

文章编号: 1000-8152(2000)02-0267-03

# 离散双线性系统的稳定控制分析

穆肇骊 刘 锋 邱祖廉  
(西安交通大学自动控制系·西安, 710049)

TP271.8 0231

**摘要:** 对于一般离散双线性系统, 本文提出了系统在线性反馈下的稳定性判据和最小吸引域, 并给出了一种简单的控制方案, 保证闭环系统在原点的一致渐近稳定性, 仿真结果证明了该方法的有效性, 所得稳定性判据对于选择合适的控制方案具有重要的指导意义。

**关键词:** 双线性系统; 稳定性; 渐近稳定性  
**文献标识码:** A

离散双线性系统 稳定控制 镇定性问题

## Analysis of Stabilizing Control of Discrete Bilinear System

MU Zhaoli, LIU Feng and QIU Zulian

(Department of Automatic Control, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, P. R. China)

**Abstract:** For general discrete bilinear system, this paper proposed a stability criteria which is sufficient for systems with linear feedback. The smallest attracting range is also obtained. Based on the criteria, a simple control law is proposed to guarantee the uniformly asymptotically stability of zero state. Simulation examples illustrate the effectiveness of the method. The obtained stability criteria is instructive to select suitable control scheme.

**Key words:** bilinear system; stability; asymptotically stability

### 1 引言 (Introduction)

非线性系统的稳定性控制以及镇定问题是非线性研究的重要内容, 对于连续非线性系统, 这方面取得了较多的成就, 而关于离散非线性系统, 研究更多的是基于一些特殊的非线性系统、双线性系统<sup>[1]</sup>是一类非常重要的非线性系统, 它结构简单, 与线性系统最接近, 又可以在更大的动态范围更精确地描述广泛的工业对象, 因而在非线性理论研究中得到广泛重视, 文献[2]利用 Comparable System(CS)系统提出了离散双线性系统镇定及稳定控制的一种设计方法, 得到了系统李亚普诺夫一致渐近稳定的充分条件, 但仿真实验表明由该方法得到的吸引域一般很小, 且最小范围不明确, 参数可取范围亦不易确定, 本文将给出离散双线性系统稳定控制的另一种充分条件和设计方法, 它采用线性反馈, 具有更为简单的参数选取原则和直观的最小吸引域, 从而有助于设计者选取合适的控制器。

### 2 主要结果(Main results)

**定义** 设  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ , 则

$$\|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 其元为  $a_{ij}$ , 则

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

**定理** 离散双线性系统

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) + \sum_{i=1}^p N_i X(k) u_i(k), \quad (1)$$

其中

$$X \in \mathbb{R}^n, U \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ B \in \mathbb{R}^{n \times p}, N_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, p.$$

在线性反馈

$$U(k) = SX(k), S = [s_1 \dots s_p]^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

下, 如果有  $\|A + BS\| < 1$ , 则系统(1)在原点是一致渐近稳定的, 且最小吸引域为

$$\|X(k)\| < \frac{1 - \|A + BS\|}{n \sum_{i=1}^p \|N_i\| + |s_i|}$$

证 将  $U(k) = SX(k)$  代入(1)式, 有

$$X(k+1) = AX(k) + BSX(k) + \sum_{i=1}^p N_i X(k) s_i X(k),$$

其中

$$X(k) s_i X(k) =$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_1 x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 x_n & x_2 x_n & \cdots & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{in} \end{bmatrix} = G(k) s_i^T,$$

即

$$X(k+1) = (A + BS)X(k) + \sum_{i=1}^p N_i G(k) s_i^T,$$

$$\|X(k+1)\| =$$

$$\|(A + BS)X(k) + \sum_{i=1}^p N_i G(k) s_i^T\| \leq$$

$$\|(A + BS)X(k)\| + \left\| \sum_{i=1}^p N_i G(k) s_i^T \right\| \leq$$

$$\|A + BS\| \|X(k)\| + \sum_{i=1}^p \|N_i\| \|G(k)\| \|s_i\| \leq$$

$$\|A + BS\| \|X(k)\| + n \sum_{i=1}^p \|N_i\| \|s_i\| \|X(k)\|^2.$$

由解析几何理论可知, 当  $\|A + BS\| < 1$  时, 对于

$$\|X(0)\| < \frac{1 - \|A + BS\|}{n \sum_{i=1}^p \|N_i\| \|s_i\|},$$

$\|X(k)\|$  都将在有限的  $k$  步内收敛到 0. 从而系统在原点是一致渐近稳定的, 且最小吸引域为

$$\|X(k)\| < \frac{1 - \|A + BS\|}{n \sum_{i=1}^p \|N_i\| \|s_i\|}.$$

定理得证.

定理对于闭环系统稳定域的估计是很保守的. 一般情况下, 系统的实际收敛域将远大于定理给出的范围. 定理的指导意义在于给出了在线性反馈下最小收敛域的量化指标, 从而初步判定实际系统在运行中的稳定性, 决定是否需要采用更复杂的非线性控制方案.

### 3 仿真结果 (Simulation results)

#### 例 1 离散双线性系统

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) + NX(k)u(k),$$

这里

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

令

$$u(k) = SX(k) = [s_1 \quad s_2]X(k),$$

则

$$A + BS = \begin{bmatrix} 0.2 - 0.3s_1 & 0.6 - 0.3s_2 \\ 0.4 + 0.4s_1 & 0.4 + 0.4s_2 \end{bmatrix}.$$

如果取

$$s_1 = 1, \quad s_2 = -0.6,$$

则有

$$\|A + BS\| = 0.94 < 1,$$

根据定理, 系统在原点是一致渐近稳定的. 图 1 的仿真结果证实了方法的有效性.

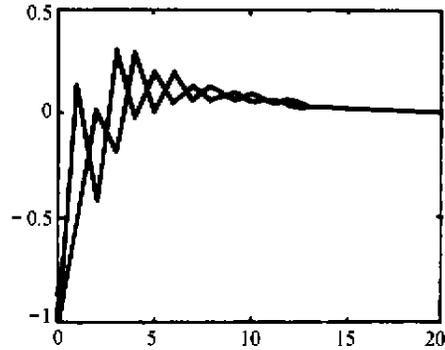


图 1 状态输出  $X(k)$

Fig. 1 States output  $X(k)$

#### 例 2 离散双线性系统

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) + NX(k)u_1(k),$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为  $A$  的特征值为 1 和 -3, 所以相应的线性系统是不稳定的, 同时该系统也不满足文献[3]给出的离散双线性系统稳定条件.

如果取

$$S = \begin{bmatrix} -0.45 & 0.6 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix},$$

则

$$\|A + BS\| = 0.95 < 1,$$

图 2 的仿真曲线说明, 在该线性控制律下闭环系统

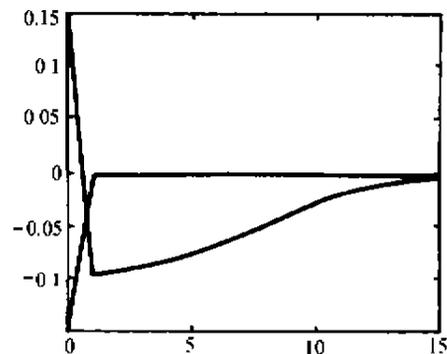


图 2 状态输出  $Y(k)$

Fig. 2 States output  $Y(k)$

在原点是一致渐近稳定的。

#### 4 结论(Conclusion)

本文提出的离散双线性系统稳定控制判据和 design 方法,设计简便,判断容易,特别适合于系统在小范围内工作的情况,可以利用简单低廉的线性反馈获得稳定的控制效果,具有一定的工业实用意义。

#### 参考文献(References)

- [1] 华向明. 双线性系统建模与控制[M]. 上海:华东化工学院出版社,1990

- [2] Stepanenko Y and Yang X. Stabilization analysis of discrete nonlinear systems[J]. Int. J. Control, 1995, 61(6):1313-1326  
 [3] Yang X et al. Stability of discrete bilinear systems with output feedback[J]. Int. J. Control. 1989,52(1):135-158

#### 本文作者简介

穆肇慧 1973年生. 西安交通大学自动控制系博士生. 主要研究方向为现代控制理论与智能控制。

刘 锋 1970年生. 西安交通大学自动控制系博士生. 主要研究方向为混沌理论和智能控制。

邱祖廉 1937年生. 西安交通大学自动控制系教授. 博士生导师. 主要研究方向为大滞后系统,神经网络技术,智能控制等。

(上接第 266 页)

又由(41)知  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = 0$ . 证毕.

#### 4 结论(Conclusion)

非线性随机离散系统收敛性分析的核心就是利用 Boutayeb M 的方法,引进未知矩阵  $\alpha_k, \beta_k$  评价模型的线性性. 构造等式  $\alpha_{k+1}e_{k+1} = H_{k+1}\bar{x}_{k+1/k}, \bar{x}_{k+1/k} = \beta_k F_k \bar{x}_k$ , 替代了线性例子收敛性分析中的近似式,  $e_{k+1} \approx H_{k+1}\bar{x}_{k+1/k}, \bar{x}_{k+1/k} \approx F_k \bar{x}_k$ . 在对  $R_k, Q_k$  加约束的情况下,得到了它的局部收敛性。

#### 参考文献(References)

- [1] Liung L. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr.

tr., 1979, AC-24(1):36-50

- [2] Song Y and Grizzle J W. The extended Kalman filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems[J]. J. Math. Syst. Estim. Contr., 1995, 5(1):59-78  
 [3] Boutayeb M, Rafaralahy H and Dorouach M. Convergence analysis of the extended Kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997, AC-42(4):581-586  
 [4] 陈翰馥. 离散时间的递推估计与随机控制[M]. 北京:科学出版社,1980

#### 本文作者简介

宋志勇 1974年生. 1996年于华中师范大学数学系获理学学士学位. 现为中国科学院武汉物理与数学研究所应用数学专业硕士研究生. 研究兴趣为非线性控制理论及其应用。