

文章编号: 1000-8152(2000)02-0296-04

296-299

多采样率数字控制系统的函数空间模型*

肖建 TP2B

(西南交通大学电气工程学院·成都, 610031)

摘要: 采用函数空间的方法, 利用提升(lifting)技术, 构造出多采样率数字控制系统的函数空间模型. 该线性时不变离散模型同时描述了被控对象在采样点上和采样点之间的动态行为. 根据这种模型所设计的多采样率数字控制系统, 有望克服目前多采样率数字控制系统所存在的采样点之间存在有纹波或振荡等弊病, 为多采样率数字控制系统的分析与综合提供了一个新的方法.

关键词: 多采样率数字控制系统; 函数空间; 线性系统

文献标识码: A

函数空间模型

Function Space Model of Multirate Digital Control Systems

XIAO Jian

(School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031, P.R. China)

Abstract: Using function space methods and lifting techniques, this paper proposes a function space model of multirate digital control systems. This time-invariant discrete-time model can describe both sampling instant and inter-sample behavior of the continuous plant. The controller synthesized based on this model, may eliminate ripples and oscillations between the sampling instants of the current multirate digital control systems. This model affords a new way for multirate digital control system analysis and synthesis.

Key words: multirate digital control systems; function space; linear systems

1 引言(Introduction)

计算机采样控制系统或称数字控制系统, 目前已广泛应用于国民经济各个领域. 在数字控制系统的分析与综合中, 我们通常都假定系统在其所有的采样点上均以相同的速率同时进行采样. 然而, 在很多时候, 要求控制系统在各处用同样的速率进行采样是不实际的, 甚至是不可能的. 在这样一些情况下, 必须采用多采样率数字控制系统. 多采样率数字控制系统的另一个显著特点是: 它是一个周期时变系统, 可以实现许多单采样率数字控制系统所不具备的或难以实现的控制功能, 如强镇定、同时镇定、分散控制、改善系统鲁棒性等. 因此, 采用多采样率的数字控制系统的分析与设计, 近年来得到了广泛的研究^[1-6].

采用提升(lifting)技术, 文[2]得出了多采样率数字控制系统的时不变模型. 但是, 这样所得的模型, 只反映了系统在采样点上的行为, 根据它所设计的控制系统通常在采样点之间存在纹波或振荡^[7]. 另外, 这样离散化了的被控对象模型有可能与原被

控对象有着较大的差异, 如最小相位系统的被控对象的离散化模型可能是非最小相位的.

本文采用函数空间的方法^[8], 利用两类不同的提升(lifting)技术, 构造出多采样率数字控制系统的函数空间模型. 它同时考虑了被控对象在采样点上和采样点之间的动态行为. 这种包含了被控对象在采样点之间的动态行为的系统模型, 具有线性时不变离散系统的形式, 从而可以利用许多传统分析和设计方法, 完成多采样率数字控制系统的分析与设计. 根据这种模型所设计的多采样率数字控制系统, 有望克服目前多采样率数字控制系统所存在的采样点之间存在有纹波或振荡等弊病, 从而为多采样率数字控制系统的研究和实际系统的设计开辟了一条新路.

2 主要结果(Main results)

考虑图 1 所示的多采样率数字控制系统.

其中 Σ_c 为连续时间的被控对象; Σ_d 为离散时间的数字控制器; r 为系统参考输入; y 为系统输出; $e = r - y$ 为系统误差向量.

* 基金项目: 国家自然科学基金(69774024)资助课题.

收稿日期: 1998-10-05; 收修改稿日期: 1999-07-15.

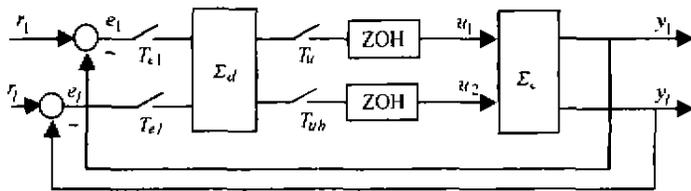


图 1 多采样率数字控制系统
Fig. 1 Multirate digital control system

数字控制器 Σ_d 输出 u 的采样周期为 $T_w = q_w T$, $j = 1, \dots, h$; 数字控制器 Σ_d 输入 e 的采样周期为 $T_{e_j} = q_{e_j} T, j = 1, \dots, l$. T 称为基本采样周期, 整个系统各采样周期均为 T 的整数倍. 令 q 为 q_w 和 q_{e_j} 的最小公倍数. 称 $T_0 = qT$ 为帧周期, 它是整个系统的循环周期.

令 L_N^p 为 N 维 p 方可积函数构成的 Banach 空间, $1 \leq p \leq \infty$; 为方便起见, 在不易混淆的前提下, 简记 L_N^p 为 L^p . 记 L_c^p 为 L^p 的扩展^[9]. 令 l_x 为在 Banach 空间 X 中取值的序列空间, 即:

$$l_x := \{ \{ f_i \}, f_i \in X, \forall i \}.$$

定义提升变换 $W_h: L_c^p[0, \infty) \rightarrow L_c^p[0, h]$ 为:

$$W_h: f \mapsto \{ f_k \}_{k=1}^{\infty},$$

$$f_k(\theta) = f((k-1)h + \theta), \quad 0 < \theta \leq h.$$

(1)

即 W_h 将 f 变成一个序列, 该序列中的元素 f_k 在区间 $((k-1)h, kh]$ 内与 f 完全一致. 换句话说, 提升 W_h 将定义在整个实轴的函数 $f(t)$ 分解成长度为 h 的无穷个小段, 每个小段重现限制于相应区间的 f . 显然, W_h 是一对一的线性变换.

设连续时间的线性时不变被控对象 Σ_c 由以下状态方程描述:

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{X}(t) = A_c X(t) + B_c u(t), \\ y(t) = C_c X(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中的 $X(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^s$ 和 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的状态变量, 输出变量和输入变量.

对 Σ_c 中的状态变量 $X(t)$, 输出变量 $y(t)$ 和输入变量 $u(t)$, 分别进行提升变换 W_T , 其中 T 为基本采样周期, 可以得到 $X_{kT}(\theta), y_{kT}(\theta)$ 和 $u_{kT}(\theta)$ 如(1)式所定义, 其中下标 T 是为了强调采样周期为 T .

由方程(2)可得

$$X_{(k+1)T}(\theta) = e^{A_c \theta} X_{kT}(T) +$$

$$C_c^T = [C_c(0) \quad C_c(T)A_c(0) \quad \dots \quad C_c((q-1)T)A_c((q-2)T) \quad \dots \quad A_c(0)]^T,$$

$$B_c = [A_c((q-1)T) \quad \dots \quad A_c(T)B_c(0) \quad A_c((q-1)T) \quad \dots \quad A_c(2T)B_c(T) \quad \dots \quad B_c((q-1)T)].$$

$$\int_0^\theta e^{A_c(\theta-\tau)} B_c d\tau u(kT),$$

$$y_{kT}(\theta) = C_c X_{kT}(\theta). \quad (3)$$

引入以下算子:

$$F: l_{L_c^p}[0, T] \rightarrow l_{L_c^p}[0, T]: X(\theta) \mapsto e^{A_c \theta} X(T), \quad (4)$$

$$G: l_{L_c^p}[0, T] \rightarrow l_{L_c^p}[0, T]: u(kT) \mapsto$$

$$\int_0^\theta e^{A_c(\theta-\tau)} B_c d\tau u(kT), \quad (5)$$

$$M: l_{L_c^p}[0, T] \rightarrow l_{L_c^p}[0, T]: X(\theta) \mapsto C_c X(\theta), \quad (6)$$

则方程(2)可以简写为:

$$\Sigma_c: \begin{cases} X_{k+1} = FX_k + Gu(kT), \\ Y_k = MX_k. \end{cases} \quad (7)$$

显然, 方程(7)和方程(2)同样均为连续时间线性时不变被控对象 Σ_c 的状态方程描述. 不同的是, 方程(2)是连续时间状态方程, 而方程(7)则为具有离散时间状态方程形式的函数空间描述.

由于 e 和 u 的多采样率特性, 数字控制器 Σ_d 是以 T_0 为周期的线性时变离散时间系统:

$$\Sigma_d: \begin{cases} W_{(k+1)T_0} = A_d(kT)W_{kT} + B_d(kT)e_{kT}, \\ u_{kT} = C_d(kT)W_{kT}. \end{cases} \quad (8)$$

其中, 下标中的 T 表示它是以 T 为采样周期的; 而 $e_{kT} := e_{kT}(T)$ 是误差向量 $e_{kT}(\theta) := y_{kT}(\theta) - r_{kT}(\theta)$ 在采样点上的值.

定义扩展向量:

$$E_{kT_0} = \begin{bmatrix} e_{kT_0} \\ e_{kT_0+T} \\ \vdots \\ e_{kT_0+(q-1)T} \end{bmatrix}, \quad U_{kT_0} = \begin{bmatrix} u_{kT_0} \\ u_{kT_0+T} \\ \vdots \\ u_{kT_0+(q-1)T} \end{bmatrix}.$$

可以得到关于数字控制器 Σ_d 的线性时不变状态空间描述:

$$\Sigma_d: \begin{cases} W_{(k+1)T_0} = A_e W_{kT_0} + B_e E_{kT_0}, \\ U_{kT_0} = C_e W_{kT_0} + D_e E_{kT_0}. \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$A_e = A_d((q-1)T) \quad \dots \quad A_d(0),$$

$$D_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_d(T)B_d(0) & 0 & \cdots & 0 \\ C_d(2T)A_d(T)B_d(0) & C_d(2T)B_d(T) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_d((q-1)T)A_d((q-2)T)\cdots B_d(0) & C_d((q-1)T)A_d((q-3)T)\cdots B_d(T) & \cdots & C_d((q-1)T)B_d((q-1)T) \end{bmatrix}$$

类似地,对被控对象 Σ_c 引入扩展向量

$$Y_{kT_0}(\theta) = \begin{bmatrix} y_{kT_0}(\theta) \\ y_{kT_0+T}(\theta) \\ \vdots \\ y_{kT_0+(q-1)T}(\theta) \end{bmatrix},$$

$$R_{kT_0}(\theta) = \begin{bmatrix} r_{kT_0}(\theta) \\ r_{kT_0+T}(\theta) \\ \vdots \\ r_{kT_0+(q-1)T}(\theta) \end{bmatrix},$$

以及

$$E_{kT_0}(\theta) = R_{kT_0}(\theta) - Y_{kT_0}(\theta),$$

显然有(9)式中的 $E_{kT_0} = E_{kT_0}(T)$. 利用 $Y_{kT_0}(\theta)$ 和 U_{kT_0} , 由(7)式可以得出在多采样率情况下,被控对象 Σ_c 的函数空间模型:

$$\Sigma_c: \begin{cases} X_{(k+1)T_0}(\theta) = F_e Y_{kT_0}(\theta) + G_e U_{kT_0}, \\ Y_{kT_0}(\theta) = M_e X_{kT_0}(\theta) + N_e U_{kT_0}. \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$F_e = F^q,$$

$$G_e = [F^{q-1}G \quad F^{q-2}G \quad \cdots \quad G],$$

$$M_e^T = [M \quad MF \quad \cdots \quad MF^{q-1}]^T,$$

$$N_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ MG & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ MFG & MG & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ MF^{q-2}G & MF^{q-3}G & MF^{q-4}G & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

命题 1 $I + N_e D_e$ 是 $L^2_{0,k}$ 内的可逆算子.

证 直接计算可得

$$I + N_e D_e = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ \xi_{21} & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \cdots & I \end{bmatrix}. \quad (11)$$

其中

$$\xi_{21} = MGC_d(T)B_d(T),$$

$$\xi_{q1} = MF^{q-3}GC_d(2T)A_d(T)B_d(0) + \cdots + MGC_d((q-2)T)A_d((q-3)T)\cdots B_d(0),$$

$$\xi_{q2} = MF^{q-3}GC_d(2T)B_d(T) + \cdots +$$

$$MGC_d((q-2)T)A_d((q-4)T)\cdots B_d(T),$$

显然, $\xi_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, q, j < i$, 均为有界算子.

令

$$\alpha = (I + N_e D_e)\beta, \quad (12)$$

其中

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_q]^T,$$

$$\beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_q]^T,$$

成立

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad (13)$$

$$\alpha_2 = \xi_{21}\beta_1 + \beta_2, \quad (14)$$

\vdots

$$\alpha_q = \xi_{q1}\beta_1 + \xi_{q2}\beta_2 + \cdots + \xi_{q,q-1}\beta_{q-1} + \beta_q. \quad (15)$$

若 $\alpha = 0$, 则由(13)式可得 $\beta_1 = 0$, 由(14)式可得 $\beta_2 = 0$, 依次类推, 最后可由(15)式可得 $\beta_q = 0$. 即当且仅当 $\beta = 0$ 时成立 $\alpha = 0$. 根据文[10]的定理 2.6-10, 命题成立. 证毕.

利用(9)与(10)式, 可以得到闭环系统的状态方程为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_{(k+1)T_0}(\theta) \\ W_{(k+1)T_0} \end{bmatrix} = A_{cl} \begin{bmatrix} X_{kT_0}(\theta) \\ W_{kT_0} \end{bmatrix} + B_{cl} R_{kT_0}, \\ Y_{kT_0}(\theta) = C_{cl} \begin{bmatrix} X_{kT_0}(\theta) \\ W_{kT_0} \end{bmatrix} + D_{cl} R_{kT_0}. \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} F_e - G_e D_e \Delta^{-1} M_e & G_e C_e - \Delta^{-1} N_e C_e \\ B_e \Delta^{-1} M_e & A_e - B_e \Delta^{-1} N_e C_e \end{bmatrix},$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} G_e D_e - \Delta^{-1} N_e D_e \\ B_e - B_e \Delta^{-1} N_e C_e \end{bmatrix},$$

$$C_{cl} = [\Delta^{-1} M_e \quad \Delta^{-1} N_e C_e],$$

$$D_{cl} = \Delta^{-1} N_e D_e, \quad \Delta = I + N_e D_e,$$

(16)式即为多采样率数字控制系统的函数空间模型. 在这一模型中, 虽然由于要描述被控对象在整个采样周期内的动态行为, 使得状态变量是无穷维的, 从而得到的是一个无穷维的系统. 但是, 整个函数空

间模型具有线性时不变离散时间系统的形式,更重要的是,它描述了多采样率数字控制系统输出在包括在采样点上和采样点之间的整个连续时间域上的动态特性,可以说是对包含连续时间被控对象和离散时间控制系统在内的多采样率数字控制系统的完整描述。

3 结论(Conclusion)

对于线性时不变连续时间被控对象,若采用多采样率数字控制器,则闭环系统是一个周期时变系统。对于这一系统,以往的文献中采用提升技术而得到的线性时不变模型,只能描述系统输出在采样点上的动态行为。本文采用函数空间的方法,利用先后两次不同的提升技术,得到了多采样率数字控制系统的函数空间模型。该线性时不变离散系统模型从本质上同时描述了被控对象在采样点上和采样点之间的动态行为,从而为多采样率数字控制系统在采样点之间的纹波或振荡的分析以及控制系统综合提供了一个新的有力工具。

利用这一模型实现极点配置、无纹波鲁棒跟踪系统、鲁棒控制等控制系统的设计,将是下一步的研究目标。

参考文献(References)

- [1] Araki M. Recent development in digital control theory[C]. Proc. IFAC 12th World Congress, Sydney, 1993, 4; 251 - 260
- [2] Araki M and Yamamoto K. Multivariable multirate sampled-data sys-

- tems; state space description, transfer function characteristics, and Nyquist criterion[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(2); 145 - 154
- [3] Berg M C, Armit M and Powell J D. Multirate digital control system design[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33(12); 1139 - 1150
- [4] AL-Rahmani H M and Franklin G F. A new optimal multirate control of linear periodic and time-invariant systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(4); 406 - 415
- [5] Chen T and Qiu L. H_{∞} design of general multirate sampled-data control systems[J]. Automatica, 1994, 30(7); 1139 - 1152
- [6] 肖建. 多采样率数字控制系统的输出反馈特征结构配置[J]. 控制与决策, 1996, 11(5); 596 - 600
- [7] Feuer A and Goodwin G C. Generalized sample hold functions - frequency domain analysis of robustness, sensitivity and intersample difficulties[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(11); 1042 - 1047
- [8] Yamamoto Y. A function space approach to sampled data control systems and tracking problems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-33(12); 703 - 713
- [9] Zames G. On the input-output stability of time-varying nonlinear systems. Part I; conditions using concepts of loop gain, conicity, and positivity[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1966, AC-11(1); 228 - 238
- [10] 欧文·克雷斯基格著, 蒋正新等译. 泛函分析导论及应用[M]. 北京: 北京航空学院出版社, 1987

本文作者简介

肖建 1950年生, 1989年于西南交通大学获博士学位, 现为西南交通大学教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机控制系统, 鲁棒控制和电传动系统控制技术。