

一类定性控制系统的稳定性分析

刘林运 万百五

(西安交通大学系统工程研究所·西安, 710049) (香港理工大学机械工程系·香港)

梁天培

摘要: 对一类非线性对象提出了定性稳定性的定义, 并对其闭环自治系统的定性稳定性提出一个充分性判据, 然后给出一种用变量梯度法构造李亚普诺夫函数的步骤. 最后以一个二阶非线性对象为例, 给出了一种以全部定性状态作为反馈的定性控制, 讨论了闭环控制系统的定性稳定性.

关键词: 定性稳定性; 定性控制; 定性量

文献标识码: A

Study on Qualitative Stability for a Class of Qualitative Control System

LIU Linyun and WAN Baiwu

(The Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University·Xi'an, 710049, P. R. China)

T P Leung

(Department of Mechanical Engineering, Hong Kong Polytechnic University·Hong Kong)

Abstract: This paper defines qualitative stability for a class of nonlinear plant, and offers a sufficient criterion for qualitative stability of its close-loop autonomous system, then the step of constructing the Lyapunov function using variable gradient method is obtained. Finally, for a two-order nonlinear plant, a qualitative control which uses all qualitative status as feedback is proposed, and the qualitative stability of close-loop control system is discussed.

Key words: qualitative stability; qualitative control; qualitative value

1 引言(Introduction)

考虑如下形式的连续时间时不变单输入单输出非线性对象:

$$\dot{x} = f(x, u, [\theta]), \quad y = h(x, [\theta]), \quad (1)$$

式中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别为系统的输入和输出, f 和 h 为已知非线性函数, $\theta = \theta^* \in \mathbb{R}^m$ 为常值模型参数, 仅知其范围为定性量 $[\theta]$.

文献[1~3]对定性控制的发展现状及控制方法作了详细研究, 本文以全部定性状态 $[x]$ 作为反馈, 对一类非线性对象做定性控制系统的稳定性分析.

2 定性稳定性概念(Qualitative stability concept)

对式(1)所示的非线性对象, 采用定性控制器后, u 依然可表示为状态变量的函数, 即 $u = u(x)$, 则式(1)可转化为自治系统

$$\dot{x} = F(x, [\theta]), \quad y = h(x, [\theta]), \quad (2)$$

不失一般性, 假定 $x = 0$ 时 $u = u(0)$, 且

$$F(0, [\theta]) = 0, \quad h(0, [\theta]) = 0, \quad (3)$$

即 $x = 0$ ($y = 0$) 为闭环系统的平衡点.

考虑 $x \in [0]$, 即状态在定性零点的系统特性. 定性控制器使得对所有 $x \in [0]$, 都有 $u = u(0)$. 此 u 值虽然可使式(3)成立, 但是当 x 不在平衡点, 并且式(2)在平衡点不稳定时, 定性控制器则无能为力; 只有当 $x \notin [0]$ 时, 定性控制器才可以起作用. 因此, 定性控制系统的稳定性与通常意义下的稳定性(即李亚普诺夫意义下稳定)是不一样的. 定性控制系统在 $x \in [0]$ 内能否稳定取决于 $u = u(0)$ 时非线性对象式(1)本身的性质, 与定性控制器无关.

Raisch 对以连续时间线性系统为对象的定性控制系统给出了定性稳定性的定义^[4], 本文则给出式(2)所示闭环系统的定性稳定性概念. 假设闭环系统式(2)的初值为 $x(0)$, 解为 $x(t, x(0))$, $X_e \subset \mathbb{R}^n$ 为平衡点 $x = 0$ 的邻域, 那么

定义 1 如果对所有的 $x(0) \in X_e$, 都有 $x(t, x(0)) \in X_e$, 则称 X_e 是 $x(t)$ 的一个不变集.

定义 2 称不变集 X_e 是吸引的, 如果对所有的

$x(0) \in \mathbb{R}^n$ 都存在对应的 τ 值,使得当 $t > \tau$ 时, $x(t, x(0)) \in X_e$.

定义 3 闭环系统式(2)被称为是定性稳定的,如果存在一个不变集 $X_e \subset \mathbb{R}^n$ 而且 X_e 是吸引的.此时 X_e 被称为定性平衡域.

因此,对式(1)所示的非线性对象,定性控制器的设计需要保证所选择的控制 u 能使得闭环系统式(2)定性稳定.

3 一类定性控制系统的稳定性分析(Stability analysis of a class of qualitative control system)

对于式(1)描述的非线性对象,如果能将定性控制 u_q 的表达式给出,则定性控制系统式(2)的定性稳定性问题便可转换为 $x \notin [0]$ 时的李亚普诺夫意义下的稳定性问题.

定理 1 对于式(2),式(3)所示的自治系统,定性零点 $X_0 = [0]$ 是包含平衡点 $x = 0$ 的一个有界闭集, X_0 的边界 Γ 上没有式(2)的任何平衡状态,若存在正定纯量函数 $V(x)$,满足: 1) $\frac{\partial V}{\partial x}$ 是连续的; 2) 当 $\|x\| = 0$ 时, $V(x) = 0$; 当 $\|x\| \neq 0$ 时, $V(x) > 0$; 3) $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x) \rightarrow \infty$, 而且 $V(x)$ 对时间 t 的微分 $\dot{V}(x)$ 满足在 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $x \notin [0]$ 时有 $\dot{V}(x) = W(x) < 0$; 或者 $W(x) \leq 0$, 但满足 $\dot{V}(x) = W(x) = 0$ 的 $x(t)$ 不是方程式(2)的解,那么必然存在一个不变集 $X_e \supset X_0$, 使得自治系统式(2)在定性平衡域 X_e 是定性稳定的.

证 设系统的初始状态 $x(0) \notin [0]$, 运动轨迹为 $x(t)$. 先考虑 $W(x) < 0$ 的情况. 对 $\forall t_2 > t_1 > t_0$, 有 $V(x(t_2)) - V(x(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(x(\tau)) d\tau$, 因为 $\dot{V}(x) = W(x) < 0$, 所以 $V(x(t_2)) < V(x(t_1))$, 即 $V(x(t))$ 关于 t 单调递减. 现假定 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(t) \notin X_0$, 则必有 $t \rightarrow \infty$ 时 $V(x(t)) > 0$. 由于单调递减有下界的函数必有极限, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$ 存在, 记 $l = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$, 则 $l > 0$. 因为 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(t) \notin X_0$, 则必存在一个充分大的正数 T , 使得 $\forall t \geq T$ 时都有 $x(t) \notin X_0$. 当 $t \geq T$ 时 $V(x(t)) \geq l \geq 0$. 由 $V(x)$ 的连续性及 $V(0) = 0$, 故存在 $\beta > 0$, 当 $V(x) \geq l$ 时有 $\|x\| \geq \beta$. 又由于 $t \geq T$ 时 $\dot{V}(x)$ 为负定函数, 故必存在 $b > 0$, 在 $\|x\| \geq \beta$ 时有 $W(x) \leq -b$, 则对任意 $t \geq T$ 有 $V(x(t)) \leq V(x(T)) - b(t - T)$. 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $V(x(T)) < V(x(0))$ 为常值, 则有 $V(x(t)) \rightarrow -\infty$, 这与 $V(x(t)) > 0$ 相矛盾, 故假定是错误的.

因此必有 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \in X_0$, 故有 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \in X_e$. 当初始状态 $x(0) \in [0]$ 时, 假定在某个时刻 t_m , 有 $t > t_m$ 时 $x(t) \notin [0]$, 则由前面的推导可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时仍有 $x(t) \in X_0$, 即状态 $x(t)$ 在有限的时间内仍会回到 X_0 内, 由 $x(t)$ 的连续性可知 $x(t)$ 有界. 因此必存在一个充分大的 $X_e \supset X_0$, 使得 X_e 为一个不变集. 因此自治系统式(2)在 X_e 是定性稳定的.

对于 $\dot{V}(x) = W(x) = 0$ 的情况, 根据巴拉巴辛-克拉索夫斯基 (Brabashin-Krasovskii) 的研究结果可知, 若 $W(x) = 0$, 即 $\dot{x} = F(x, [\theta])$ 切于 $V(x) = k$ 的超曲面. 如果 $W(x) = 0$ 的 $x(t)$ 不是 $\dot{x} = F(x, [\theta])$ 方程的解, 那么动点不会停留在 $V(x) = k$ 的曲面上, 对于 $t > t_0$, 总有 $V(x(t_1)) > V(x(t_2))$, 式中 $t_1 < t_2$. 这仍然可导出渐近稳定的结论. 证毕.

定理 1 虽然给出了一种定性稳定性的判别方法, 但并没有给出定性平衡域 X_e 的求解法. 一般情况下, X_e 是包含 $[0]$ 的一个小邻域, $[0]$ 越小, X_e 越小.

以下给出一种用变量梯度法构造李亚普诺夫函数 $V(x)$ 的步骤:

1) 先假定一个如下形式的梯度向量

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \vdots \\ \nabla V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix};$$

2) 计算 $\dot{V} = [\nabla V(x)]^T \dot{x}$;

3) 利用 $\nabla V(x)$ 的雅可比阵的对称性质决定

$\frac{n(n+1)}{2}$ 个系数 a_{ij} ;

4) 在 $x \notin [0]$ 时限制 $\dot{V}$ 是负定的;

5) 采用下式求积分, 算出 $V(x)$,

$$V(x) = \int_0^{x_1(x_2=x_3=\cdots=x_n=0)} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_3=x_4=\cdots=x_n=0)} \nabla V_2 dx_2 + \cdots + \int_0^{x_n(x_1=x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=x_{n-1})} \nabla V_n dx_n;$$

6) 检查是否在 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时有 $V(x) \rightarrow \infty$, 以及使 $V(x)$ 正定的定性稳定范围.

4 举例 (Illustration)

以下以一类二阶非线性对象为例来讨论定性控制系统的稳定性. 假定对象方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x, [\theta]) + g(x, [\theta]) \cdot u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (4)$$

式中 $x = (x_1, x_2)^T \in U_c \subset \mathbb{R}^2$ 为系统的状态向量, f

和 g 为已知的非线性函数, 对于 $x \in U_c$ 有 $g(x) > 0$, $\theta \in {}^m$ 为常值模型参数, 仅知其范围 $[\theta]$. 控制的目的是设计定性控制器, 对任何初始状态 $x(0)$, 在所有信号有界的约束下, 将状态 $x(t)$ 调节到定性平衡域. 假设 $k = (k_2, k_1)^T$ 使得多项式 $h(s) = s^2 + k_1 s + k_2$ 的根位于左半开平面上. 如果参数 θ 为精确已知, 取控制律为

$$u^* = \frac{1}{g(x)} [-f(x) - k^T x],$$

代入式(4)得

$$\ddot{y} + k_1 \dot{y} + k_2 y = 0, \quad (5)$$

取式(5)为闭环系统输出的期望曲线. 取定性控制为

$$u_q(x, [\theta]) = \frac{1}{g(\gamma)} [-f(\gamma) - k^T(\gamma)], \quad (6)$$

式中 $\gamma = [\gamma_x, \gamma_\theta]^T$, $\gamma_x \in U_c$ 为 x 对应的中值向量, $\gamma_\theta \in {}^m$ 为 $[\theta]$ 的中值向量. 假定将 $u_q(0, [\theta])$ 代入式(4)后能使 $x = 0$ 为闭环系统的平衡点. 将式(6)代入式(4), 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x, [\theta]) + g(x, [\theta]) \cdot \frac{1}{g(\gamma)} [-f(\gamma)] + \\ \quad \frac{g(x, [\theta])}{g(\gamma)} [k^T(x - \gamma_x)] + \\ \quad \frac{g(x, [\theta])}{g(\gamma)} [k^T(-x)]. \end{cases} \quad (7)$$

以下讨论自治系统式(7)在定性平衡域的定性稳定性.

首先假定函数 f 和 g 分别对 x, θ 在 $x \in U_c, \theta \in [\theta]$ 上是李普希兹连续的, 并分别有一致的李氏常数 L_f, L_g . 即

$$\begin{cases} \|f(x, \theta) - f(y, \theta)\| \leq L_f \|x - y\|, \\ \|f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)\| \leq L_f \|\theta_1 - \theta_2\|, \\ \|g(x, \theta) - g(y, \theta)\| \leq L_g \|x - y\|, \\ \|g(x, \theta_1) - g(x, \theta_2)\| \leq L_g \|\theta_1 - \theta_2\|. \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\|\cdot\|$ 取为最大范数. 以下分两步来讨论式(7)的定性稳定性问题:

1) 假设 $\theta = \theta^*$ 为精确已知时分析式(7)的定性稳定性.

对于式(8), 经过几步直接的推导, 可得

$$\begin{aligned} & |f(x) + \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} [-f(\gamma_x)] + \\ & \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} \cdot k^T \cdot (x - \gamma_x)| \leq \end{aligned}$$

$$\alpha(\gamma_x) \cdot \|x - \gamma_x\|, \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma_x) = & |L_g \cdot \frac{|f(\gamma_x)|}{g(\gamma_x)} + L_f| + \\ & \left(1 + L_g \cdot \frac{\|x - \gamma_x\|}{g(\gamma_x)}\right) \cdot \sum_{i=1}^n |k_i|, \end{aligned}$$

$$\text{取 } [k_2, k_1]^T = [2, 3]^T, \text{ 设 } \nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

$$\nabla V \text{ 的雅可比阵为 } H(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \text{ 要求 } H(x)$$

对称, 故有 $a_{12} = a_{21}$, 此时有:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = (\nabla V)^T \dot{x} = & \left(a_{11} - 3 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{12} - \right. \\ & 2 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{22} \Big) x_1 x_2 - 2 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} \cdot a_{12} x_1^2 + \\ & \left(a_{12} - 3 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{22} \Big) x_2^2 + \\ & (a_{12} x_1 + a_{22} x_2) \cdot \left\{ f(x) + \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} [-f(\gamma_x)] + \right. \\ & \left. \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} \cdot k^T \cdot (x - \gamma_x) \right\} \leq \\ & \left(a_{11} - 3 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{12} - 2 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{22} \Big) x_1 x_2 - \right. \\ & 2 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} \cdot a_{12} x_1^2 - \left(3 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{22} - a_{12} \Big) x_2^2 + \\ & |a_{12} x_1 + a_{22} x_2| \cdot \alpha(\gamma_x) \cdot \|x - \gamma_x\|. \end{aligned} \quad (10)$$

令 $a_{12} = a_{22} > 0$, 取

$$a_{11} = 3 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{12} + 2 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{22} = 5 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} a_{12}.$$

因为 $\|x - \gamma_x\|$ 为 $(x - \gamma_x)$ 的任意范数, 再假定 x_1 和 x_2 有相同的划分, 则当

1° $|x_1| > |x_2|$ 时, 若有

$$\alpha(\gamma_x) \cdot \|x - \gamma_x\| < \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} \cdot |x_1| \quad (11)$$

成立, 则 $\dot{V}(x) < 0$;

2° $|x_1| < |x_2|$ 时, 若有

$$\alpha(\gamma_x) \cdot \|x - \gamma_x\| < \frac{1}{2} \left(3 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} - 1 \right) \cdot |x_2| \quad (12)$$

成立, 则 $\dot{V}(x) < 0$;

3° $|x_1| = |x_2|$ 时, 若有

$$\begin{aligned} & \alpha(\gamma_x) \cdot \|x - \gamma_x\| < \\ & \min \left[2 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} \cdot |x_1|, \left(3 \frac{g(x)}{g(\gamma_x)} - 1 \right) \cdot |x_2| \right] \end{aligned} \quad (13)$$

成立, 则 $V(x) < 0$.

在式(11), 式(12)和式(13)中, $\alpha(\gamma_x)$, $\frac{g(x)}{g(\gamma_x)}$, $3\frac{g(x)}{g(\gamma_x)} - 1$ 都应为正数, 因此只要 $\|x - \gamma_x\|$ 充分小, 也即对状态 x 的划分足够细, 总可以使式(11), 式(12)和式(13)成立.

$$V(x) = \int_0^{x_1} a_{11}(x)x_1 dx_1 + a_{12}x_1x_2 + \frac{a_{22}}{2}x_2^2, \quad (14)$$

若取 $a_{11}(x) > \alpha \geq a_{12}$, 则可使得 $V(x) > \frac{\alpha}{2}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \frac{a_{22}}{2}x_2^2$ 为正定. 此时有约束

$$a_{11} = 5\frac{g(x)}{g(\gamma_x)}a_{12} > a_{12},$$

即

$$\frac{g(x)}{g(\gamma_x)} > 0.2, \quad (15)$$

因为 $3\frac{g(x)}{g(\gamma_x)} - 1 > 0$, 即 $\frac{g(x)}{g(\gamma_x)} > \frac{1}{3}$, 故式(15)恒成立. 总之, 当 $\theta = \theta^*$ 为精确已知时, 式(7)是定性稳定的, 如果以下条件成立: ① $a_{12} = a_{21} = a_{22} > 0$; ② $\frac{g(x)}{g(\gamma_x)} > \frac{1}{3}$; ③ $a_{11} = 5\frac{g(x)}{g(\gamma_x)}a_{12}$; ④ x_1 和 x_2 有相同的划分; ⑤ 式(11), 式(12), 式(13)分别成立. 由以上5个条件可以看出, 只要合理划分状态 x , 总可以使式(7)定性稳定.

对所有的 x , 记 $\epsilon = \min \|x - \gamma_x\|$. 由以上推导可以看出, 如果有

$$\|\theta - \theta^*\| < \epsilon, \quad (16)$$

则上述定性稳定性结论是不变的. 现在问题是, 在式(16)不满足时, 能否通过对 $u_q(t)$ 的初值 u_{q0} 的补偿 Δu 来使闭环系统式(7)定性稳定. Δu 为定性控制器在线自学习时产生的修正值.

2) $\theta \in [\theta]$ 时式(7)的定性稳定性分析.

设 γ_θ 为 $[\theta]$ 的中值, 定性控制的初值为

$$u_{q0} = \frac{1}{g(\gamma_x, \gamma_\theta)}[-f(\gamma_x, \gamma_\theta) + k^T(-\gamma_x)]. \quad (17)$$

假设 θ 取真实值 θ^* 时, 状态 x 的合理划分 $\|x - \gamma_x\|$ 可以使式(7)定性稳定, 此时

$$u_q^* = \frac{1}{g(\gamma_x, \theta^*)}[-f(\gamma_x, \theta^*) + k^T(-\gamma_x)], \quad (18)$$

那么如果 u_{q0} 的补偿值为

$$\Delta u = u_q^* - u_{q0} = \frac{-f(\gamma_x, \theta^*)}{g(\gamma_x, \theta^*)} + \frac{f(\gamma_x, \gamma_\theta)}{g(\gamma_x, \gamma_\theta)} + \frac{k^T(-\gamma_x)}{g(\gamma_x, \theta^*)} - \frac{k^T(-\gamma_x)}{g(\gamma_x, \gamma_\theta)}, \quad (19)$$

则控制 $u_q(t) = u_{q0} + \Delta u$ 可以使定性控制系统式(7)定性稳定. 由式(16)可知, Δu 不需要精确补偿为式(19), 只要能使命式(16)成立, 式(7)即可定性稳定.

由式(19)知, 对每一个定性状态 $[x]$, Δu 均为和 γ_x 有关的常数, 因此对于未知常数 $[\theta]$ 总可以通过 Δu 的补偿使式(7)定性稳定. 也就是说, 不管 $[\theta]$ 的范围如何, 只要对状态 x 的定性划分是合理的, 那么通过对控制 $u_q(t)$ 的在线学习 $u_q(t) = u_{q0} + \Delta u$, 总可以使闭环系统式(7)定性稳定. 另外, 状态 x 的定性零点的随意选择可使控制的精度得到保证.

事实上, 上述采用变量梯度法对状态划分 $\|x - \gamma_x\|$ 的约束是过于严格的, 而且有许多参数的选择具有随意性. 如果划分 $\|x - \gamma_x\|$ 不满足上述约束, 定性控制系统式(7)也未必就是定性不稳定的. 另外定性控制 u_{q0} 也未必一定要取式(6)的形式, 若取为其它的形式, 也就有不同的定性划分可使式(7)定性稳定. 但是至少我们可以得出这样一个结论: 非线性对象式(4)是可以采用定性控制器设计并能保证闭环系统定性稳定的.

以下举例来说明如何进行定性划分. 假定非线性对象为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \theta x_1^2 + u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (20)$$

式中状态变量 x_1, x_2 的论域均为 $[-1, 1]$, 控制 u 的论域为 $[-10, 10]$, 参数 $\theta = \theta^* = 0.8$ 为常数, 但仅知 θ 为定性量, $\theta \in [0.4, 0.8]$. 取 $k = [k_2, k_1]^T = [2, 3]^T$, 则闭环系统的理想曲线为 $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$, 取定性控制 $u_q = -\gamma_\theta \cdot \gamma_{x_1}^2 - 2\gamma_{x_1} - 3\gamma_{x_2}$, $\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}$ 分别为 x_1, x_2 对应的中值, $\gamma_\theta = 0.6$ 为 θ 的中值. 式(20)中 $f(x, [\theta]) = \theta \cdot x_1^2$, 取李氏常数为 $L_f = 1.6$, 则式(8)满足. $g(x, [\theta]) = 1$, 故不考虑 $g(\cdot)$ 项, 此时

$$\alpha(\gamma_x) = L_f + \sum_{i=1}^2 |k_i| = 6.6. \quad (21)$$

假定 x_1 和 x_2 有相同的划分, 则由式(11)~(13)知, 当

$$1^{\circ} \quad |x_1| > |x_2| \text{ 时, } \|x - \gamma_x\| < \frac{1}{6.6} |x_1|; \quad (22)$$

$$2^{\circ} \quad |x_1| < |x_2| \text{ 时, } \|x - \gamma_x\| < \frac{1}{6.6} |x_2|; \quad (23)$$

$$3^{\circ} \quad |x_1| = |x_2| \text{ 时, } \|x - \gamma_x\| < \frac{2}{6.6} |x_1|. \quad (24)$$

分别成立时,则定性控制闭环系统是定性稳定的。

考虑式(22)成立的情况,假设 x_1 的一个划分为 $[b, a]$, $a > b$, 若已知 a , 则由式(22)知, $\frac{a-b}{2} < \frac{b}{6.6}$, 即 $b > \frac{3.3}{4.3}a$. 以此为依据, 将 x_1 和 x_2 均不等距离划分为 23 份, 则充分条件式(22)~(24)成立, 闭环系统在定性平衡域 $X_e = \begin{bmatrix} -0.1, 0.1 \\ -0.1, 0.1 \end{bmatrix}$ 是定性稳定的. 取初值 $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 1$, 定性控制系统闭环输出 $y(t)$ 及其理想曲线分别如图 1 中曲线 a 和 c 所示. 事实上, 上述充分条件是过于严格的. 仿真表明, 只需将 x_1 和 x_2 均不等距离划分为负大、负中、负小、零、小、中、大共计 7 份, 闭环系统在 X_e 依然是定性稳定的, 闭环输出 $y(t)$ 如图 1 中曲线 b 所示. 由图中可以看出, 曲线 a, b, c 在 $x \notin X_e$ 时几乎是重合的, 即动态性能基本上是一致的.

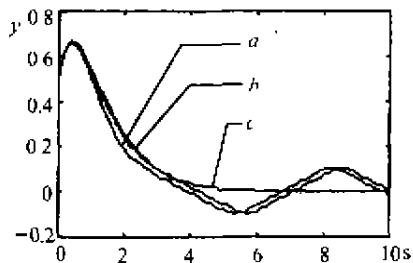


图 1 闭环系统输出

Fig. 1 Output of close-loop system

5 结论(Conclusion)

本文对形如式(1)的一类非线性对象给出了定性稳定性的定义, 并对闭环系统式(2)的定性稳定性给出一个充分性判据, 然后给出一种用变量梯度法构造李亚普诺夫函数 $V(x)$ 的步骤. 最后, 以二阶非线性对象式(4)为例, 取定性控制为式(6), 讨论了闭环系统式(7)的定性稳定性, 并得出“只要对状态 x 的划分充分小, 那么通过对控制 u 的在线学习 $u = u_{g0} + \Delta u$, 总可以使闭环定性控制系统式(7)定性稳定”的结论. 本文关于二阶非线性对象式(4)的定性稳定性的详细讨论对 n 阶非线性对象式(1)的稳定性研究有指导性意义, 对于其它类型的定性控制系统的稳定性研究也具有参考意义.

参考文献(References)

- [1] 刘林运, 万百五, 定性控制综述[J]. 信息与控制, 1998, 27(1): 46-52
- [2] 刘林运, 夏常弟, 万百五等. 基于定量模型的定性控制[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(2): 190-193
- [3] 刘林运, 夏常弟, 万百五等. 模型参数不确定的连续系统自学习定性控制[J]. 西安交通大学学报, 1998, 32(11): 4-7
- [4] Raisch J. Qualitative control with quantitative models[C]. IEE Conf. on Intelligent Systems Engineering, London, 1994, 229-234

本文作者简介

刘林运 1970 年生, 1995 年获西北工业大学自动控制系工学硕士学位, 现为西安交通大学博士生. 主要研究方向为: 智能控制, 定性控制.

万百五 1928 年生, 教授, 博士生导师. 1951 年上海交通大学电信研究所研究生毕业. 现为西安交通大学系统所大系统室主任, 主要研究方向为大系统优化递阶控制, 大系统智能控制等, 国内外发表文章 180 篇, 曾获得国家教委科技进步奖一次, 二等奖两次.

梁天培 1946 年生, 1967 年毕业于香港大学机械工程系, 而后获得香港大学硕士, 伦敦大学哲学博士和清华大学工学博士学位, 现任香港理工大学副校长及机械工程系讲座教授, 香港工程师学会前会长, 研究兴趣为自动控制, CAD 专家系统, 机器人及其控制.