文章编号：1000-8152(2000)02-0286-05

286-290

非参数控制系统的预测二次稳定性研究

李阳春 许晓鸣 何 星 TP273 O231
(上海交通大学自动化系·上海,200030)

摘要：首次提出预测二次稳定性概念，利用有界不确定对象的非参数模型描述和预测状态反馈，研究了系统预测二次稳定性(predictive quadratic stability, PQS)成立的充分条件，给出了确定反馈阵的LMIs(linear matrix inequalities)，并从理论上给出了严格证明，讨论了存在I/O约束系统PQS成立的充分条件，证明了具有PQS稳定性对象的闭环全局稳定性，从理论上解决了一类建模简单，易于实现的预测控制系统的鲁棒稳定性问题。

关键词：非参数不确定模型；预测状态反馈；预测二次稳定性；LMIs；全局稳定性
文献标识码：A

The Study of Predictive Quadratic Stability of Nonparameter Control System

LI Yangchun, XU Xiaoming and HE Xing
(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University·Shanghai, 200030, P.R.China)

Abstract: The concept of predictive quadratic stability (PQS) is proposed for the first time. The sufficient conditions of the PQS of nonparameter plant with bounded uncertainty are proved theoretically in this paper. LMIs is used to describe these conditions. At the same time, the PQS sufficient conditions of plant constrained by I/O saturation is presented. Moreover, the PQS means the global robust stability of nonparameter plant. After all, the robust stability problem of predictive control system which is easy to model and convenient to realize is solved theoretically.

Key words: nonparameter uncertain model; predictive state feedback; predictive quadratic stability; LMIs; global robust stability

1 引言(Introduction)

文献[1]分析过由非参数模型$\{a_1,\cdots,a_N\}$描述的系统的性质，其中$a_i, i=1,\cdots,N$为对象的阶跃响应，这种讨论，尤其对预测控制系统闭环稳定性和鲁棒稳定性等性质的讨论并不彻底，许多作者基于状态空间模型和ARMAX模型得到了不少系统稳定性和鲁棒性结果[2~5]，这些结果不能直接用于分析非参数模型$\{a_1,\cdots,a_N\}$描述的控制系统的性质。

Kothare[5]用LMIs统一处理对象不确定性与输入输出饱和约束，Garcia[6]和Petersen[7]分别研究了结构不确定对象的二次稳定性问题，这类问题把闭环系统的鲁棒稳定性条件转化成矩阵不等式，可以进一步转化为求解LMIs的问题，本文采用[5]的设计思路，把[6,7]讨论二次稳定性的方法，引进预测控制系统设计，提出了预测二次稳定性(PQS)概念，讨论了由非参数模型$\{a_1+\Delta a_1,\cdots,a_N+\Delta a_N\}$描述的系统的PQS及闭环鲁棒性，其中$\Delta a_i, i=1,\cdots,N$的存在是因为建模过程存在外界干扰，检测误差，截断误差等原因，同时研究了存在I/O饱和约束的不确定系统的PQS。

2 模型描述及相关定义(Model description and relative definition)

若不计最小化，可以得到非参数模型$\{a_1+\Delta a_1,\cdots,a_N+\Delta a_N\}$的状态空间实现[1]

$$\begin{cases} x(k+1)=Sx(k)+(a+\Delta a)\Delta u(k), \\ y(k)=c^{\mathrm T}x(k). \end{cases} \tag{2.1}$$

其中

$$S=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N\times N}, \quad a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{N\times 1},$$

$$c^{\mathrm T}=[1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]_{1\times N}.$$

这是考虑到系统阶跃响应模型受到实验条件、检测

收稿日期：1998-06-29；收修改稿日期：1999-06-23.

手段、外界干扰以及截尾误差等因素的影响，得到的状态空间实现. 在(2.1)中，模型不依赖于对象的结构，仅与对象的阶跃响应有关. 其中 Δa 是一个不确定向量. 记 $F = \{\Delta a : \Delta a^{\mathrm{T}}\Delta a \leqslant 1\}$，则 F 描述了标称阶跃响应与所有实测阶跃响应之间满足一定条件的对象不确定性描述.

相应于(2.1)的自治系统为

$$\begin{cases} x(k+1) = Sx(k), \\ y(k) = c^{\mathrm{T}}x(k). \end{cases}$$

容易导出:

$$x_i(k) = c^{\mathrm{T}}S^{i-1}x(k) = y(k+i-1), \quad i = 1,\cdots,N.$$

$x_i(k)$ 是 $k+i-1$ 时刻的初始预测输出，可把 $x(k)$ 称为"初始预测状态". 对于非自治系统，系统的预测输出与初始预测输出之间存在一个增量. 分别以 $x(k+i \mid k)$, $y(k+i \mid k)$ $(i>0)$ 表示在时刻 k 对 $k+i$ 时刻的状态和输出的预测. 为了更好地把握系统在优化过程中的预测性质，本文需要引入如下概念:

定义 1 称系统(2.1)是预测二次稳定(PQS)的，如果存在预测状态反馈控制律 $\Delta u(k+i) = K(k)x(k+i \mid k)$, $i \geqslant 0$，正定对称阵 $P_k \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 和常数 $\alpha_k > 0$ 使得下面不等式成立:

$$\begin{aligned} &L(x(k+i \mid k),k,i) = \\ &x^{\mathrm{T}}(k+i \mid k)\{[S+(a+\Delta a)K(k)]^{\mathrm{T}}P_k[S+ \\ &(a+\Delta a)K(k)] - P_k\}x(k+i \mid k) \leqslant \\ &-\alpha_k \| x(k+i \mid k) \|^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

对所有 $(x(k+i \mid k),i) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 和 $\Delta a \in F$.

本文把闭环鲁棒稳定性作为"优化"目标，并不考虑一般意义上的目标函数. 从更广泛的意义上来说，矩阵不等式(2.2)就是系统的"目标函数".

命题 记 $A = S + (a+\Delta a)K(k)$，若系统(2.1)具有 PQS 性质，则系统 $x(k+i+1 \mid k) = Ax(k+i \mid k)$ 渐近稳定.

证 由系统预测二次稳定，则对所有 $(x(k+i \mid k),i) \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$$\begin{aligned} &x^{\mathrm{T}}(k+i+1 \mid k)P_kx(k+i+1 \mid k) - \\ &x^{\mathrm{T}}(k+i \mid k)P_kx(k+i \mid k) \leqslant \\ &-\alpha_k \| x(k+i \mid k) \|^2. \end{aligned}$$

依次取 $i = 0,\cdots,L$，并把各不等式相加，得到:

$$\begin{aligned} &\alpha_k \sum_{i=0}^{L} \| x(k+i \mid k) \|^2 \leqslant \\ &x^{\mathrm{T}}(k)P_kx(k) - x^{\mathrm{T}}(k+L+1 \mid k)P_kx(k+L+1 \mid k) \leqslant \\ &x^{\mathrm{T}}(k)P_kx(k), \end{aligned}$$

其中

$$x(k \mid k) = x(k).$$

令上式中 $L \to \infty$，则:

$$\alpha_k \sum_{i=0}^{\infty} \| x(k+i \mid k) \|^2 \leqslant x^{\mathrm{T}}(k)P_kx(k),$$

级数 $\sum_{i=0}^{\infty} \| x(k+i \mid k) \|^2$ 收敛，从而

$$\lim_{i\to\infty} \| x(k+i \mid k) \|^2 = 0,$$

系统渐近稳定. 证毕.

3 主要结果(Main results)

本文的结论以矩阵不等式表示，有必要作如下说明:

1) A, B 为对称阵. $A > B$ 表示对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，使得 $x^{\mathrm{T}}(A-B)x > 0$. 对 $A \geqslant B$，将相应的 $>$ 换成 $\geqslant$.

2) 线性矩阵不等式或 LMI 是形如

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=0}^{l} x_iF_i > 0$$

的矩阵不等式[8]. 其中 $x_1,\cdots,x_l$ 是变量，$F_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称.

3) (Schur 补，[8]). 假设 $Q(x) = Q(x)^{\mathrm{T}}$, $R(x) = R(x)^{\mathrm{T}}$ 和 $S(x)$ 仿射地依赖于 x，则 LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^{\mathrm{T}} & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{3.1}$$

等价于矩阵不等式

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^{\mathrm{T}} > 0 \tag{3.2}$$

或

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)^{\mathrm{T}}Q(x)^{-1}S(x) > 0. \tag{3.3}$$

利用(3.1)~(3.3)的等价关系，可以得到本文的主要结论. 本文的讨论分两种情况:

a) 无约束 SISO 对象的 PQS;

b) 约束 SISO 对象的 PQS.

定理 1 系统(2.1)可用状态反馈控制律 $\Delta u(k+i) = K(k)x(k+i \mid k)$, $K(k) = Y_kQ_k^{-1}$, $i \geqslant 0$，实现 PQS 的充分条件是: $\exists$ 矩阵 $Q_k > 0$, $(Y_k)_{1\times N}$, $\varepsilon_k > 0$ 使得线性矩阵不等式组成立:

$$\begin{bmatrix} Q_k & Y_k^{\mathrm{T}} & Q_kS^{\mathrm{T}} + Y_k^{\mathrm{T}}a^{\mathrm{T}} \\ Y_k & \varepsilon_k & 0 \\ SQ_k + aY_k & 0 & Q_k - \varepsilon_kI \end{bmatrix} > 0. \tag{3.4}$$

证 由(3.1)~(3.4)及 $Q_k > 0$，易知

$$Q_k - \varepsilon_k^{-1}Y_k^{\mathrm T}Y_k - (Q_kS^{\mathrm T} + Y_k^{\mathrm T}a^{\mathrm T})\cdot (Q_k - \varepsilon_kI)^{-1}(SQ_k + aY_k) > 0.$$

(3.4)的正定性保证了 $Q_k - \varepsilon_k^{-1}Y_k^{\mathrm T}Y_k > 0$, 再次利用(3.1)~(3.3)的等价关系,下式成立

$$\begin{bmatrix} Q_k - \varepsilon_k^{-1}Y_k^{\mathrm T}Y_k & -(Q_kS^{\mathrm T} + Y_k^{\mathrm T}a^{\mathrm T}) \\ -(SQ_k + aY_k) & Q_k - \varepsilon_kI \end{bmatrix} > 0. \tag{3.5}$$

(3.5)可以展开成关于 ε_k 的矩阵不等式

$$\varepsilon_k\begin{bmatrix} 0 & \\ & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_k & Q_kS^{\mathrm T} + Y_k^{\mathrm T}a^{\mathrm T} \\ SQ_k + aY_k & -Q_k \end{bmatrix} + \varepsilon_k^{-1}\begin{bmatrix} Y_k^{\mathrm T}Y_k & \\ & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{3.6}$$

不等式(3.6)成立,意味着对 $\forall X \in {}^{2N}$

$$\Delta = \left(X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} -Q_k & Q_kS^{\mathrm T} + Y_k^{\mathrm T}a^{\mathrm T} \\ SQ_k + aY_k & -Q_k \end{bmatrix}X\right)^2 - 4X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} 0 & \\ & I \end{bmatrix}X \cdot X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} Y_k^{\mathrm T}Y_k & \\ & 0 \end{bmatrix}X > 0$$

或

$$\left(X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} -Q_k & Q_kS^{\mathrm T} + Y_k^{\mathrm T}a^{\mathrm T} \\ SQ_k + aY_k & -Q_k \end{bmatrix}X\right)^2 > 4X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} 0 & \\ & I \end{bmatrix}X \cdot X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} Y_k^{\mathrm T}Y_k & \\ & 0 \end{bmatrix}X \geqslant \max_{\Delta a \in F}\left(X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} 0 & Y_k^{\mathrm T}\Delta a^{\mathrm T} \\ \Delta aY_k & 0 \end{bmatrix}X\right)^2.$$

由(3.4)成立,易知

$$\begin{bmatrix} -Q_k & Y_k^{\mathrm T}a^{\mathrm T} + Q_kS^{\mathrm T} \\ SQ_k + aY_k & -Q_k \end{bmatrix} < 0,$$

于是

$$X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} -Q_k & Y_k^{\mathrm T}a^{\mathrm T} + Q_kS^{\mathrm T} \\ SQ_k + aY_k & -Q_k \end{bmatrix}X \leqslant -\max_{\Delta a \in F}\left|X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} 0 & Y_k^{\mathrm T}\Delta a^{\mathrm T} \\ \Delta aY_k & 0 \end{bmatrix}X\right| \leqslant -X^{\mathrm T}\begin{bmatrix} 0 & Y_k^{\mathrm T}\Delta a^{\mathrm T} \\ \Delta aY_k & 0 \end{bmatrix}X,$$

$$\forall X \in {}^{2N},\quad \Delta a \in F.$$

于是

$$\begin{bmatrix} -Q_k & Y_k^{\mathrm T}(a+\Delta a)^{\mathrm T} + Q_kS^{\mathrm T} \\ SQ_k + (a+\Delta a)Y_k & -Q_k \end{bmatrix} < 0,\quad \forall a \in F. \tag{3.7}$$

由于 $Q_k > 0$, (3.1)~(3.3)的等价关系,(3.6)等价于

$$Q_k - [Y_k^{\mathrm T}(a+\Delta a)^{\mathrm T} + Q_kS^{\mathrm T}]Q_k^{-1}[SQ_k + (a+\Delta a)Y_k] > 0,$$

对上式左乘 Q_k^{-1},右乘 Q_k^{-1} 不改变矩阵不等式的正定性.整理得

$$Q_k^{-1} - [(a+\Delta a)K(k) + S]^{\mathrm T}Q_k^{-1}[S + (a+\Delta a)K(k)] > 0, \tag{3.8}$$

在(2.2)中令 $P_k = Q_k^{-1}$,则上式保证系统预测二次稳定性,且 $K(k) = Y_kQ_k^{-1}$. 证毕.

注 1 定理1把系统(2.1)的预测 PQS 成立的条件归结到求解 LMIs 的问题,是考虑到 LMIs 已有成熟的数值解法,如 MATLAB 的 LMI Box.

注 2 定理1仅讨论了无约束系统的 PQS,即 $\exists P_k = Q_k^{-1}$,使得

$$x(k+i+1 \mid k)^{\mathrm T}P_kx(k+i+1 \mid k) - x(k+i \mid k)^{\mathrm T}P_kx(k+i \mid k) < 0,\quad i \geqslant 0. \tag{3.9}$$

对于约束非参数系统的讨论,相当于在定理1的条件上附加了输入输出的约束条件.

记

$$K = \{(Y,Q) \mid Q, Y \text{ 满足定理 1 的条件}\},$$

则约束系统的可行集是 K 的子集.

类似于文献[5]对饱和约束条件的处理,非参数不确定系统(2.1)的输入增量约束和输出约束可以由 LMIs 保证:

a) 输入增量约束条件 $|\Delta u(k+i)| \leqslant D_{\Delta u}$ 由如下 LMI

$$\begin{bmatrix} Q_k & Y_k^{\mathrm T}x(k \mid k)^{\mathrm T} \\ x(k \mid k)Y_k & D_{\Delta u}^2Q_k \end{bmatrix} > 0 \tag{3.10}$$

保证;

b) 输出约束 $|y(k+i)| \leqslant D_y$ 由 LMI

$$\begin{bmatrix} Q_k & cx(k \mid k)^{\mathrm T} \\ x(k \mid k)c^{\mathrm T} & D_y^2Q_k \end{bmatrix} > 0 \tag{3.11}$$

保证.

(3.10)和(3.11)给出了系统输入增量约束和输出约束的充分条件.相对于原约束来说,具有一定的保守性,但在计算实现上有成熟的算法,便于实现.由约束条件(3.10)和(3.11),以及定理1的条件,可以得到约束系统(2.1)PQS 成立的充分性定理:

定理 2 约束非参数系统(2.1)可用预测状态反馈控制律 $\Delta u(k+i) = K(k)x(k+i \mid k)$, $K(k) = Y_kQ_k^{-1}$, $i \geqslant 0$ 实现 PQS 的充分条件是:$\exists$ 矩阵 $Q_k > 0$, $(Y_k)_{1\times N}$, $\varepsilon_k > 0$ 使得 LMIs 成立:

$$\text{a)}\begin{bmatrix} Q_k & Y_k^{\mathrm T} & Q_kS^{\mathrm T}+Y_k^{\mathrm T}a^{\mathrm T}\\ Y_k & \varepsilon_k & 0\\ SQ_k+aY_k & 0 & Q_k-\varepsilon_k I\end{bmatrix}>0;$$

$$\text{b)}\begin{bmatrix} Q_k & Y_k^{\mathrm T}x(k\mid k)^{\mathrm T}\\ x(k\mid k)Y_k & D_{\Delta u}^2Q_k\end{bmatrix}>0;$$

$$\text{c)}\begin{bmatrix} Q_k & cx(k\mid k)^{\mathrm T}\\ x(k\mid k)c^{\mathrm T} & D_y^2Q_k\end{bmatrix}>0.$$

证　若充分条件成立，即 $\exists\, Q_k>0,(Y_k)_{1\times N},\varepsilon_k>0$，使得 a),b),c) 成立. 由 a) 成立，则 $K(k)=Y_kQ_k^{-1}$ 使(2.2)成立，PQS 性质得以保证，于是(3.9)成立. 由 b),c)成立及(3.9)保证了系统约束条件满足.　证毕.

系统的 PQS 性质，对于整个受控时间段来说，与每个当前时刻有着密切的联系. 随着时刻的变化，相应的 PQS 的性质表现在衰减速率等方面也可能发生变化. 它反映了当前时刻系统预测输出及其稳定性的可能发展趋势，是一种局部性质. 定理 1、定理 2 建立了对 $\Delta a\in F$ 的最坏估计的系统设计，这种局部性质反映了一种基于“Worst-Case”的预测性质. 系统的真实状态是各种可能状态中的一种，也应当满足如(2.2)的不等式. 因此，系统的 PQS 性质也是全局性质.

记

$$K(k)=\{(Y_k,Q_k)\mid Q_k,Y_k\ \text{满足定理 1、定理 2 的条件}\},\tag{3.12}$$

由前面的讨论易知，对

$\forall(Y_k,Q_k)\in K(k),\forall(Y_k,Q_k)\in K(k+1)$，于是

$$K(k)\subseteq K(k+1),\tag{3.13}$$

因此，如果存在某个 $K(k_0)$ 非空，取相应的矩阵 Q_{k_0},Y_{k_0}，以及预测状态反馈控制律 $u(k)=Y_{k_0}Q_{k_0}^{-1}$. 根据前面的命题，容易得到系统的 PQS 保证了系统的全局鲁棒稳定性.

4　仿真举例(Simulation example)

假设对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{5.72\mathrm e^{-2s}}{60s+1},$$

取采样周期为 $T=7$，离散化上述连续对象，可以得到对象的脉冲响应序列 $\{g_1\ \cdots\ g_{35}\}$ 或阶跃响应 $\{a_1\ \cdots\ a_{35}\}$. 这里采用 $\{a_1\ \cdots\ a_{35}\}$，对应有输入增量序列

$$\{\Delta u(k-1)\ \cdots\ \Delta u(k-34)\ \ u(k-35)\}.$$

考虑到对象受到干扰，存在截尾误差. 在实际的过程中，把可能的误差向量和干扰量分解到对应

$$\{\Delta u(k-1)\ \cdots\ \Delta u(k-34)\ \ u(k-35)\}$$

的组合中，相当于在 $\{a_1\ \cdots\ a_{35}\}$ 上附加了一个不确定量 $\{\Delta a_1\ \cdots\ \Delta a_{35}\}$. 可以构造形如(2.1)的状态空间描述. 当 $\{\Delta a_1\ \cdots\ \Delta a_{35}\}$ 满足约束要求，下面分两种情况进行仿真：

1) 无约束非参数系统 LMIs 算法(图 1)；

2) 约束非参数系统(图 2)，其中约束为 $|\Delta u|\leqslant 5$，$|y|\leqslant 5$.

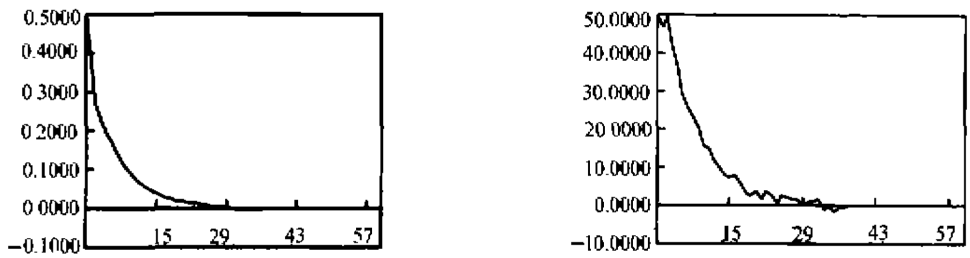

图 1　无约束LMIs算法. 其中 $\Delta u(1)=0.5$, $y(1)=50$

Fig. 1　The LMIs algorithm without constraints.where $\Delta u(1)=0.5$, $y(1)=50$

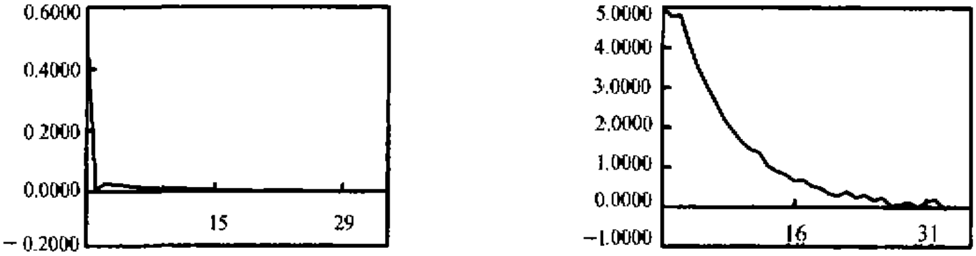

图 2　约束LMIs算法. 其中 $\Delta u(1)=0.5$, $y(1)=50$

Fig. 2　The LMIs algorithm with constraints.where $\Delta u(1)=0.5$, $y(1)=50$

上述两种情况的仿真表明闭环系统具有很好的鲁棒稳定性.并且预测二次稳定本身的特点决定了系统状态快速收敛的特点.LMI求解问题是一种具有多项式时间的内点算法,在一定程度上能够满足算法的实时性.

5 结束语(Conclusion)

本文首次提出了预测二次稳定性(PQS)概念、利用LMIs技术,讨论了约束与无约束参数系统(2.1)PQS成立的充分条件.通过把输入增量约束和输出约束转化为LMIs,与无约束的充分条件构成了对约束非参数系统的处理.本文的讨论最终建立在求解LMIs问题的基础上,这是一类已有成熟解法的技术.虽然PQS从定义上来说描述的是系统局部性质,但是,由于本文基于"Worst-Case"的设计思想,PQS同时也反映了系统的全局性质.

本文以系统的PQS性质作为设计目标,没有涉及调节与跟踪等一些极其重要的问题.对于这些问题的研究也在进行中.

参考文献(References)

[1] 席裕庚.预测控制[M].北京:国防工业出版社,1993,36-43

[2] Genceli H and Nikolaou M. Robust stability analysis of constrained l_1-norm model predictive control[J]. AIChE J., 1993,39(12):1954-1965

[3] Gossner J R, Kouvaritakis B and Rossiter J A. Stable generalized predictive control with constraints and bounded disturbances[J]. Automatica, 1997,33(4):551-568

[4] Kouvaritakis B, Rossiter J A and Ju G J. Robust stable generalized predictive control[J]. Int. J. Control, 1997,67(3):411-434

[5] Kothare M V, Balakrishnan V and Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996,32(10):1361-1379

[6] Garcia G, Bernussou J and Arzelier D. Robust stabilization of discrete-time linear system with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. Systems & Control Letters, 1994, 22:327-339

[7] Petersen I R and Pickering M R. An algorithm for the quadratic stabilization of uncertain system with structured uncertainty of the one-block type[J]. Dynamics and Control, 1996,6:111-130

[8] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E and Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory[C]. SIAM, Philadelphia, 1994

本文作者简介

李阳春 1970年生.上海交通大学自动化研究所博士研究生.目前研究兴趣为预测控制、鲁棒控制.

许晓鸣 1957年生.博士生导师,现为上海交通大学教授.研究领域为预测控制、智能机器人、智能控制等.

何 星 1969年生.博士,现为上海交通大学自动化系副教授.研究领域为智能控制等.