文章编号：1000-8152(2001)01-0116-03

Petri 网的并分解*

王培良　赵义军　叶志宝
（山东科技大学应用数学与软件工程系·山东泰安，271019）

摘要：给出了 Petri 网的并分解的定义，并讨论了通过这种分解原网与子网在结构性质方面之间的关系，对用 Petri 网分析大系统提供了一种有效的方法.

关键词：Petri 网；并分解；结构性质
文献标识码：A

Union Decomposition of Petri Net

WANG Peiliang, ZHAO Yijun and YE Zhibao
(Department of Applied Mathematics and Software Engineering, Shandong University of Science and Technology·Shandong Tai'an, 271019, P. R. China)

Abstract: The concept of union decomposition is presented. After union decomposition, the relationship between net and its subnets in structural properties is discussed. These conclusions have important significance in analysing large scale systems.

Key words: Petri net; union decomposition; structural property

Petri 网是系统模拟和分析的有效工具，然而对大系统的分析由于变迁和位置的数目大分析起来比较麻烦. 本文着重讨论了一种网分解方法，并分析了原网与子网在可重复性、相容性、有界性、守恒性、公平性、弱公平性之间的关系，这对于用 Petri 网分析大系统无疑提供了一种有效的方法.

本文用到的关于 Petri 网的基本概念参见文献[1～5].

1 Petri 网并分解的定义(The concept of union decomposition)

定义 1　设有网 N = $(P, T; F)$，取 $T_1, T_2 \subseteq T$ 且 $T_1 \cup T_2 = T$，$P_1 = {}^{\cdot}T_1 \cup T_1^{\cdot}$，$P2 = {}^{\cdot}T_2 \cup T_2^{\cdot}$，令 $N_i = (P_i, T_i; F_i)(i = 1,2)$，其中 $F_i = F \cap ((P_i \times T_i) \cup (T_i \times P_i))$ 上述过程称为把网 N 分解成了两个子网 N_1, N_2，满足 $N_1 \cup N_2 = N$.

这种把网 N 通过变迁集的划分而分解成两个(或几个)子网的并的分解称为 Petri 网的并分解 Ⅰ.

定义 2　设有网 N = $(P, T; F)$，取 $P_1, P_2 \subseteq P$ 且 $P_1 \cup P_2 = P$，$T_1 = {}^{\cdot}P_1 \cup P_1^{*}$，$T_2 = {}^{\cdot}P_2 \cup P_2^{\cdot}$，令 $N_i = (P_i, T_i; F_i)(i = 1,2)$，其中 $F_i = F \cap ((P_i \times T_i) \cup (T_i \times P_i))$ 上述过程称为把网 N 分解成了两个子网 N_1, N_2，满足 $N_1 \cup N_2 = N$.

这种把网 N 通过位置集的划分而分解成两个(或几个)子网的并的分解称为 Petri 网的并分解 Ⅱ.

2 原网与子网之间的关系(The relationship between net and its subnets)

定理 1　设网 $N_i = (P_i, T_i; F_i)(i = 1,2)$ 是网 N 通过并分解 Ⅰ 得到的两个连通子网，若 N 是结构有界的，则 N_1, N_2 也是结构有界的.

证　设网 N, N_1, N_2 的关联矩阵分别是 C, C_1, C_2，不妨使它们的行数列数相同，且相同标号的行(或列)对应相同的位置(或变迁)，不过，在 N_1, N_2 中不出现的位置(或变迁)用元素全部为 0 的一行(或一列)代替. 下面提到的关联矩阵都是这样构造的.

由并分解 Ⅰ 的定义知：$\forall t \in T_1$ 在关联矩阵 C, C_1 中对应的列向量元素完全相同，$\forall t \in T_2$ 在关联矩阵 C, C_2 中对应的列向量元素完全相同.

因为 N 是结构有界的，存在正整数向量 $y_0 > 0$ 使得 $C^{\mathrm{T}} y_0 \leqslant 0$.

由关联矩阵 C_1 与 C 的关系知不等式组 $C_1^{\mathrm{T}} y \leqslant 0$ 是不等式组 $C^{\mathrm{T}} y \leqslant 0$ 的一部分. 故 $C_1^{\mathrm{T}} y_0 \leqslant 0$，取 y_1 对应于 P_1 的分量与 y_0 对应于 P_1 的分量相等，其它分量为 0，显然 $C_1^{\mathrm{T}} y_1 \leqslant 0$，从而 N_1 为结构有界的，同理可证 N_2 为结构有界的.

---

* 基金项目：煤炭科学基金(96 电 10509)、国家自然科学基金(69873029)、山东省自然科学基金(Y96G04103)资助项目.
收稿日期：1998-10-05；收修改稿日期：2000-02-02.

同样可证：

定理2　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅰ得到的两个连通子网，若N是守恒的，则 N_1,N_2 也是守恒的.

定理3　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅰ得到的两个连通子网，C,C_1,C_2 分别是网 N,N_1,N_2 的关联矩阵，N,N_1 是相容的，若存在一个正整数向量 X(即每个分量都大于0)，满足 $CX=0$，同时存在一个非负整数向量 X_1 满足：对 $\forall t\in(T_1-T_2)$ 的对应分量有 $X_1(t)=X(t)$，对 $\forall t\in(T_1\cap T_2)$ 的对应分量有 $0<X_1(t)<X(t)$，其它分量为0，且有 $C_1X_1=0$，则 N_2 也是相容的.

定理4　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅰ得到的两个连通子网，若 N_1,N_2 为可重复网(或相容网)，则N也是可重复网(或相容网).

定理5　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅰ得到的两个连通子网，C,C_1,C_2 分别是网 N,N_1,N_2 的关联矩阵，N_1,N_2 是结构有界的(或守恒的)，若存在满足 $C_1^{\mathrm{T}}y_1\leqslant 0$(或 $=0$)，$C_2^{\mathrm{T}}y_2\leqslant 0(=0)$ 的非负整数 m 维向量 y_1,y_2(y_1 对应于 P_2-P_1 的位置分量为0，y_2 对应于 P_1-P_2 的位置分量为0，其它分量非0，$|P|=m$)和存在两个正整数 K_1,K_2 使得 $\forall p\in(P_1\cap P_2)$ 有 $K_1y_1(p)=K_2y_2(p)$，则N也是结构有界的(或守恒的).

定理6　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网，若N为可重复的，则 N_1,N_2 也是可重复的.

定理7　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网，若N为相容的，则 N_1,N_2 也是相容的.

定理8　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网，C,C_1,C_2 分别是网 N,N_1,N_2 的关联矩阵，N,N_1 是守恒的，若存在一个正整数向量 y_0(即每个分量都大于0)，满足 $C^{\mathrm{T}}y=0$，同时存在一个非负整数向量 y_1，对 $\forall p\in(P_1-P_2)$ 的对应分量有 $y_1(p)=y_0(P)$，对 $\forall P\in(P_1\cap P_2)$ 的对应分量有 $0<y_1(p)<y_0(p)$，且有 $C_1^{\mathrm{T}}y_1=0$，则 N_2 也是守恒的.

定理9　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网，C,C_1,C_2 分别是网 N,N_1,N_2 的关联矩阵，若满足 $C_1X_1\geqslant 0$，$C_2X_2\geqslant 0$ 的非负整数 n 维向量 X_1,X_2(T_2-T_1 的变迁在 X_1 中对应分量为0，T_1-T_2 的变迁在 X_2 中对应分量为0，$|\dot{T}|=n$)和存在两个正整数 K_1,K_2 使得 $\forall t\in(T_1\cap T_2)$ 有 $K_1X_1(t)=K_2X_2(t)$，若N是可重复的弱公平网，则 N_1,N_2 也是可重复的弱公平网.

证　因为 N_1,N_2 是N通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网，所以 C,C_1 中对应于 P_1 的行向量元素完全相同，C,C_2 中对应于 P_2 的行向量元素完全相同，设有非负整数向量 X_1，使 $C_1X_1\geqslant 0$，由定理6知 N_2 是可重复的，存在非负整数向量 X_2(对应于 T_2，X_2 的分量大于0，其它分量均为0)有 $C_2X_2\geqslant 0$.

设矩阵 C_3 是矩阵 C_2 把 $P_1\cap P_2$ 所对应的行的所有元素变为零所得到的矩阵，构造 n 维向量：

$$X(t)=\begin{cases}K_1X_1(t),\ t\in T_1,\\ K_2X_2(t),\ t\in T_2-T_1.\end{cases}$$

由矩阵 C_3 的构造知：

$$C=C_1+C_3.$$

从而

$$\begin{aligned}&CX=(C_1+C_3)X=\\&C_1X+C_3X=C_1(K_1X_1)+C_3(K_2X_2)=\\&K_1C_1X_1+K_2C_3X_2,\end{aligned}$$

因为 $C_2X_2\geqslant 0$，所以 $C_3X_2\geqslant 0$，从而 $CX\geqslant 0$.

因为N是弱公平的，由文[1]知 X 中的每个分量大于零，从而对应于 T_1 的每个分量大于零.因为 $K_1>0$，所以 X_1 中对应于 T_1 的每一个分量大于零，故 N_1 是弱公平网，由定理6知 N_1 是可重复的.

同法可证 N_2 也是可重复的弱公平网.

定理10　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网，C,C_1,C_2 分别是网 N,N_1,N_2 的关联矩阵，若满足 $C_1X_1\geqslant 0$，$C_2X_2\geqslant 0$ 的非负整数 n 维向量 X_1,X_2(T_2-T_1 的变迁在 X_1 中对应分量为0，T_1-T_2 的变迁在 X_2 中对应分量为0，$|T|=n$)和存在两个正整数 K_1,K_2 使得 $\forall t\in(T_1\cap T_2)$ 有 $K_1X_1(t)=K_2X_2(t)$，若N是可重复的公平网，则 N_1,N_2 也是可重复的公平网.

定理11　设网 $N_i=(P_i,T_i;F_i)(i=1,2)$ 是网N通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网，C,C_1,C_2 分别是网 N,N_1,N_2 的关联矩阵，N_1,N_2 是可重复的(或是相容的)，若存在满足 $C_1X_1\geqslant 0$(或 $=0$)，$C_2X_2\geqslant$

0(或 = 0)的非负整数 n 维向量 X_1, X_2($T_2 - T_1$ 的变迁在 X_1 中对应分量为0, $T_1 - T_2$ 的变迁在 X_2 中对应分量为0,其它非0, $|T| = n$)和存在两个正整数 K_1, K_2 使得 $\forall t \in (T_1 \cap T_2)$ 有 $K_1X_1(t) = K_2X_2(t)$,则 N 也是可重复的(或是相容的).

定理 12 设网 $N_i = (P_i, T_i; F_i)(i = 1,2)$ 是网 N 通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网,若 N_1, N_2 是结构有界的(或是守恒的),则 N 也是结构有界的(或是守恒的).

定理 13 设网 $N_i = (P_i, T_i; F_i)(i = 1,2)$ 是网 N 通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网,若 N_1, N_2 是公平网(或弱公平网),则 N 也是公平网(或弱公平网).

定理 14 设网 $N_i = (P_i, T_i; F_i)(i = 1,2)$ 是网 N 通过并分解Ⅰ得到的两个连通子网, $T_1 \cap T_2 = \Phi$, C, C_1, C_2 分别是网 N, N_1, N_2 的关联矩阵, N, N_1 是相容的,若存在一个正整数向量 $X > 0$,满足 $CX = 0$,同时存在非负整数 X_1(X_1 对应于 T_1 的分量大于0,其它分量为0)有 $C_1X_1 = 0$ 且 X, X_1 对应 $\forall t \in T_1$ 的分量有 $X(t) = X_1(t)$,则 N_2 也是相容的.

定理 15 设网 $N_i = (P_i, T_i; F_i)(i = 1,2)$ 是网 N 通过并分解Ⅱ得到的两个连通子网, $P_1 \cap P_2 = \Phi$, C, C_1, C_2 分别是网 N, N_1, N_2 的关联矩阵, N, N_1 是守恒的,若存在一个正整数向量 $y_0 > 0$,满足 $C^{\mathrm{T}}Y_0 = 0$,同时存在非负整数 y_1(y_1 对应于 P_1 的分量大于0,其它分量为0)有 $C_1^{\mathrm{T}}Y_1 = 0$ 且 y_0, y_1 对应 $\forall p \in P_1$ 的分量有 $y_0(p) = y_1(p)$,则 N_2 也是守恒的.

3 举例(Examples)

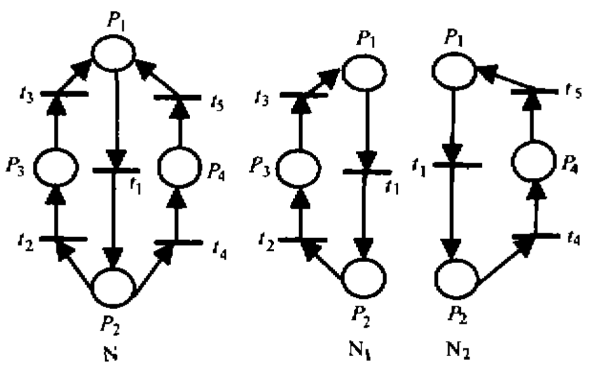

图 1 相容守恒网的分解

Fig. 1 Decomposition of consistent and conservative net

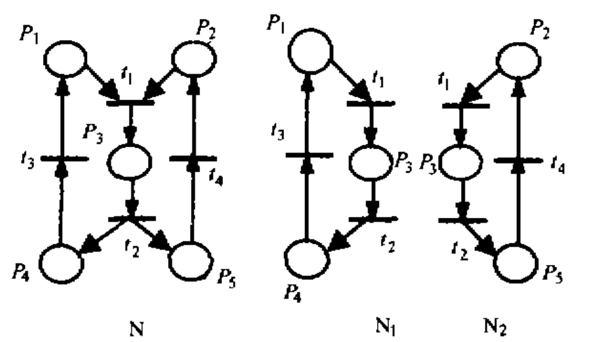

图 2 相容守恒公平网的分解

Fig. 2 Decomposition of consistent conservative and fair net

在图1中,N 是守恒的、相容的, N_1, N_2 是通过并分解Ⅰ得到的两个子网,显然满足定理2,3,所以 N_1, N_2 是守恒的、相容的.

在图2中,N 是相容的,守恒的公平网, N_1, N_2 是通过并分解Ⅱ得到的两个子网,显然满足定理7,8,10,所以 N_1, N_2 是守恒的、相容的公平网.

参考文献(References)

[1] Wang Peiliang and Wu zhehui. Condition for deciding weak fair Petri nets [J]. Chinese Journal of Computers, 1994, 17(8): 608 - 611 (in Chinese)

[2] Murata T. Petri nets: properties analysis and application [J]. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(4): 541 - 581

[3] Wu Zhehui. Analysis and implementation of liveness and fairness of bounded Petri net [J]. Chinese Journal of Computers, 1989, 12(4): 267 - 278 (in Chinese)

[4] Wu Zhehui and Wang Peiliang. A necessary and sufficient condition for a net to be fair [J]. Chinese Science Bulletin, 1990, 35(16): 1211 - 1213 (in Chinese)

[5] Wang Peiliang and Wu Zhehui. Condition for directly deciding fair nets [J]. Chinese Journal of Computers, 1993, 15(1): 53 - 58 (in Chinese)

[6] Wang Peiliang and Jiang Changjun. Deciding fair nets by the order of matrix [J]. Chinese Journal of Software, 1994, 5(12): 23 - 28 (in Chinese)

[7] Wang Peiliang and Jiang Changjun. Union operation of Petri net (1) [J]. Journal of Northwest University, 1997, 27 (S): 111 - 114 (in Chinese)

本文作者简介

王培良 1942年生. 教授. 1965年毕业于山东师范大学数学系. 现从事数学教学和"Petri 网理论与应用"的研究工作.

赵文军 1967年生. 讲师. 1998年毕业于山东矿业学院计算机应用技术专业、获硕士学位. 现从事数学教学和"Petri 网理论与应用"的研究工作.

叶志宝 1973年生. 1998年毕业于山东矿业学院计算机应用技术专业, 获硕士学位. 现为中国科学院在读博士生.