

Δ 变换与数字控制器误差分析*

陈 俐 张建武 习 纲

(上海交通大学机械工程学院汽车工程研究所·上海, 200030)

摘要: 当采样周期 $T \rightarrow 0$ 时, Δ 变换描述的离散模型收敛于连续系统. 引入 Δ 变换离散方法, 分析 δ 算子的浮点误差. 以二阶系统为算例, 在离散域内设计极点配置控制器, 跟踪理想输出. 仿真结果表明, 与 z 算子相比, 在计算机有限字长实现时, δ 算子受舍入截尾扰动的影响较小, 精度高, 算法稳定.

关键词: Δ 变换; δ 算子; 有限字长; 数字控制

文献标识码: A

Error Analysis of Digital Controller Using δ Operators

CHEN Li, ZHANG Jianwu and XI Gang

(Institute for Automotive Engineering, School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030, P. R. China)

Abstract: A discrete model described by Δ -transform converges to its continuous counterpart as sample time $T \rightarrow 0$. Introducing Δ -transform as a new digital control method. This paper analyses the floating error of the corresponding δ -operator and designs a poleassignment controller to track ideal output directly in discrete field. The simulation results from a 2-order system show that δ -operator has better performance for round off noise caused by finite word length, higher accuracy and stability than z -operator.

Key words: Δ -transform; δ -operator; finite word length; digital control

1 引言(Introduction)

在计算机控制系统中, 一般希望采样频率越高 (即 $T \rightarrow 0$), 离散时间系统越逼近连续时间系统的动态特性^[1]. 目前, 在数字控制领域中, 离散系统的描述广泛采用 z 算子. 原因之一是, z 算子格式简单, 容易理解, 便于实现. 但在 $T \rightarrow 0$ 时, 最小相位连续系统的离散时间模型会变成具有不稳定零点的非最小相位系统, 而且计算机字长有限, z 算子迭代可能引起较大的舍入误差并带来极限环振荡等问题. 1986 年 Middleton 和 Goodwin 提出 Δ 变换^[2]. Δ 变换是拉氏变换的极限 ($T \rightarrow 0$), 故当 $T \rightarrow 0$ 时, 二者具有相同的形式, 根本上避免了 z 算子的上述缺陷.

本文引入 Δ 变换对二阶 SISO 系统离散化, 分析 δ 算子数字实现的浮点误差, 然后在离散域内设计极点配置控制器, 并与 Z 变换的仿真结果进行比较.

2 δ 算子的误差分析(Error analysis for δ operator)

2.1 Δ 变换(Δ transform)

将采样周期为 T 的离散时间函数(信号) $f(kT)$

简单写作 $f(k)$, 定义移位算子 q , 也就是 Z 变换域中的 z 算子

$$qf(k) = f(k+1). \quad (1)$$

定义 δ 算子

$$\delta = \frac{q-1}{T}. \quad (2)$$

与拉氏变换类似, 对于和式存在的离散函数 $f(k)$, 定义其 Δ 变换(工程上几乎所有函数都存在 Δ 变换:

$$\Delta(f(k)) = F(\epsilon) = T \sum_{i=0}^{\infty} f(i)(T\epsilon+1)^{-i}. \quad (3)$$

式(3)在 $T \rightarrow 0$ 时的极限为拉氏变换. 如果将 $z = T\epsilon+1$ 代入 $f(k)$ 的 Z 变换式, 就可求得其 Δ 变换式.

z 算子与拉氏算子 s 的关系为 $z = \exp(sT)$. 可知, s 平面的左半平面为稳定域, 且全部映射在 z 平面上以原点为圆心的单位圆内, 与采样周期无关. 因此用 z 算子进行离散系统的分析设计时, 与连续系统要分别讨论, 多少有些不便.

与 Δ 变换对应的 ϵ 平面的稳定域在圆心为 $\epsilon = -1/T$, 半径为 $1/T$ 的圆内. 随着 $T \rightarrow 0$, 它趋于左

* 基金项目: 福特-中国发展与研究基金(09415526)资助项目.

收稿日期: 1999-02-09; 收修改稿日期: 2000-01-18.

平面,与连续域相同. ϵ 的离散描述与连续描述形式相同,稳定性及其他性质也与连续系统相近.

2.2 误差分析(Error analysis)

考察 SISO 二阶系统

$$\delta x(k) = a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + bu(k),$$

其解的 δ 形式为

$$x(k) = x(k-1) + T \cdot (a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + bu(k)). \quad (4)$$

若 $[\cdot]_{\text{FL}}$ 表示有限字长的浮点小数运算, $x(k)$ 简写为 x_k , $e_k^{m,1}$ 为乘法运算的相对误差,则

$$a_{1,k-1} = [a_1 x_{k-1}]_{\text{FL}} = a_1 x_{k-1} (1 + e_k^{m,1}). \quad (5)$$

其中

$$e_k^{m,1} \equiv ([a_1 x_{k-1}]_{\text{FL}} - a_1 x_{k-1}) / a_1 x_{k-1}. \quad (6)$$

同样,以格式(4)迭代,每一步浮点运算存在乘法相对误差 $e_k^{m,1}, e_k^{m,2}, e_k^{m,3}, e_k^{m,4}$, 加法相对误差 $e_k^{a,1}, e_k^{a,2}, e_k^{a,3}$. 经推导,运算结果 $x'(k)$ 为

$$x'(k) = x'(k-1) + T \cdot (a_1 x'(k-1) + a_2 x'(k-2) + bu(k)) + e_k, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} e_k \approx & a_1 T (e_k^{m,1} + e_k^{m,4} + e_k^{a,1} + e_k^{a,2}) x'_{k-1} + \\ & a_2 T (e_k^{m,2} + e_k^{m,4} + e_k^{a,1} + e_k^{a,2}) x'_{k-2} + \\ & b T (e_k^{m,3} + e_k^{m,4} + e_k^{a,2}) u(k) + e_k^{a,3} x'_{k-2}. \end{aligned} \quad (8)$$

另外,在 Z 变换离散方法中,其 z 算子的解的格式为

$$x(k) = (1 + a_1 T)x(k-1) + a_2 T x(k-2) + b T u(k). \quad (9)$$

若用 r 表示相对乘法/加法误差,有限字长条件下, $x(k)$ 的值为 $x''(k)$

$$\begin{aligned} x''(k) = & (1 + a_1 T)x''(k-1) + \\ & a_2 T x''(k-2) + b T u(k) + r_k. \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} r_k \approx & a_1 T (r_k^{m,1} + r_k^{m,2} + r_k^{a,1} + r_k^{a,2}) x''_{k-1} + \\ & a_2 T (r_k^{m,3} + r_k^{m,4} + r_k^{a,2}) x''_{k-2} + b T (r_k^{m,5} + r_k^{m,6}) u(k) + \\ & (r_k^{a,1} + r_k^{m,2} + r_k^{a,2}) x''_{k-1} + r_k^{a,3} x''_{k-2}. \end{aligned} \quad (11)$$

设式(8)、(11)中相对误差值相同,则

$$e_k = K_k + a_2 T e_k^{a,2} x_{k-2} + b T e_k^{a,2} u(k), \quad (12)$$

$$r_k = K_k + (r_k^{a,1} + r_k^{m,2} + r_k^{a,2}) x''_{k-1}. \quad (13)$$

式中, K_k 由误差乘以 T 得到. 比较式(12)、(13)右边,用 δ 形式,与输入和状态有关的误差增加了 T 倍,而用 z 算子,与状态有关的误差保持不变. 可以预见, T 很小时 δ 形式误差很小.

由式(8)、(11), T 很小时分别为

$$e_k \approx e_k^{a,3} x'_k, \quad (14)$$

$$r_k \approx (r_k^{a,1} + r_k^{m,2} + r_k^{a,2}) x''_{k-1} + r_k^{a,3} x''_k. \quad (15)$$

用浮点小数运算,乘法/加法误差小于 2^{-m} (m 为字长). 令 $q = 2^{-m}$, 且假定为稳定状态,则上式成为

$$e_k \leq q x'_k \approx q x_k, \quad (16)$$

$$r_k \leq 3 q x''_{k-1} + q x''_k \approx 4 q x_k. \quad (17)$$

可见,用 δ 形式,误差的上限也较小.

3 数值仿真(Numerical simulation)

3.1 连续系统的离散化描述(Discrete description for continuous system)

二阶积分系统在连续域的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (18)$$

在 z 平面的传递函数为

$$G(z) = \frac{T^2 z^2}{z^2 - 2z + 1}. \quad (19)$$

进行 Δ 变换,则在 ϵ 平面的传递函数为

$$G(\epsilon) = \frac{(T\epsilon + 1)^2}{\epsilon^2}. \quad (20)$$

式(20)中,当 $T \rightarrow 0$ 时, $\lim_{T \rightarrow 0} G(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}$, 形式与式(18)完全相同.

要求在 ϵ 平面配置二阶系统的极点为 $s_0 = -10 \pm 3i$, 不同采样周期时,对应 z 平面和 ϵ 平面极点位置见表1. 当 $T \rightarrow 0$ 时, ϵ 平面的极点收敛于 s 平面的极点位置,而 z 平面内极点位置趋于临界稳定点,未能准确反映系统特性. 有限字长时,当采样频率增高, z 算子的计算机实现可能失效,也是这个原因.

在时域内, δ 算子对系统描述的计算机实现格式为

$$\begin{cases} M(k) = M(k-1) + Tx(k), \\ y(k) = TM(k) + y(k-1). \end{cases} \quad (21)$$

z 算子的计算机实现格式为

$$y(k) = 2y(k-1) - y(k-2) + T^2 x(k). \quad (22)$$

用 δ 算子和 z 算子分别求出该双积分系统的正弦输入响应离散模型,仿真结果见图1. 字长8位, $T = 0.06$ 时, δ 算子和 z 算子的区别不明显,如图1(a),但随着采样周期的减小, δ 算子描述的离散系统越接近于连续系统,而 z 算子受字长限制,可能得出相反的结论. 图1(b)中 $T = 0.05$, z 算子的误差已十分明显,而 δ 算子误差较小. 图1(c)中, $T = 0.01$, z 算子发散,而 δ 算子更精确地接近于连续系统的响应.

表1 s 平面、 z 平面和 ϵ 平面对应的极点位置

Table 1 The poles of the three transformation

	极 点			
连续域 s	$-10 \pm 3i$	$-10 \pm 3i$	$-10 \pm 3i$	$-10 \pm 3i$
离散域 z	$0.3514 \pm 0.1087i$	$0.9044 \pm 0.0271i$	$0.9900 \pm 0.0030i$	$0.9990 \pm 0.0003i$
离散域 ϵ	$-6.4855 \pm 1.0872i$	$-9.5570 \pm 2.7141i$	$-9.9546 \pm 2.9701i$	$-9.9955 \pm 2.9970i$
采样周期	$T=0.1s$	$T=0.01s$	$T=0.001s$	$T=0.0001s$

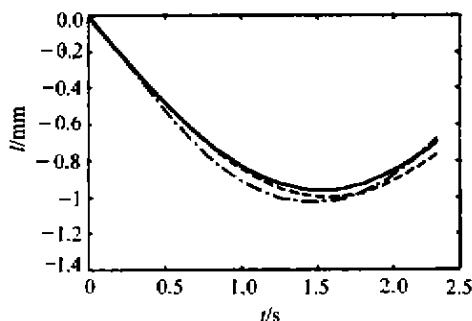
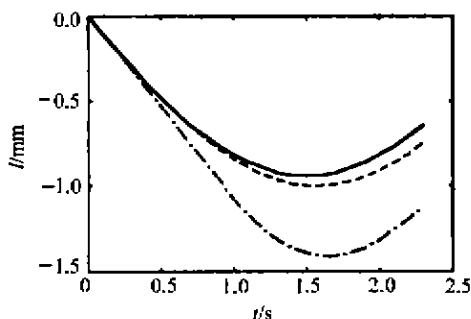
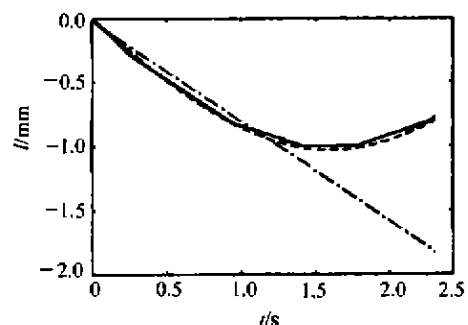
(a) 8 位字长, $T=0.06$ (b) 8 位字长, $T=0.05$ (c) 8 位字长, $T=0.01$ — δ 算子; — z 算子; ···· 理想轨迹

图1 连续系统的离散化描述比较

Fig. 1 Comparison of the discrete descriptions for continuous system

3.2 极点配置控制器的数字实现 (Digital implementation of pole assignment controller)

在 s 域中, 要求闭环二阶系统的极点为 $s_i (i = 1, 2)$. 相应地在 ϵ 离散域中极点位置为 $\epsilon_i = \frac{e^{s_i T} - 1}{T} (i = 1, 2)$. 如果 $T \rightarrow 0$, 在 ϵ 离散域 $\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon_i =$

$\lim_{T \rightarrow 0} (\frac{e^{s_i T} - 1}{T}) = s_i$, 此时可以直接根据 $\epsilon_i = s_i (i = 1, 2)$ 设计控制器.

令 $e(k) = R(k) - y(k)$, 则

$$\delta e(k) = (e(k) - e(k-1))/T. \quad (23)$$

对应于连续域零极点配置的控制律 $u(t) = R(t) - (k_1 e(t) + k_2 \delta e(t))$, 可直接在 ϵ 离散域中设计离散控制律

$$u(k) = R(k) - (k_1 e(k) + k_2 \delta e(k)). \quad (24)$$

作为比较, 考虑 z 离散域, $\lim_{T \rightarrow 0} z_0 = \lim_{T \rightarrow 0} e^{s_0 T} = 1$, 此时, 不管闭环系统的极点位置如何, 在 z 离散域内都趋于临界稳定.

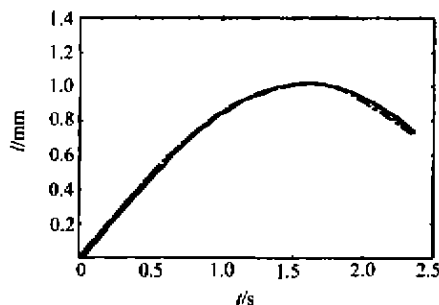
按控制律式(24), 闭环系统 δ 算子的计算机实现格式为

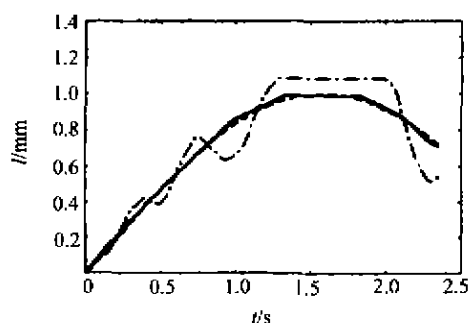
$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T} = \frac{J_c}{1 + TK} (R(k+1) - y(k)). \quad (25)$$

z 算子实现格式为

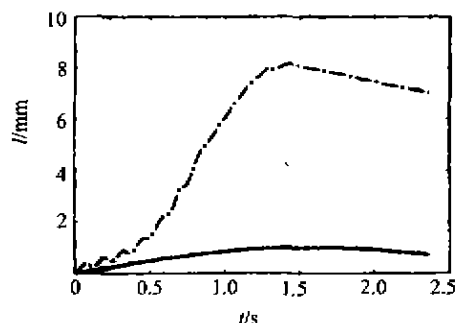
$$y(k+1) = \frac{J_c}{1 + TK} (TKR(k+1) + y(k)). \quad (26)$$

分别按格式(25)、(26)实现计算机控制, 仿真结果见图2. 图2(a)中, 字长8位, $T=0.03$, δ 算子和 z 算子的区别不很明显. 若采样周期减少至 $T=0.01$, 如图2(b), δ 算子更接近于期望值, z 算子的误差反而增大, 呈不稳定趋势. 如图2(c)中加载高频干扰, 字长12位, $T=0.001$, z 算子发散, 而 δ 算子跟踪性能良好, 说明 δ 算子的稳定性更强.

(a) 8 位字长, $T=0.03$



(b) 8位字长, $T=0.01$



(c) 8位字长, $T=0.001$

— δ 算子; --- z 算子; 理想轨迹

图2 极点配置控制系统数字仿真

Fig. 2 Simulation of the system with pole assignment controller

收敛于连续域拉氏变换的零极点,表达直观,直接离散域的控制设计更方便、精确,而 z 变换可能得出相反的结果.计算机有限字长实现时,与 z 算子相比, δ 算子受舍入截尾扰动的影响较小,算法稳定,抗干扰性强.

参考文献 (References)

- [1] Tesfaye A and Tomizuka M. Robust MIMO model following with application to trajectory motion control of robot [A]. IEEE Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control [C], Tokyo, 1994, 814-819
- [2] Middleton R H and Goodwin G C. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operator [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1986, 31(11):1015-1021

本文作者简介

陈 钢 1973年生,分别于1994年和1997年在湖南大学机械工程系获学士和硕士学位,现在上海交通大学攻读博士学位.主要研究方向:多体动力学,非线性控制,自适应控制,汽车电控技术.

张 建 武 1954年生,1984年获上海交通大学博士学位,德国鸿堡基金会研究员,美国机械工程师学会会员,现任上海交通大学教授,博士生导师.主要研究领域:薄壁结构,非线性理论,摄动技术,非线性振动及控制,有限元数值分析和汽车系统动力学.目前已在国内外发表学术论文60余篇.

习 纲 1972年生,分别于1993年和1996年在湖南大学机械工程系获学士和硕士学位,现在上海交通大学攻读博士学位.主要研究方向:汽车电控技术, H_∞ 控制,预测控制,神经网络控制.

4 结论 (Conclusion)

Δ 变换为离散域内精确反映连续物理系统的特性提供了有力工具.当采样周期 $T \rightarrow 0$ 时,其零极点