

249-250, 254 广义区间动力系统的稳定性分析*

徐胜元 杨成梧

(南京理工大学动力工程学院·南京, 210094)

0231

摘要: 考虑广义区间动力系统的稳定性问题, 利用矩阵测度的有关性质, 得到了广义区间动力系统稳定的充分条件, 该充分条件保证所考虑的广义区间动力系统正则, 无脉冲且稳定。

关键词: 广义区间动力系统; 稳定; 矩阵测度

文献标识码: A

稳定性分析

On Stability Analysis of Generalized Interval Dynamic Systems

XU Shengyuan and YANG Chengwu

(School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing, 210094, P.R. China)

Abstract: In this paper, the problem of stability for generalized interval dynamic systems is considered. By utilizing some properties of matrix measures, we get sufficient conditions under which the given generalized interval dynamic system will be regular, impulse-free and stable.

Key words: generalized interval dynamic systems; stability; matrix measures

1 引言(Introduction)

近年来, 由于对参数不确定性系统鲁棒稳定性检验的需要, 使得区间动力系统的研究引起了人们的关注; 通过众多学者的努力, 区间动力系统的研究已取得了长足的进展, 各种稳定性判据被相继提出^[1-5]; 但对广义区间动力系统而言, 其研究结果还较少。

由于广义区间动力系统稳定性的分析既要考虑其稳定性又要考虑其正则性及脉冲模的存在性, 故其分析较状态空间意义下区间动力系统稳定性的分析要复杂得多。本文利用矩阵测度的有关性质, 得到了广义区间动力系统稳定的充分条件, 此充分条件保证所考虑的广义区间动力系统正则, 无脉冲且稳定。

2 主要结论(Main results)

考虑具有如下形式的广义区间动力系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1)$$

其中

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{rank } E = r \leq n,$$

且

$$A \in \alpha[B, C] = \{[a_{ij}] \mid b_{ij} \leq a_{ij} \leq c_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}, \quad (2)$$

其中

$$B = [b_{ij}], \quad C = [c_{ij}].$$

对广义区间动力系统(1), 由于 $\text{rank } E = r \leq n$, 故不失一般性, 可假设 E 具有以下形式^[7,8]

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中 I_r 是 $r \times r$ 单位阵; 事实上 E 总可通过以下坐标变换化成(3)的形式

$$(Q_1 E Q_2, Q_1 A Q_2),$$

其中 Q_1 与 Q_2 是 $n \times n$ 可逆阵。

记

$$\beta[B, C] = \{[s_{ij}] \mid s_{ij} = b_{ij}, \text{ 或 } s_{ij} = c_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}.$$

则 $\beta[B, C]$ 中共有 $m = 2^n$ 个元素。

下面考虑广义区间动力系统(1)的稳定性, 先看一种特殊情形。

定理 1 考虑广义区间动力系统

$$(\Sigma_1): \quad E_d \dot{x}(t) = A_d x(t),$$

其中

$$x(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_d = (1 - \delta)A_0 + \delta A_1,$$

这里, $\delta \in [0, 1]$, 则 (Σ_1) 正则, 无脉冲且稳定的充

* 基金项目: 南京理工大学科研发展基金资助项目。

收稿日期: 1998-05-25; 收修稿日期: 1999-01-19。

分条件是:

$$\mu(A_0) < 0 \quad \text{且} \quad \mu(A_1) < 0. \quad (4)$$

其中, $\mu(A_0)$ 与 $\mu(A_1)$ 分别表示 A_0 与 A_1 的矩阵测度.

为了证明定理 1, 先引入以下引理.

引理 1^[6] 矩阵测度 $\mu(X)$ 有如下性质:

a) $-\|X\| \leq -\mu(-X) \leq \operatorname{Re}\lambda(X) \leq \mu(X) \leq \|X\|$.

b) $\mu(X+Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$, 对任意适维阵 X, Y 都成立.

c) 若 $c \geq 0$, 则 $\mu(cX) = c\mu(X)$;

若 $c < 0$, 则 $\mu(cX) = -c\mu(-X)$.

d) $\mu(\sum_{i=1}^k k_i X_i) \leq \sum_{i=1}^k \mu(k_i X_i)$, 对任意适维阵 X_i 及实数 $k_i, i = 1, 2, \dots, k$ 成立.

e) $\mu(X) = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(X + X^T)$.

引理 2 若 M, N 是对称阵且

$$\begin{bmatrix} M & P \\ P^T & N \end{bmatrix} < 0,$$

这里 P 是适维阵; 则

a) N 可逆且 $N < 0$;

b) $M - PN^{-1}P^T < 0$.

证 由对称阵的有关性质即得所证.

引理 3 令 $N = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$, 其中 P, X, Y, Z 是给定的适维阵且 Z 可逆, $N + N^T < 0$, 则有

$$P + P^T - XZ^{-1}Y - Y^T(Z^T)^{-1}X^T < 0.$$

证 见附录.

下面证明定理 1.

证 利用引理 1 的性质 c), d) 及 (4) 得到

$$\mu(A_d) \leq (1 - \delta)\mu(A_0) + \delta\mu(A_1) < 0, \quad (5)$$

对 A_d 作与 E 相同的划分, 即

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

由引理 1 的性质 e) 及 (5) 得

$$\begin{bmatrix} A_{11} + A_{11}^T & A_{12} + A_{21}^T \\ A_{21} + A_{12}^T & A_{22} + A_{22}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

从而有

$$A_{22} + A_{22}^T < 0, \quad (8)$$

利用引理 1 的性质 e) 及 a) 得到

$$\operatorname{Re}\lambda(A_{22}) < 0,$$

因此 A_{22} 可逆.

由引理 3 及 (7) 并考虑到 A_{22} 可逆, 得

$$A_{11} + A_{11}^T - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - (A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^T < 0,$$

再次利用引理 1 的性质 e) 及 a) 得

$$\operatorname{Re}\lambda(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) < 0,$$

由上式并注意到 A_{22} 可逆, 于是根据 [8] 中的有关结论即得: (Σ_1) 正则, 无脉冲且稳定. 证毕.

下面叙述广义区间动力系统 (1) 稳定的主要结论.

定理 2 广义区间动力系统 (1) 正则, 无脉冲且稳定的充分条件是:

$$\mu(S_k) < 0, \quad 1 \leq k \leq m,$$

其中 $S_k \in \beta[B, C]$.

证 由 [3] 知, 对任意的 $A \in \alpha[B, C]$ 总存在 $r_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$, 使得

$$A = \sum_{i=1}^m r_i S_i,$$

于是, 类似于定理 1 的证明过程即得所证.

3 结论 (Conclusion)

本文利用矩阵测度的有关性质得到了使广义区间动力系统正则, 无脉冲且渐进稳定的充分条件. 本文提出的分析方法对广义不确定系统的鲁棒稳定性分析及鲁棒控制是重要的, 对此将另文叙述.

参考文献 (References)

- [1] Juang Y T and Shao C S. Stability analysis of dynamic interval systems[J]. Int. J. Contr., 1989, 49(4): 1401 - 1408
- [2] Argoun M B. On sufficient conditions for the stability of interval matrices[J]. Int. J. Contr., 1986, 44(5): 1245 - 1250
- [3] Soh C B. Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices[J]. Int. J. Contr., 1990, 51(1): 243 - 248
- [4] Wang K and Michel A N. On sufficient conditions for the stability of interval matrices[J]. Syst. Contr. Lett., 1993, 20(4): 345 - 351
- [5] Sezer M E and Siljak D D. On stability of interval matrices[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(2): 368 - 371
- [6] Desor C A and Vidyasagar M. Feedback Systems: Input-Output Properties[M]. New York: Academic Press, 1975
- [7] Wang Y, Frank P M and Clements D J. The robustness properties of the linear quadratic regulators for singular systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38(1): 96 - 100
- [8] Dai L. Singular control systems[A]. In: Lecture Notes in Control and Information Sciences[C], Vol. 118. New York: Springer, 1989
- [9] Khargonekar P P, Petersen I R and Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, 35(3): 356 - 361

boundary value problems of first-order differential systems with rectangular coefficients [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, 162(2): 482 - 493

- [5] Wang W and Liu Y Q. Monotone iterative technique for boundary value problems of second order singular differential systems [J]. J. System Science & System Engineering, 1995, 4(3): 266 - 272
- [6] 王伟, 史希福. 三阶常微分方程两点边值问题解的存在性及单调迭代法[J]. 数学学报, 1992, 35(2): 213 - 219
- [7] Owens D H and Jones R P. Iterative solution of constrained differential/algebraic systems [J]. Int. J. Control, 1987, 27(6): 957 - 974

本文作者简介

王伟 1963 年生, 1985 年和 1988 年于东北师范大学数学系获理学学士和理学硕士学位, 1996 年于华南理工大学自动控制工程系获工学博士学位, 现为华南理工大学自动控制工程系系统工程研究所讲师, 主要研究方向: 广义系统的稳定、镇定与控制, 交通工程, 管理信息系统。

杨建辉 1961 年生, 1999 年于华南理工大学自动控制工程系获工学博士学位, 现为华南理工大学工商管理学院讲师, 主要研究方向: 广义分布参数系统的镇定与控制

刘永清 见本刊 2000 年第 1 期第 8 页。

(上接第 250 页)

附录 (Appendix)

引理 3 的证明:

注意到 $N + N^T < 0$ 并利用引理 2, 得

$$Z + Z^T < 0,$$

及

$$P + P^T - (X + Y^T)(Z + Z^T)^{-1}(Y + X^T) < 0. \quad (A1)$$

令

$$H = -(Z^{-1} + (Z^T)^{-1})^{-1},$$

注意到

$$Z + Z^T < 0,$$

及

$$H = Z(-Z - Z^T)^{-1}Z^T,$$

可得

$$H > 0.$$

因此存在可逆阵 W 使得 $H = W^T W$. 于是由 [9] 得

$$\begin{aligned} & XZ^{-1}HZ^{-1}Y + Y^T(Z^T)^{-1}H(Z^T)^{-1}X^T = \\ & (XZ^{-1}W^T)(WZ^{-1}Y) + (Y^T(Z^T)^{-1}W^T)(W(Z^T)^{-1}X^T) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (XZ^{-1}W^T)(W(Z^T)^{-1}X^T) + (Y^T(Z^T)^{-1}W^T)(WZ^{-1}Y) = \\ & -X(Z + Z^T)^{-1}X^T - Y^T(Z + Z^T)^{-1}Y, \end{aligned} \quad (A2)$$

利用矩阵求逆引理得到

$$\begin{aligned} & (XZ^{-1}Y + Y^T(Z^T)^{-1}X^T) - \\ & (X + Y^T)(Z + Z^T)^{-1}(Y + X^T) = \\ & -X(Z + Z^T)^{-1}X^T - Y^T(Z + Z^T)^{-1}Y - \\ & XZ^{-1}HZ^{-1}Y - Y^T(Z^T)^{-1}H(Z^T)^{-1}X^T, \end{aligned} \quad (A3)$$

于是由 (A2) 及 (A3) 得

$$\begin{aligned} & XZ^{-1}Y + Y^T(Z^T)^{-1}X^T \geq \\ & (X + Y^T)(Z + Z^T)^{-1}(Y + X^T). \end{aligned} \quad (A4)$$

注意到 (A1) 与 (A4) 即得所证。

本文作者简介

徐胜元 1968 年生, 现为南京理工大学博士研究生, 主要研究方向为广义系统, 鲁棒控制和自适应控制。

杨成福 1936 年生, 1961 年毕业于哈尔滨军事工程学院, 现为南京理工大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为 2D 系统, 广义系统, 高速采样控制, H_∞ 控制和离散事件动态系统等。