

文章编号: 1000-8152(2000)01-0040-05

40-44

非线性微分代数系统的稳定性

陈伯山

(湖北师范学院数学系·黄石, 435002) (华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640)

刘永清

0175.13

摘要: 本文发展了微分代数系统的稳定性理论, 讨论了微分代数系统在平衡点近旁的正则性问题, 给出其在平衡点处的受限形式, 建立了受限系统 Lyapunov 稳定性的基本定理, 得到了微分代数系统平凡解渐近稳定的判别准则。

关键词: 微分代数系统; 正则性; 受限系统; 稳定性

文献标识码: A

11/12

The Stability of Nonlinear Differential-Algebraic Systems

CHEN Boshan

(Department of Mathematics, Hubei Normal University·Huangshi, 435002, P.R. China)

LIU Youqing

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology·Guangzhou, 510640, P.R. China)

Abstract: In this paper we consider the problem of stability of the differential-algebraic system. First of all, we discuss the regularization in equilibrium for nonlinear differential-algebraic systems. Lyapunov stability theory for conventional system in a natural way to nonlinear constrained systems, and some stability theorems for nonlinear constrained systems are given. By making use of the regularization results of the nonlinear differential-algebraic systems and stability theorems of nonlinear constrained systems, we have obtained some stability results for nonlinear differential-algebraic systems.

Key words: differential-algebraic system; regularization; constrained systems; stability

1 引言(Introduction)

随着科学的发展和工程技术的进步, 单纯的常微分系统不足以对某些复杂系统进行精确的描述, 这就促使人们去研究由常微分系统和代数系统混合而成的系统, 即微分代数系统。现在, 在电网络分析、分工系统、生态工程、最优控制、计算机辅助设计与建模以及社会学和经济学等各个领域都提出了各种类型的微分代数系统, 人们也越来越多地认识到系统研究微分代数系统理论的重要性, 各类学术刊物上不断涌现出大量有关微分代数系统的研究论文^[3~8], 也出现了一些学术专著^[1,2]。同常微分方程一样, 平凡解在 Lyapunov 意义下的稳定性是微分代数系统的重要研究课题, 与此同时 Lyapunov 第二方法仍然成为研究代数系统平凡解稳定性的有效方法。近年来, 这方面的研究有了长足的进展, 产生了许多重要结果(参见文[5~8]及其中所列的参考文献)。纵观过去的研究结果, 多数工作的主要思想都基于如下两点: 一是把微分代数系统局部视为常微分方程, 从而发展平行于常微分方程的理论, 如平凡

解的稳定性、渐近稳定性等。二是针对微分代数系统的特定形式, 推广稳定性的概念, 研究各种特殊的稳定性。但是, 前者局部微分方程的解析形式在一般情况下是不能直接给出的, 因而影响基本定理广泛性; 后者因稳定性概念的特殊性往往使得相关结果的实用性受到限制。在本文中, 我们把微分代数系统局部归结为流形上的微分方程, 具体来说是一种受限微分方程形式, 利用后者的特殊结构建立平凡解稳定性的基本定理。作为准备知识, 我们在第二节里讨论非线性微分代数系统在平衡点近旁的正则性, 即与受限微分系统的局部等价性问题; 在第三节里, 我们讨论受限微分系统的稳定性问题, 给出稳定性的基本定理; 第四节, 我们利用第二节里的正则性结果和第三节里的基本定理研究微分代数系统的稳定性问题, 同时给出了 Lyapunov 函数的一般形式, 系统平凡解的稳定性判据和吸引域。

2 等价系统(Equivalent systems)

考虑如下形式的微分代数系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ 0 = g(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续可微. 设系统(2.1)有平衡点:

$$\exists (x^*, y^*) \in \Omega, \exists f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0; \quad (2.2)$$

(f, g) 在 (x^*, y^*) 的某个领域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 上充分光滑, $g(x, y)$ 关于 y 的 Jacobi 矩阵 $D_y g(x, y)$ 在 Ω 有常秩:

$$\text{rank}(D_y g(x, y)) = \text{const} \leq m, \forall (x, y) \in \Omega. \quad (2.3)$$

进一步设

$$\begin{aligned} &\text{rank} D(f, g)(x^*, y^*) = \\ &\text{rank} \begin{bmatrix} D_x f(x^*, y^*) & D_y f(x^*, y^*) \\ D_x g(x^*, y^*) & D_y g(x^*, y^*) \end{bmatrix} = n + m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

显然, 条件(2.4)意味着平衡点 (x^*, y^*) 是孤立的. 在条件(2.2)~(2.4)成立的前提下考虑系统(2.1)的等价受限系统. 为此, 首先, 我们引进几个相关的概念.

定义 2.1 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k (k \geq m)$ 是连续可微映射. 如果 $f(x^*, y^*) = 0, G(x^*, y^*) = 0, \text{rank}(D_x G(x, y)) = \text{const} \leq m, \forall (x, y) \in \Omega$, 且矩阵 $D(f, G)(x^*, y^*)$ 满秩, 则称函数对 (f, G) 在零点 (x^*, y^*) 处容许; 亦称广义系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ 0 = G(x, y), \end{cases} \quad (2.5)$$

在平衡点 (x^*, y^*) 处容许.

注 2.1 当条件(2.2)和(2.4)成立时, (f, g) 在平衡点 (x^*, y^*) 处容许.

引理 2.1 设 $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k (k \geq m)$ 是一个连续可微的映射. 如果 $(x_0, y_0) \in \Omega$ 使得 $\text{rank} G_y(x_0, y_0) = r < m$, 则存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 $\tilde{N}$ 和 $\tilde{N}$ 上的一个光滑的置换映射 $S: \tilde{N} \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k-r})$ 使对每点 $(x, y) \in \tilde{N}$ 都有

$$\text{rank} S(x, y) = k - r, \text{ 且 } S(x, y) D_x G(x, y) \equiv 0. \quad (2.6)$$

证 首先, 存在置换 $P_1 \in L(\mathbb{R}^k), P_2 \in L(\mathbb{R}^m)$ 使得

$$P_1 D_x G(x, y) P_2 = E(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x, y) & \varepsilon_{12}(x, y) \\ \varepsilon_{21}(x, y) & \varepsilon_{22}(x, y) \end{pmatrix}.$$

其中 $\varepsilon_{11}(x_0, y_0)$ 是非奇异的 $r \times r$ 矩阵. 其次, 定义

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\varepsilon_{21}\varepsilon_{11}^{-1} & I \end{pmatrix},$$

则 L 在 (x_0, y_0) 的充分小邻域 $\tilde{N}$ 中有定义, 且

$$LE = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ 0 & \varepsilon_{22} - \varepsilon_{21}\varepsilon_{11}^{-1}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

由于在 $\tilde{N}$ 中有, $\text{rank} \varepsilon_{11}(x, y) = \text{rank} D_x G(x, y)$, 故 $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{21}\varepsilon_{11}^{-1}\varepsilon_{12} \equiv 0$. 最后定义

$$S = (-\varepsilon_{21}\varepsilon_{11}^{-1}, I)P_1,$$

则 $S: \tilde{N} \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k-r})$ 有定义, 且 $S(x, y) D_x G(x, y) = S(x, y) D_x G(x, y) P_2 = 0$. 证毕.

定义 2.2 设条件(2.2)~(2.4)成立, Ω 为 (x^*, y^*) 在 $g^{-1}(0)$ 中的充分小邻域. 定义映射族 $\{G_i\}, G_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足

$$\begin{aligned} G_0(x, y) &= g(x, y), \\ G_{i+1}(x, y) &= \begin{pmatrix} G_0(x, y) \\ S_i(x, y) D_x G_i(x, y) f(x, y) \end{pmatrix}, \\ i &= 1, 2, \dots, s-1. \end{aligned}$$

其中, Ω 为平衡点 (x^*, y^*) 的充分小邻域, S_i 是引理 2.1 中对应于映射 G_i 的置换映射. 我们把使得 $(f, G_i) (i = 1, \dots, s)$ 都相容, 且满足 $G_i^{-1}(0) \neq G_{i-1}^{-1}(0)$ 的最大整数 s 称为系统(2.1)在平衡点 (x^*, y^*) 处的次数.

注 2.2 在引理 2.1 里, 让 $\tilde{N} = \Omega$ 时, 在定义 2.1 的条件下有, $\tilde{N} = N = \Omega$; 次数是平衡点一个新的局部性概念, 其不同于通常意义下的指数概念, 在下面的定义 2.3 中, 我们给出了局部指数的概念.

首先, 由定义可知 $G_{i+1}^{-1}(0) \subseteq G_i^{-1}(0)$, 下面的引理的结论是显然的.

引理 2.2 设系统(2.1)在平衡点 (x^*, y^*) 处的次数为 s , 则所有系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ 0 = G_i(x, y), (i = 1, \dots, s) \end{cases}$$

等价.

定义 2.3 设系统(2.1)在平衡点 (x^*, y^*) 处的次数为 s , 且满足

$$\text{rank} D_x G_s(x^*, y^*) = m, \quad (2.7)$$

则称系统(2.1)在平衡点 (x^*, y^*) 处的局部指数为 s .

定理 2.1 设系统(2.1)在平衡点 (x^*, y^*) 处的局部指数为 s . 则系统(2.1)在平衡点 (x^*, y^*) 处局部等价于一个受限系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = -[(D_x G_s(x, y))^T (D_x G_s(x, y))]^{-1} \cdot \\ \quad (D_x G_s(x, y))^T D_x G_s(x, y) f(x, y), \\ 0 = g(x, y). \end{cases} \quad (2.8)$$

证 由引理 1.2, 系统(2.1)等价于如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ 0 = G_s(x, y). \end{cases} \quad (2.9)$$

根据条件(2.7), $(D_x G_s(x, y))^T (D_x G_s(x, y))$ 的非奇异性, 微分等式 $G_s(x, y) = 0$ 并求解 y 得

$$\dot{y} = -[(D_x G_s(x, y))^T (D_x G_s(x, y))]^{-1} \cdot (D_x G_s(x, y))^T D_x G_s(x, y) \dot{x}$$

根据系统(2.1)即得系统(2.8). 证毕.

在较为一般的情况下, 我们可以把微分代数系统写成受限系统的形式. 为此, 在下节我们建立一般性受限微分系统平凡解稳定性的基本定理.

3 受限系统的稳定性 (Stability theorems for Constrained systems)

首先, 我们考虑具有一般形式的微分受限系统

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ 0 = G(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续可微的函数. 我们假定原点 $O(0)$ 是系统(3.1)孤立的平衡点; 存在原点的一个邻域 N 使得

$$\text{在 } N \text{ 里, } F(x) = 0, G(x) = 0, \text{ 当且仅当 } x = 0. \quad (3.2)$$

在条件(3.2)下, $O(0)$ 是系统(3.1)在 N 里的唯一平衡点. 如果我们进一步假定 $O(0)$ 是 $G(x) = 0$ 的正则解, 即

$$\text{rank}(DG(0)) = m \quad (3.3)$$

则系统(3.1)在原点的一个邻域中的相容初值问题的解存在且唯一. 另外, 我们不难看出, 集合

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n; G(x) = 0\} \quad (3.4)$$

是系统(3.1)的一个不变子集.

现在, 我们从一般形式上描述系统(3.1)的平凡解 $x(t, 0) \equiv 0$ 在 Lyapunov 意义下的稳定性的定义.

定义 3.1 系统(3.1)的平凡解称为稳定的, 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 使对所有 $x_0 \in M \cap B_\delta$, 有

$$x(t, x_0) \in M \cap B_\varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}_+$$

其中

$$B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq \delta\}.$$

定义 3.2 系统(3.2)的平衡点称为渐近稳定的, 如果它是稳定的, 且存在一个 $\eta > 0$ 使对所有 $x_0 \in M \cap B_\eta$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0.$$

定义 3.3 如果函数 $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 连续, 单调增加且满足 $\alpha(0) = 0$, 则称其为 χ 类函数.

现在, 我们可以证明如下关于受限微分系统(3.1)的平凡解 $x = 0$ 的 Lyapunov 稳定性的基本定理.

定理 3.1 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通开子集, $0 \in \Omega$. 假定存在一个连续可微函数 $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, 一个 χ 类函数 α 使得下面的条件成立:

- a) $V(0) = 0$;
- b) $V(x) \geq \alpha(\|x\|)$, $\forall x \in M \cap \Omega$;
- c) $\dot{V}(x)|_{(3.1)} \leq 0$, $\forall x \in M \cap \Omega$.

则系统(3.1)的平凡解稳定.

证 设 $x(t, x_0)$ 是系统(3.1)相容初值问题的解, 其中 $x(0, x_0) = x_0, g(x_0) = 0$. 显然, $g(x(t, x_0)) \equiv 0$, 即 $x(t, x_0) \in M$. 只要 x_0 充分小, $x(t, x_0) \in \Omega$. 设 $\varepsilon > 0$ 是任意给定的数. 选择 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使得对所有 $x_0 \in M \cap B_\delta$ 都有 $V(x_0) < \alpha(\varepsilon)$. 由条件 a) 和 V 的连续性, 这样的 δ 是存在的. 由于

$$\dot{V}(x)|_{(3.1)} = \frac{d}{dt} V(x(t, x_0)),$$

这和条件 c) 一起保证了 $V(x(t, x_0))$ 关于 t 单调非减. 设 $x_0 \in M \cap B_\delta$, 注意到 $x(t, x_0) \in M$ 和条件 b), 我们有

$$\alpha(\|x(t, x_0)\|) \leq V(x(t, x_0)) \leq V(x(0, x_0)) = V(x_0) < \alpha(\varepsilon).$$

由 α 的连续和单调性, $\|x(t, x_0)\| \leq \varepsilon, \forall t > 0$. 证毕.

定理 3.2 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通开子集, $0 \in \Omega$. 假定存在一个连续可微函数 $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, 两个 χ 类函数 α 和 γ 使得下面的条件成立:

- a) $V(0) = 0$;
- b) $V(x) \geq \alpha(\|x\|)$, $\forall x \in M \cap \Omega$;
- c) $\dot{V}(x)|_{(3.1)} \leq -\gamma(\|x\|)$, $\forall x \in M \cap \Omega$.

则系统(3.1)的平凡解渐近稳定, 且有吸引域:

$$V_a^{-1} = \{x \in M \cap \Omega; V(x) \leq \alpha(b)\}.$$

其中

$$b = \sup_{\beta \in \mathbb{R}_+} \{\beta; M \cap B_\beta \subset \Omega\}.$$

证 沿用定理 3.1 的证明思想, 本定理的证明平行于常微分方程对应定理的证明, 故从略.

4 微分代数系统的稳定性 (Stability for differential algebraic systems)

本节将利用上节的定理给出微分代数系统(2.1)的平凡解 (x^*, y^*) 稳定性的一般性结论. 我们不妨假定 $x^* = 0, y^* = 0$, 即原点是系统(2.1)局部唯一的平衡点. 设

$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; g(x, y) = 0\}$.

定理 4.1 设系统(2.1)在平衡点(0,0)处的指数为 s . 进一步, 假定

$$B(x, y) = D_x f(x, y) - D_y f(x, y) \\ \left[(D_x G_s(x, y))^T (D_x G_s(x, y)) \right]^{-1} \cdot \\ (D_y G_s(x, y))^T D_x G_s(x, y)$$

满足如下条件: 存在正定矩阵 A 使得

$$\begin{cases} AB^T(x, y) + B(x, y)A \leq -\varepsilon I, \\ \forall (x, y) \in M \cap \Omega'. \end{cases} \quad (4.1)$$

对某个 $\varepsilon > 0$, 其中 Ω' 是 Ω 中包含原点的连通开子集. 则系统(2.1)的平凡解(0,0)渐近稳定.

证 考虑 Lyapunov 函数

$$V(x, y) = f^T(x, y) A f(x, y)$$

显然, $V(x, y) \in C^2(\Omega)$, 且在 $M \cap \Omega$ 中正定. 加之,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y)|_{(2.1)} &= \dot{V}(x, y)|_{(2.8)} = \\ f^T(x, y) (AB^T(x, y) + B(x, y)A) f(x, y) &\leq \\ -\varepsilon f^T(x, y) f(x, y), \end{aligned}$$

因此, 即 $\dot{V}(x, y)|_{(2.8)}$ 在 $M \cap \Omega'$ 中负定. 于是, 由定理 3.2 推得系统(2.8)的零解渐近稳定性. 从而, 根据定理 2.1 可知系统(2.1)的零解渐近稳定.

证毕.

定理 4.2 设系统(2.1)在平衡点(0,0)处的指数为 s . 如果存在正常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 使得 $B(x, y) = (B_{ij}(x, y))_{n \times n}$ 满足如下条件:

$$\begin{cases} \alpha_j B_{jj}(x, y) + \sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_i |B_{ij}(x, y)| < -\varepsilon, \\ j = 1, \dots, n, \forall (x, y) \in M \cap \Omega'. \end{cases} \quad (4.2)$$

对某个 $\varepsilon > 0$. 则系统(2.1)的平凡解(0,0)渐近稳定.

证 考虑向量 Lyapunov 函数 $V(x, y) = f(x, y)$, 我们有

$$\dot{V}_{(2.1)}(x, y) = B(x, y) f(x, y). \quad (4.3)$$

现在取标量 Lyapunov 函数 $V(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |f_i(x, y)|$, 显然 $V(x, y)$ 在 $M \cap \Omega$ 中正定. 由(4.3)和(4.2)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(2.1)}(x, y) &= \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{sgn} f_i(x, y) \sum_{j=1}^n B_{ij}(x, y) f_j(x, y) &\leq \\ \sum_{i=1}^n [\alpha_i B_{ii}(x, y) |f_i(x, y)| + \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j |B_{ij}(x, y)| |f_j(x, y)|] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [\alpha_j B_{jj}(x, y) + \sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_i |B_{ij}(x, y)|] |f_j(x, y)| &\leq \\ -\varepsilon \sum_{j=1}^n |f_j(x, y)|, \end{aligned}$$

即 $\dot{V}_{(2.1)}(x, y)$ 在 $M \cap \Omega'$ 中负定. 因此, 系统(2.1)的零解渐近稳定. **证毕.**

当微分代数系统在平衡点处的次数为 0 时, 我们有下面较为实用的稳定性判别准则.

推论 4.1 设 $O(0,0)$ 是系统(2.1)局部唯一的平衡点. 如果在定理 4.1 或定理 4.2 中的矩阵 $B(x, y)$ 换为

$$B(x, y) = D_x f(x, y) - D_y f(x, y) \cdot \\ (D_y g(x, y))^{-1} D_x g(x, y),$$

则系统(2.1)的平凡解(0,0)渐近稳定.

现在, 我们考虑线性微分代数系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_{11}x + C_{12}y, \\ 0 = C_{21}x + C_{22}y. \end{cases} \quad (4.4)$$

其中, C_{11}, C_{12}, C_{21} 和 C_{22} 分别为 $n \times n, n \times m, m \times n$ 和 $m \times m$ 阶矩阵. 设(0,0)是系统(4.4)唯一平衡点, 即矩阵

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = n + m.$$

推论 4.2 如果矩阵 C_{22} 非奇异, 则系统(4.4)的零解渐近稳定的充要条件是, 存在正定矩阵 A 使得

$$AB^T + BA = -I, \quad (4.5)$$

其中 $B = C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{21}$.

证 充分性由推论 4.1 推得, 为了证明必要性, 我们把系统(4.4)写成

$$\begin{cases} \dot{x} = (C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{21})x, \\ 0 = C_{21}x + C_{22}y. \end{cases} \quad (4.6)$$

设系统(4.5)的零解渐近稳定, 则系统(4.6)的孤立子系统:

$$\dot{x} = (C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{21})x$$

的零解渐近稳定. 根据常微分方程的有关结论, (4.5)成立.

注 4.1 条件(4.5)的另一个等价条件是: 矩阵 B 的所有特征根都具有负实部.

例 4.1 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ 0 = x^2 + y^2 - 1. \end{cases} \quad (4.7)$$

其中 $a > 0, b > 0$ 是常数. 计算得, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 的一个

局部唯一的平衡点,考虑坐标变换

$$\bar{x} = x - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{y} = y - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

则系统(4.7)化为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = -\bar{x} + \bar{y} =: f(\bar{x}, \bar{y}), \\ 0 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \sqrt{2}\bar{x} + \sqrt{2}\bar{y} =: g(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (4.8)$$

原点是系统(4.8)的平衡点,计算得

$$D_x g(\bar{x}, \bar{y}) = 2\bar{x} + \sqrt{2},$$

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = -1 - \frac{2\bar{x} + \sqrt{2}}{2\bar{y} + \sqrt{2}} = -1 - \frac{x}{y}.$$

由于 $A(\bar{x}, \bar{y})$ 在域

$$\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$$

上严格负,因此平衡点 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 是渐近稳定.显然,

利用上面的推导过程也可以证明系统(4.7)的另一

个平衡点 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 也是渐近稳定的,吸引域为

$$\Omega'' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x < 0, y < 0\}.$$

例 4.2 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - z \\ \dot{y} = -y - z \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

显然系统(4.9)在平衡点 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 的次数为 1,

$$G_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ -2x^2 - 2y^2 - 2(x+y)z \end{pmatrix}.$$

计算定理 4.1 中的矩阵得

$$B(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2x}{x+y} & -\frac{2y}{x+y} \\ -\frac{2x}{x+y} & -1 - \frac{2y}{x+y} \end{pmatrix}.$$

显然存在平衡点 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 的一个充分小的邻

域使得 $\frac{2y}{x+y} > 0$, 于是,由定理 4.2 可知系统(4.9)

的平凡解 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 渐近稳定.同理可证,系统(4.

9)的另一个平凡解 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 亦渐近稳定.

参考文献(References)

- [1] Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations[M]. San Francisco: Pitman Advanced publishing program, 1980
- [2] Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations II[M]. San Francisco: Pitman Advanced publishing program, 1982
- [3] Sauer P W and Pan M A. Power systems steady-state stability and the load-flow jacobian[J]. IEEE Trans Power Systems, 1990, 5(4): 1374-1383
- [4] Gutser T V, Jacquemart Y, Marquet J N, Prouot P. A comprehensive analysis of midterm voltage stability[J]. IEEE Trans. Power Systems, 1995, 10(3):
- [5] Voumas C D. Voltage stability and controllability indices for multi-machine power systems[J]. IEEE Trans Power Systems, 1995, 10(3): 1183-1189
- [6] David J H and Iven M Y. Stability theory for differential-algebraic systems with applications for power systems[J]. IEEE Trans. Circuits & Systems, 1990, 37(11): 1416-1423
- [7] Tischendorf C. On the stability of solutions of autonomous index-1 tractable and quasilinear index-2 tractable DAEs[J]. Circuits Systems Signal Process, 1994, 13(2,3): 139-154
- [8] Hill D J and Mareels I M Y. Stability theory for differential-algebraic systems with application to power systems[J]. IEEE Trans Circuits & Systems, 1990, 37(11): 1416-1423
- [9] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988
- [10] 谢湘生. 带有滞后的广义系统的稳定性与镇定[博士学位论文][D]. 广州: 华南理工大学, 1996

本文作者简介

陈伯山 湖北师范学院数学系教授. 先后独立承担并完成国家自然科学基金项目一项, 湖北省高校重点课题项目两项. 已在《科学通报》,《数学学报》,《应用数学学报》和《系统科学与数学》等学术刊物上发表学术论文近 40 篇. 主要研究兴趣是非线性系统的定性分析. 当前的研究方向为非线性系统的定性理论及应用.

刘永清 见本刊 2000 年第 1 期第 8 页.