$v = \gamma(x) + \eta(x) D^{-1}(x)(-c(x) + w). \tag{6c}$$

这些方程的结构已经达到了解耦的要求,输入 w_i 通过一串 μ_i 阶积分器仅仅控制输出 ρ_i.

3 反馈镇定(Feedback stabilization)

我们已经看到利用反馈控制 $u = D^{-1}(x)(-c(x) + w) := G(\theta, \zeta) + C(\theta, \zeta)w$ 所得到的解耦闭环系统(6)的内部结构由 s 串分别是 $\mu_1, \cdots, \mu_s$ 阶积分器(6a),另外连接一个不可观子系统(6b)和一个显式状态关系式(6c).显然,在闭环系统(6a)中再作用一个反馈控制 $w_i = - c_{i0}\theta_1^i - c_{i1}\theta_2^i - \cdots - c_{i(\mu_1+\cdots+\mu_t-1)}\theta_{\mu_1+\cdots+\mu_t}^i + v_i, i = 1, \cdots, p$.我们可以通过适当选择参数 c_{ij} 使得设计系统(6a)有任意指定的输入输出稳定性质.系统(1)的内部稳定性还依赖于不可观子系统(6b)的渐近性质,即其零动态系统 $\dot{\zeta} = P(0, \zeta) + Q(0, \zeta)G(0, \zeta)$ 渐近稳定,总而言之,如果多项式 $p(s) = c_{i0} + c_{i1}s + \cdots + c_{i(\mu_1+\cdots+\mu_t)}s^{\mu_1+\cdots+\mu_t}$ 的根具有负实部,则反馈控制

$$u = D^{-1}(x)(-c(x) - c_0 m_1^*(x) - c_1 L_{f^*} m_2^*(x) - \cdots - c_{\mu_1+\cdots+\mu_t-1} L_{f^*}^{\mu_t-1} m_t^*(x) + v)$$

渐近镇定系统(1),其中 $c_i = (c_{1i}, c_{2i}, \cdots, c_{pi})^{\mathrm{T}}, i = 0, 1, \cdots, \mu_1 + \cdots + \mu_t - 1$.

参考文献(References)

1 刘永清,温香彩.广义系统的变结构控制.广州:华南理工大学出版社,1997

2 Isidori A. Nonlinear Control Systems. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1989

3 Liu Xiaoping. Input-output decoupling for nonlinear singular control systems. Preprint of 12th IFAC World Congress, 1993, 6: 395 – 398

4 McClamroch N H. Feedback stabilization of control systems described by a class of nonlinear differential-algebraic equations. Systems and Letters, 1990, 15(1): 53 – 60

本文作者简介

陈伯山 湖北师范学院数学系教授,华南理工大学自动控制工程系博士研究生.先后独立承担并完成国家自然科学基金项目一项,湖北省高校重点课题项目两项.已在《科学通报》,《数学学报》,《应用数学学报》和《系统科学与数学》等学术刊物上发表学术论文近40篇.主要研究兴趣是非线性系统的定性分析.当前的研究方向为非线性系统的定性理论及应用.

刘永清 见本刊1999年第1期122页.