文章编号: 1000-8152(2000)02-0306-03

306-308

推广的 KYP 性质及其在 H_∞ 方法中的应用

杨峻松 O231
(青岛大学数学系·青岛, 266071)

摘要: 通过研究 γ-无源耗散系统与 H_∞ 方法之间的联系, 给出了具有推广的 KYP 性质的非线性控制系统, 是全局渐近稳定的结论.

关键词: γ-无源耗散系统; 广义 KYP 性质; H_∞ 方法 控制理论
文献标识码: A

The Generalied Properties of KYP and Its Applications in H_∞ Method

YANG Junsong
(Department of Mathematics, Qingdao University · Qingdao, 266071, P.R.China)

Abstract: This paper study relation between the γ-passive systems and H_∞ method, introduced generalized properties of KYP. Provided the possibility for solve $V(x)$, and proved the nonlinear control systems with generalized properties of KYP is globally asymptotically stable.

Key words: γ-passive dissipative systems; generalized properties of KYP; H_∞ method

1 引言(Introduction)

80 年代以来, 在控制理论中 H_∞ 方法得到了很大的发展. H_∞ 方法克服了传统控制器设计中没有考虑控制输入的"代价"这一缺点, 使控制器的设计进一步完善起来. 然而, 利用 H_∞ 方法也使控制器的设计变得更加复杂, 特别是在非线性控制系统中, 利用 H_∞ 方法将导致求解所设的 Hamilton-Jacob-Bellman 方程的问题, 这种方程的求解一般比较困难. 为了克服这一困难, 我们从 H_∞ 方法与 γ-无源耗散理论的联系中发现, 利用耗散理论的 KYP 性质, 可以使问题的解决变的比较容易. 本文给出了一种广义的 KYP 性质, 利用这种性质可以解决某些具有 L_2 增益的非线性控制器的设计问题.

2 预备知识(Preliminary)

2.1 无源耗散系统与 KYP 性质(Passive dissipative system and property of KYP)

考虑如下一个光滑的非线性系统

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x).\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, y \in Y \subset \mathbb{R}^p$ 分别为系统的状态、控制输入及输出, 而 f 及由 m 个列 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 构成的 g 均为光滑向量场. h 为光滑映射.

定义 2.1[1,2] 具有供给率 $S(t) = y^{\mathrm{T}}u$ 的系统 (2.1) 被称作无源耗散, 如果存在一个 c^1 类非负函数 $V(x)$ 则称作系统的储能函数, 使得对于一切允许控制 $u \in U$ 及 $x_0 = x(t_0) \in X$, 有

$$V(x(t)) \leqslant V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t} S(t)\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

或写成微分形式:

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t} \leqslant S(t) \tag{2.3}$$

成立. 其中 $x(t)$ 是系统(2.1)的轨线.

不等式(2.2)或(2.3)被称为耗散不等式. 下面我们给出 KYP(Kalman-Yacubovitch-Popov)性质的定义:

定义 2.2[1,2] 我们说系统(2.1)具有 KYP 性质, 即对于供给率为 $S = y^{\mathrm{T}}u$ 的系统(2.1). 如果存在一个 c^1 类的非负储能函数 $V(x): x \to \mathbb{R}, V(0) = 0$. 使得对于一切 $x(t) \in X$ 有关系式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}g(x) = h(x)\end{cases} \tag{2.4}$$

收稿日期: 1998-05-21; 收修改稿日期: 1999-03-24.

成立.

现在将无源耗散系统的概念及 KYP 性质加以推广.给出具有 L_2 增益的耗散系统的概念及推广的 KYP 性质.

定义 2.3 系统(2.1)被称作是具有小于或等于 γ 的 L_2 增益的耗散系统.如果该系统具有供给率:

$$S(t) = \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2 \tag{2.5}$$

以及储能函数 $V(x)\geqslant 0, V(0) = 0$. 并且沿着(2.1)的轨迹满足耗散不等式

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2. \tag{2.6}$$

定义 2.4 我们说供给率为 $S(t) = \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2$ 的系统(2.1),具有广义的 KYP 性质:如果存在一个 c^1 类的非负储能函数 $V(x); x \to \mathbb{R}$, $V(0) = 0$,使得沿着(2.1)的轨迹 $x(t)\in X$ 满足不等式组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant -2h^{\mathrm{T}}(x)h(x),\\ \dfrac{\partial V}{\partial x}g(x) = 2\gamma h^{\mathrm{T}}(x).\end{cases} \tag{2.7}$$

若系统(2.1)具有广义的 KYP 性质,那么我们就可以给出非线性 H_∞ 控制系统的一种比较简单的解法.

下面我们先研究 γ-耗散系统与 H_∞ 控制系统之间的联系.

3 H_∞ 方法与 γ-耗散系统的联系(The realation between H_∞ method and γ-passive systems)

对于一个广义的非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,u,\omega),\\ z = h(x,u,\omega),\\ y = g(x,\omega),\end{cases}$$

其中

$x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^{m_1}, w\in\mathbb{R}^{m_2}, z\in\mathbb{R}^{p_1}, y\in\mathbb{R}^{p_2}$

分别表示系统的状态、控制输入、外部输入、受控输出和量测信号.

非线性 H_∞ 控制问题是寻找控制律 c,使得闭环系统当 $\omega = 0$ 时渐近稳定,且对于 $\forall T\geqslant 0, \omega(t)\in L_2[0,T]$, 关系式

$$\int_0^T\|z(t)\|^2dt \leqslant \gamma^2\int_0^T\|\omega(t)\|^2dt$$

成立.

由 Willems 的动态耗散理论可知, L_2 增益有限性只是将供给率取为 $\gamma^2\|\omega(t)\|^2 - \|z(t)\|^2$ 时耗散性的特例,因而 Willems 的耗散性理论在非线性 H_∞ 问题的研究中具有重要的作用.

在我们所讨论的问题中,我们将供给率 $S(t)$ 取为:

$$S(t) = \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2.$$

用耗散不等式

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2$$

来取代 H_∞ 控制问题中的最优性能指标.这样就将 H_∞ 控制问题与 γ-耗散系统联系起来了.

对于我们所讨论的系统,我们有如下定理:

定理 3.1 对于系统

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t),\\ y(t) = h(x(t)).\end{cases}$$

设

$$x(0) = 0,\quad f(0) = 0,\quad h(0) = 0,$$

关于供给率

$$S(t) = \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2,$$

若该系统具有推广的 KYP 性质,则对于该系统而言的 H_∞ 问题是可解的.

证 对于系统 Σ,构造 Hamillon 函数

$$H(x,y,u,\frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + g(x)u] - \gamma^2\|u\|^2 + \|y\|^2,$$

显然, $H(x,y,u\dfrac{\partial V}{\partial x})$ 是一个关于 u 的二次多项式.

令 $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$,求得 $u = u^* = \dfrac{1}{2\gamma^2}g^{\mathrm{T}}(x)\dfrac{\partial V}{\partial x}$,

$$\begin{aligned}&H^*(x,y,\frac{\partial V}{\partial x}) = \\ &H(x,y,u^*,\frac{\partial V}{\partial x}) = \\ &\frac{\partial V}{\partial x}f(x) + \frac{1}{4\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}g(x)g^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x} + y^{\mathrm{T}}y,\end{aligned} \tag{3.1}$$

从而 Hamilton 函数可以改写成

$$H'(x,y,u,\frac{\partial V}{\partial x}) = H^*(x,y,\frac{\partial V}{\partial x}) - \gamma^2\|u-u^*\|^2. \tag{3.2}$$

由于系统 Σ 具有广义的 KYP 性质:即存在有 c^1 类非负函数 $V(x)$, $V(0) = 0$, 使关系式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant -2h^{\mathrm{T}}(x)h(x),\\ \dfrac{\partial V}{\partial x}g(x) = 2\gamma h^{\mathrm{T}}(x)\end{cases}$$

成立.将它们代入(3.1)式,就有

$$H^*(x,y,\frac{\partial V}{\partial x}) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x) + \frac{1}{4\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}g(x)g^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x} + y^{\mathrm{T}}y \leqslant 0 \tag{3.3}$$

成立.从而有：$H(x,y,u,\frac{\partial V}{\partial x}) \leqslant 0$成立.

也即：耗散不等式

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t} \leqslant \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2$$

成立.所以对于系统Σ而言，H_∞问题是可解的.

进一步研究可以发现，具有广义KYP性质的闭环反馈系统是全局渐近稳定的，从以下定理可以导出.

定理 3.2 非线性控制系统Σ，若具有广义的KYP性质，并且关于初始条件 $x(t)=0$，是零状态可检测的，则闭环反馈系统是全局渐近稳定的，且具有小于或等于 γ 的 L_2 增益.

证 若系统Σ具有广义的KYP性质，即存在有 c^1 类非负函数 $V(x):X\to\mathbb{R}$，且 $V(0)=0$，使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant -2h^{\mathrm{T}}(x)h(x),\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial x}g(x) = 2\gamma h^{\mathrm{T}}(x),\end{cases}$$

则不等式(3.3)成立，即

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x) + \frac{1}{4\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}g(x)g^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x} + y^{\mathrm{T}}y \leqslant 0.$$

显然，我们若取

$$u = \frac{1}{2\gamma^2}g^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x} = \frac{1}{\gamma}y$$

时，系统是全局渐近稳定的.不等式(3.3)成立，也意味着耗散不等式

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t} \leqslant \gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2, \quad V(0)=0$$

成立.在[0, T]上，积分上述不等式有

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leqslant \int_0^T(\gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2)\mathrm{d}s,$$

若系统关于初始条件 $x(0)=0$ 是零状态可检测的，令 $T\to+\infty$ 可得：

$$\int_0^{+\infty}\|y\|^2\mathrm{d}s \leqslant \gamma^2\int_0^{+\infty}\|u\|^2\mathrm{d}s,$$

这表明，该系统具有小于或等于 γ 的 L_2 增益.

4 例子(Example)

考虑非线性控制系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4x_1^3-3x_1x_2\\ -x_1^2-x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x_1\\ 1\end{pmatrix}u,$$

$$y = 2x_1^2 + x_2,$$

令 $\gamma=1$，由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant -2h^{\mathrm{T}}(x)h(x),\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial x}g(x) = 2h^{\mathrm{T}}(x),\end{cases}$$

有

$$\begin{cases}(\dfrac{\partial V}{\partial x_1},\dfrac{\partial V}{\partial x_2})\begin{pmatrix}2x_1\\ 1\end{pmatrix} = 2(2x_1^2+x_2),\\[2mm] (\dfrac{\partial V}{\partial x_1},\dfrac{\partial V}{\partial x_2})\begin{pmatrix}-4x_1^3-3x_1x_2\\ -x_1^2-x_2\end{pmatrix} \leqslant -2(2x_1^2+x_2)^2.\end{cases}$$

我们将“$\leqslant$”取为“=”，解得

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 2x_2,$$

由 $V(0)=0$ 得

$$V(x) = (x_1^2 + x_2^2),$$

若取 $u=-y$ 则

$$\dot{V} = -4(2x_1^2+x_2)^2 < 0,$$

所以系统是渐近稳定的.

5 结束语(Conclusion)

本文推出了广义的KYP性质，利用这种性质，简化了求解 $V(x)$ 的困难.

参考文献(References)

[1] Bonnard B et al. Analysis of Controlled Dynamical Systems[M]. Boston: Birkhaser Boston, 1991, 118 - 133

[2] Byrnes C, Isidori A and Willems J C. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 36: 1228 - 1240

[3] Willems J C. Dissipative dynamical systems (I), (II)[J]. Arch. Rational Mechanics and Analysis, 1972, 45: 321 - 393

本文作者简介

杨峻松 1943年生.1966年大学本科毕业,1981年西北工业大学应用数学系硕士研究生毕业,1982年～1986年三机部第631研究所任工程师.现为青岛大学理工学院数学系副教授.研究方向为控制理论.