文章编号：1000－8152(2001)01－0051－04

线性离散状态空间的最优 l_∞ 控制器设计*

刘　翔　王文海　孙优贤
（浙江大学工业控制技术研究所，工业控制技术国家重点实验室·杭州，310027）

沈　军
（青山纸业股份有限公司·福建三明，365506）

摘要：基于开环零点，利用状态反馈性质，导出求取满足最优 l_∞ 误差序列的一个插值条件．由最优误差序列得到闭环系统的马尔可夫参数，从而求取最优闭环极点，然后，应用一般的极点配置方法解出最优反馈矩阵．仿真分析验证了本文的结果．

关键词：状态反馈；马尔可夫参数；l_∞ 优化；线性规划

文献标识码：A

Optimal l_∞ Controller Design for Linear Discrete-Time State Space Model

LIU Xiang，　WANG Wenhai　and　SUN Youxian
(National Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University·Hangzhou,310027,P.R.China)

SHEN Jun
(Qinshan Paper Mill·Fujian Sanming,365506,P.R.China)

Abstract: Using the properties of state feedback, an interpolation condition for optimal l_∞ error sequence is developed based on the open loop zeros. By the optimal sequence, the optimal Markov parameters for the closed-loop system can be achieved which bring out the optimal closed-loop poles. Then, the optimal feedback martix is obtained by employing the standard pole placement approach. The effectiveness of the design method is confirmed by simulation.

Key words: state feedback; Markov parameter; l_∞ optimization; linear programming

1　引言(Introduction)

l_1 理论应用于系统设定值输出响应的幅值控制始于文献[1,2]，运用的优化方法是无穷维对偶线性规划的方法，控制模型是被控对象的 z 传递函数．文献[3]采用解有限维线性规划原问题的方法，设计了具有最优动态性能的鲁棒镇定控制器，同时证明了这种满足最优动态性能的最优跟踪控制器也是鲁棒稳定控制器的结论．本文将这种方法应用到线性离散系统的状态空间模型，即设计出最优状态反馈控制，使系统输出响应在指定的调节时间内跟踪误差信号的 l_∞ 范数最小．

2　基本的定义及定理(Fundamental definition and theorem)

给定一个右实序列 $x=(x(k))_{k=0}^{\infty}$，定义 z 变换：$\hat{x}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x(k)z^i$．按此定义，一个稳定的实有理系统的所有特征值均在单位圆外．

线性离散系统的状态方程为：

$$x_{k+1}=Ax_k+bu_k. \tag{1}$$

输出方程为：

$$y_k=cx_k+du_k. \tag{2}$$

其中，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$b\in\mathbb{R}^{n\times 1}$，$c\in\mathbb{R}^{1\times n}$，$d\in\mathbb{R}$；$[A\quad b]$ 能达，$[A\quad c]$ 能观．

为简化分析，规定系统的所有零、极点均为相异实根，且零点为 $\{z_i\}_{i=1}^{m}$ ($z_i\neq 1$)，其中，位于单位圆内的不稳定零点为 $\{z_i\}_{i=1}^{m_1}$，系统的开环极点为 $\{p_i\}_{i=1}^{n}$．为保证系统阶跃响应静态无差，当系统开环极点中不含 $p=1$ 的极点时，需在系统中添加一个极点 $p_{n+1}=1$，组成如下增广系统：

$$\bar{x}_{k+1}=\begin{bmatrix}A & b\\ \bar{0} & 1\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}\bar{0}\\ 1\end{bmatrix}v_k, \tag{3}$$

$$\bar{y}_k=[c\quad 0]\bar{x}_k+dv_k. \tag{4}$$

因为对于所有的 λ，$\begin{bmatrix}\lambda I-A & -b & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1\end{bmatrix}$ 满秩，由 PBH 判据得出增广系统是能控的，又因为 $[A\quad b]$ 能达，所以 A 阵是非奇异的，即 $\begin{bmatrix}A & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 也

* 基金项目：国家自然科学基金(69635010)资助项目．
收稿日期：1998－11－09；收修改稿日期：2000－01－19．

是非奇异的，因此，增广系统也是能达的. 同样的方法可以验证增广系统也是能观的.

设计状态反馈控制:

$$u_k = Kx_k + lr_k, \tag{5}$$

使闭环系统渐近稳定(对增广系统状态反馈控制为: $v_k = K\bar{x}_k + lr_k$)，且满足:

1) 阶跃响应的调节时间 $T_s < N$, N 为有限正整数，即 $e(k) = r_r - y_k = 0, k \geqslant N$;

2) 误差序列 $\{e(k)\}_{k=0}^{\infty}$ 的 l_∞ 范数 $\|\hat{e}\|_\infty$ 最小.

r_r 是阶跃信号的幅值($r_r \neq 0$)，输入信号 r_k 也可以是其它确定信号，如方波信号、正弦信号等.

定理 1 若式(5)的状态反馈控制使系统(1)、(2)渐近稳定，则系统阶跃响应输出的误差序列 $\hat{e}$ 满足不稳定零点插值条件:

$$\hat{e}(z_i) = \frac{r_r}{1 - z_i}, \ i = 1,\cdots,m_1.$$

证 按 z 变换定义，应用反馈控制律(5)，系统闭环传递函数为:

$$\hat{G} = (c + dK)[z^{-1}I - (A + bK)]^{-1}bl + dl.$$

误差传递函数:

$$\hat{e} = \{I - (c + dK)[z^{-1}I - (A + bK)]^{-1}bl - dl\}\hat{r},$$

$$\hat{r} = \frac{r_r}{1 - z}.$$

因为状态反馈不改变系统的零点位置，且渐近稳定的闭环系统只能有稳定的零、极点对消，所以对于所有的系统开环不稳定零点，

$$\hat{G}(z_i) = (c + dK)[z_i^{-1}I - (A + bK)]^{-1}bl + dl = 0, \quad i = 1,\cdots,m_1.$$

所以 $\hat{e}(z_i) = \hat{r}(z_i) = \dfrac{r_r}{1 - z_i}, \ i = 1,\cdots,m_1.$

3 最优 l_∞ 控制器设计(Optimal l_∞ controller design)

设闭环系统阶跃响应的误差序列为: $\hat{e} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} e_i z^i$，当要求调节时间 $T_s < N$(N 为有限正整数)时，则 $\hat{e} = \sum\limits_{i=0}^{N-1} e_i z^i$.

令

$$x_{\max} = \|\hat{e}\|_\infty, \tag{6}$$

$$x_i = e_i, \ i = 0,1,\cdots,N-1. \tag{7}$$

由于系统能达，所以，对于位于单位圆外稳定的零点，可配置相同位置的极点对消之.

定理 2 若可达可观系统(1)、(2)(或(3)、(4))是最小相位的，则实现阶跃响应最优 l_∞ 状态反馈无静差控制的闭环极点为:

$$\lambda_i = \begin{cases} z_i, & i = 1,\cdots,m, \\ \infty, & i = m+1,\cdots,n. \end{cases}$$

证 分两种情形:

1) $m = n$.

此时，由于所有闭环极点与零点实现完全对消，闭环系统等价为一个比例系统，适当选择状态反馈(5)中的 l 阵，使得

$$\lim_{z\to 1}(c + dK)[z^{-1}I - (A + bK)]^{-1}bl + dl = I, \tag{8}$$

从而得到

$$\hat{e} = \{I - (c + dK)[z^{-1}I - (A + bK)]^{-1}bl - dl\}\hat{r} = 0,$$

即 $\|\hat{e}\|_\infty = 0$，达到 l_∞ 最小.

2) $m < n$.

因为 $m < n$，所以总有 $d = 0$.

选择 K 阵，使得闭环极点完全对消系统的零点，其余在无穷远处；选择 l 阵，满足 $\lim\limits_{z\to 1}c[z^{-1}I - (A + bK)]^{-1}bl = I$，则系统的阶跃响应误差序列为:

$$\hat{e} = \{I - c[z^{-1}I - (A + bK)]^{-1}bl\}\hat{r} = \{I - Iz^{n-m}\}\hat{r},$$

所以

$$\|\hat{e}\|_\infty = |r_r|.$$

当选择其他位置的极点时，在零初始状态下，

$$y_0 = cx_0 = 0,$$

即

$$e_0 = r_r - y_0 = r_r.$$

由于 $\hat{e} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} e_i z^i$，所以此时总有 $\|\hat{e}\|_\infty \geqslant |r_r|$.

对于非最小相位系统，由于状态反馈不能改变其零点位置，所以，应用定理 1，对于所有使闭环系统渐近稳定的状态反馈(5)，能使系统阶跃响应满足性能指标的最优误差序列 $\hat{e}^*$，可由如下满足不稳定零点插值条件的线性规划问题求解:

$$\min x_{\max}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{N-1} x_i z_j^i = \dfrac{r_r}{1 - z_j}, \ j = 1,\cdots,m_1, \\ x_i - x_{\max} \leqslant 0, \ i = 0,\cdots,N-1, \\ -x_i - x_{\max} \leqslant 0, \ i = 0,\cdots,N-1, \\ -x_{\max} \leqslant 0. \end{cases} \tag{9}$$

定理 3 线性规划问题(9)有解的充分必要条件是: $N \geqslant m_1$.

证明可参考一般的优化原理专著. 解线性规划

问题(9)得到最优 l_∞ 误差序列 $\hat{e}^* = \sum_{i=0}^{N-1} e_i^* z^i$.

定理 4　线性规划问题(9)的最优 l_∞ 误差序列 $\hat{e}^* = \sum_{i=0}^{N-1} e_i^* z^i$,可以由状态反馈完全实现的充分必要条件是:$m_1 \leqslant N \leqslant n$.

证　在零初始状态的条件下,闭环系统的阶跃响应误差序列又可表达为:

$$e_k = r_k - y_k = r_r - c' \sum_{j=0}^{k-1} A_L^{(k-1-j)} bl r_r - dl r_r. \tag{10}$$

其中,$k = 1, \cdots, N-1$,$[A_L, bl, c', dl]$ 是序列 $\hat{e}^*$ 的一个最小实现,$c' = c + dK$.

由式(10)得到最优闭环系统 Markov 参数:

$$\begin{cases} dl = (r_r - e_0^*)/r_r, \\ h_0 = c'bl = (r_r - e_1^* - dlr_r)/r_r, \\ h_1 = c'A_L bl = (e_1^* - e_2^*)/r_r, \\ \qquad \vdots \\ h_{N-2} = c'A_L^{N-2} bl = (e_{N-2}^* - e_{N-1}^*)/r_r, \\ h_{N-1} = c'A_L^{N-1} bl = e_{N-1}^*/r_r \neq 0, \\ h_j = 0,\ j \geqslant N. \end{cases} \tag{11}$$

这里,$h_{N-1} \neq 0$,否则调节时间可缩短.由 Markov 参数可求得零阶 Hankel 矩阵:

$$T_0 = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-1} \\ h_1 & h_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{N-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank} T_0 = N$,所以能够完全得到最优序列 $\hat{e}^*$ 的最小实现的系统阶次也是 N.因为状态反馈不增加系统阶次,且虽然系统是能达能观的,闭环极点可任意配置,但需满足线性规划问题(9)中的所有不稳定零点的插值条件,即定理 3 中的 $N \geqslant m_1$,所以当且仅当系统阶次 $n \geqslant N \geqslant m_1$ 时,状态反馈可以完全实现线性规划问题(9)的最优 l_∞ 解.类似地,可证非零初始状态的情形.

定理 4 说明,当 $N > n$ 时,通过状态反馈只能实现近似最优 l_∞ 解.其方法是,由 Markov 参数可求得 $N-n+m-m_1, N-n+m-m_1+1$ 阶 Hankel 矩阵:

$$\begin{cases} T_{N-n+m-m_1} = \begin{bmatrix} h_{N-n+m-m_1} & \cdots & \cdots & h_{N-1} \\ h_{N-n+m-m_1+1} & \vdots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ h_{N-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\ T_{N-n+m-m_1+1} = \begin{bmatrix} h_{N-n+m-m_1+1} & \cdots & h_{N-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ h_{N-1} & \iddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{12}$$

应用直接求取最小实现的 Ho-Kalman 方法,可以解得闭环系统最小实现的 A_L.需要说明的是,选择 $N-n+m-m_1, N-n+m-m_1+1$ 阶 Hankel 矩阵,一方面是为了计算方便,更主要的是为了充分体现系统响应的衰减性能.$d = 0$ 时,可以先由

$$c = [1\quad 0] T_{N-n} L \tag{13}$$

得到一个适当的 $n \times n$ 阶满秩阵 L,再由

$$KT_{N-n}L = I_n \tag{14}$$

解得 K 阵,然后由

$$A_L = KT_{N-n+1}L \tag{15}$$

解得 A_L 阵.

最后,由

$$\alpha(z^{-1})\det(z^{-1}I - A_L) = \det(z^{-1}I - A - bK) \tag{16}$$

求得最优 l_∞ 状态反馈阵 K,$\alpha(z^{-1})$ 是由所有位于单位圆外的稳定的开环零点组成的首一多项式.由

$$h_0 = cbl \tag{17}$$

求得 l 阵.

$d \neq 0$ 时,则直接应用 Ho-Kalman 方法求解,此情形下,

$$l = (r_r - e_0^*)/r_r d. \tag{18}$$

4　仿真结果(Simulation results)

不稳定的非最小相位的线性离散系统:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k,$$
$$y_k = [1\quad 2] x_k,$$

系统输出为零初始状态.性能指标要求:系统单位阶跃响应的过渡过程不超过 2 个采样周期,稳态无差,且输出误差序列的 l_∞-范数 $\|\hat{e}\|_\infty$(等介于超调量和负超调的绝对值)最小.

Step 1　由可达可观性判据,得到系统是可达可观的.

使$\begin{bmatrix}(z^{-1}-2) & -1 & 0\\ 0 & (z^{-1}-1) & 1\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$降秩的系统开环零点：$z=2/3$.

Step 2 按性能指标要求，构成线性规划问题：

$$\min x_{\max}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{1}x_i(2/3)^i=3,\\ x_i-x_{\max}\leqslant 0,\quad i=0,1,\\ -x_i-x_{\max}\leqslant 0,\ i=0,1,\\ -x_{\max}\leqslant 0.\end{cases}$$

零初始状态下，$x_0=1$，因此解得 $\hat{e}^*=1+3z$；

Step 3 得到0阶、1阶 Hankel 矩阵：

$$T_0=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix},\ T_1=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Step 4 按修正的 Ho-Kalman 方法解得：

$$A_L=\begin{bmatrix}3.0 & 1.5\\ -6.0 & 3.0\end{bmatrix},$$

即最优闭环系统有两个位于无穷远处的特征根 $\lambda_1^{-1}=\lambda_2^{-1}=0$.

Step 5 按式(16)解得：$K=[-4\quad -3]$，再由式(17)求得 $l=-1$.

保证调节时间指标的最优 l_∞ 状态反馈律：$u_k=[-4\quad -3]x_k-\nu_r, k\geqslant 0$. 仿直曲线如图1所示：

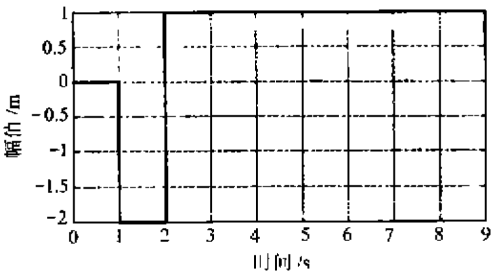

图1 系统单位阶跃响应

Fig. 1 The unit step response for the system

5 结论(Conclusion)

与传递函数空间的输出反馈不同，状态反馈最优时域指标控制有其特有性质：即完全可达的条件下，由于闭环极点的任意可配置性，求取最优 l_∞ 序列的线性规划问题中的开环极点插值条件已经不存在，开环零点的插值条件，由于状态反馈不改变开环零点的性质而仍成立，因此，对于渐近稳定的闭环系统，开环的单位圆内的非最小相位的零点也是闭环的零点.

由于定常状态反馈不能任意增加控制器的阶次，因此，由插值条件求出的最优误差序列，在调节时间 N 大于系统阶次时，定常状态反馈有可能达不到，这是定常状态反馈的性质所决定的.

另外，本算法已成功应用于福建青山纸业股份公司化浆分厂的蒸煮过程的控制中.

参考文献(References)

[1] Dahleh M A and Pearson J B. Minimization of a regulated response to a fixed input [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1988, 33(10): 924 - 930

[2] Deodhare G and Vidyasagar M. Control systems design via infinite linear programming [J] Int. J. Control, 1992, 55(6): 1351 - 1380

[3] Liu Xiang and Sun Youxian. Robust stabilizing controller design for optimal dynamic performance indexes [J]. Control and Decision, 2000, 15(1): 11 - 14(in Chinese)

[4] Kailath T Linear Systems [M]. London: Prentice Hall, International Inc., 1980

本文作者简介

刘 翔 1964年生. 1999年9月在浙江大学获工学博士学位. 现在浙江大学工业控制技术研究所从事博士后研究工作. 研究领域为鲁棒计算机控制、多模型鲁棒控制等.

王文海 1967年生. 浙江大学工业控制技术研究所副研究员. 研究领域为集散控制系统及应用等.

孙优贤 1940年生. 教授，博士生导师，中国工程院院士. 现任浙江大学控制工程科学研究院院长、工业控制研究所所长. 1984年至1987年获德国洪堡奖学金. 长期从事过程控制、鲁棒控制理论及应用，H_∞控制理论与应用，容错控制理论及应用研究以及造纸过程模型化和计算机控制. 发表论文300多篇，著作10余本. 获各类科技进步奖20多项.

沈 军 1963年生. 福建青山纸业股份有限公司工程师. 从事多年制浆造纸工艺及自动化应用研究工作.