文章编号：1000-8152(2001)01-0142-04

关于"遗传算法的全局收敛性和计算效率分析"一文的商榷

何 琳 王科俊 李国斌 金鸿章
(哈尔滨工程大学自动控制系·哈尔滨,150001)

摘要：文[1]指出，具有比例复制和自适应交叉、变异操作的遗传算法(简称 AGA)满足最优保存 GA(简称 EGA)的条件，则由 EGA 全局收敛的结论得出 AGA 也是全局收敛的；同时认为，AGA 构成的 Markov 链为非时齐的．本文给出了 EGA 的严格定义，指出了 EGA 全局收敛的本质，说明 AGA 实际并不属于 EGA，因此也不能沿用 EGA 全局收敛的结论．在此基础上证明了 AGA 不能全局收敛．最后仔细分析了 AGA 的遗传操作，说明 AGA 可由时齐 Markov 链来描述．

关键词：遗传算法；自适应交叉变异概率；收敛性；时齐性
文献标识码：A

The Discussion about the Paper "The Analysis of Global Convergence and Computational Efficiency for Genetic Algorithm"

HE Lin, WANG Kejun, LI Guobin and JIN Hongzhang
(Department of Automatic Control, Harbin Engineering University · Harbin, 150001, P. R. China)

Abstract: *Paper [1] points out that GA with proportional reproduction, adaptive crossover and mutation probability (AGA)* meets the condition of elitist preserved GA (EGA) and concludes AGA's global convergence from EGA's global convergence conclusion. At the same time, it's considered the Markov chain AGA generates is inhomogeneous. More normative definition of EGA is given and the essence of EGA' global convergence is indicated. It illuminates AGA isn't one kind of EGA and its convergence analysis cann't follow the conclusion of EGA's. On the basis of it, AGA's inability to converge globally is proved. Finally, the genetic operation of AGA is analyzed carefully. It shows AGA can be described as a homogeneous Markov chain.

Key words: genetic algorithm; adaptive crossover and mutation probability; convergence; homogeneity

1 引言(Introduction)

贵刊 1996 年 8 月第 13 卷第 4 期恽为民、席裕庚的"遗传算法的全局收敛性和计算效率分析"[1]一文中给出了最优保存简单遗传算法(OMSGA)的定义，证明了 OMSGA 的收敛性．同时认为，文[2]中具有比例复制和自适应交叉、变异操作的遗传算法(简称 AGA)的任意状态 S_i 中的最优串能够保存，满足 OMSGA 的条件，从而 AGA 也是全局收敛的．另外，文章还认为，AGA 所构成的 Markov 链为非齐次的．

文[1]中 OMSGA 的定义较含糊，未指明最优保存的真正含义．同时，若仔细分析 AGA 的运行过程并将其与最优保存的定义相比较就发现，AGA 并不满足最优保存的条件，同时它也不能收敛到全局最优解．本文给出最优保存的严格定义，指出 EGA 全局收敛的本质；在此基础上，仔细分析 AGA 的收敛性，同时指明 AGA 所构成的 Markov 链实际为齐次的．

2 最优保存与最优保存 GA(Elitist preserved and elitist preserved GA)

为简单起见，不失一般性，设所优化的对象仅有一个全局最优点．

定义 1 最优保存．设 $S^* = \{b_k : f(b_k) = \max(f(S_k)), b_k \in S_k, k = 1,2,3,\cdots\}$，$b_k, b_{k+1}$ 分别为第 k 代和第 $k+1$ 代群体 S_k, S_{k+1} 中的最优个体，$f(b_k), f(b_{k+1})$ 为其相应的适应度．若 $f(b_k) > f(b_{k+1})$，则 $b_{k+1} = b_k, f(b_{k+1}) = f(b_k)$．

说明 1) 随着遗传代数 k 的增加，每代最优个体适应度所构成的数列 $\{f(b_1), f(b_2), f(b_3), \cdots\}$ 为不减数列．这是最优保存操作的直接结果和本质表现，它是 EGA 所必须满足的基本条件．

2) 该定义说明最优保存的作用(或目的)仅限于保持进化种群迄今为止所发现的最优解，凡具有

收稿日期：1998-07-14；收修改稿日期：2000-03-20．

这种功能的 GA 均可称作 EGA.但如何在 GA 运行中实现最优保存功能则有不同的方法.

3) 常见的描述 EGA 特性的表述为:最优解以概率 1 保留到下一代.该条件较为严格.实际仅当上一代的最优个体优于下一代时,需将该个体保留到下一代;否则可不保留.

3 全局收敛的 EGA 及其收敛本质(Global convergent EGA and its convergence essence)

从上述最优保存和 EGA 的定义可看出,一旦 EGA 发现全局最优解 b,则这个最优解将一直保留下去,而不会丢失,即

$$\lim_{k\to\infty} P(f(b_k) = f(b)) = 1.$$

设包含全局最优解 b 的种群(或状态)集合为 E_1,则 EGA 一旦进入 E_1,使用交叉、变异等遗传算子不能到达 E_1 以外的任何种群(或状态),即 E_1 为闭集.这均说明在这种情况下 EGA 为全局收敛的.因此为了使 EGA 全局收敛,关键是使 EGA 能够发现全局最优解,即具备搜索到全局最优解的能力;否则,即使有最优保留操作也不能保证 EGA 全局收敛.由此可得到以下定理:

定理 1 EGA 为全局收敛的充分条件为:在搜索过程中 EGA 能够发现全局最优解或经历包含全局最优解的状态 E_1.

由以上定理我们可直接得出以下推论:

推论 1 在加入最优保留操作之前具有各态遍历性的遗传算法(GA1),在加入最优保留操作后,若不改变(或影响)GA1 的遍历性,则得到的 EGA 为全局收敛的.

4 AGA 收敛性分析(Analysis of AGA's convergence)

为分析方便,不失一般性,考虑选择操作在交叉、变异操作之后进行的 GA.因为对于可全局收敛的 GA 而言,其收敛性不受初始种群的影响,因此可以对初始种群直接进行交叉、变异操作,然后再进行选择.

由自适应交叉、变异概率的定义,AGA 中每代最优个体的交叉、变异概率为 0,即最优个体不参与交叉、变异操作,不会被交叉、变异操作破坏.但在随后的选择操作中最优个体则可能丢失,即最优个体并未真正保留下来.表现在个体适应度上则为每代最优个体适应度可能下降,这与最优保存的定义不相符,因此 AGA 并不属于 EGA,也就不能套用 EGA 全局收敛的结论.下面具体分析 AGA 的运行过程,说明 AGA 不能全局收敛.

证　反证法.

设 AGA 可全局收敛,则 $\lim_{k\to\infty} P(f(b_k)) = f(b)) = 1$. b_k 为第 k 代种群 S_k 中的最优个体,b 为全局最优个体.不失一般性,设所优化的问题仅有一个全局最优点$(b, f(b))$.

设 $k = n$ 时,$f(b_n) = f(b)$,即最优解存在于种群 S_n 中,对 S_n 执行交叉、变异操作,由自适应交叉、变异概率的定义可知 $P_c(b_n) = P_m(b_n) = 0$,即 b_n 不参与交叉、变异操作,而种群 S_n 中除 b_n 以外的所有个体均参与交叉、变异操作.设 S_n 经过交叉、变异算子作用后变为 S_n',其中的个体记为 b_n',显然 $b_n \in S_n'$.再对 S_n' 执行选择操作.设 S_n' 中适应度最小的个体为 $\bar{b}$,$\mathrm{fit}(\bar{b}) < \mathrm{fit}(b_n)$.下面证明 $\bar{b}$ 存在的可能性,即无论 n 取何值,S_n 经过交叉、变异操作得到的种群 S_n' 中含有适应度小于全局最优个体的个体 $\bar{b}$ 概率大于 0.

因为在种群中除最优个体以外,其余的 $M-1$ 个个体均可参与交叉、变异操作.即使这 $M-1$ 个个体在参与交叉操作后未能产生个体 $\bar{b}$,在经过变异操作后,由变异算子的遍历性[3]可知,获得 $\bar{b}$ 的概率一定大于 0.(虽然采用了自适应变异率,但对除了最优个体外的所有个体 $P_m > 0$,变异算子仍满足遍历性.)

设由 M 个相同个体 $\bar{b}$ 组成的种群记为 $\bar{S}$.考虑 S_n' 经过比例选择变为 $\bar{S}$ 的概率,由比例选择的定义

$$P(S_n' \to \bar{S}) = \left(\frac{\mathrm{fit}(\bar{b})}{\sum_{i=1}^{M}\mathrm{fit}(b_i')}\right)^M > 0,$$

即下一代种群 S_{n+1} 为 $\bar{S}$ 的概率大于 0.显然,此时 S_{n+1} 中并不含有全局最优个体 b,即

$$P(f(b_{n+1}) = f(\bar{b}) \neq f(b)) > 0.$$

由 n 取值的任意性(或数学归纳法)可知,在任何时刻,对于任何包含全局最优解的种群(当然也可为不包含全局最优解的任意种群)S_n,总存在种群 $\bar{S}$,$\bar{S}$ 中不含有全局最优个体 b,使得 $P(S_n \to \bar{S}) > 0$.则当 $n \to \infty$ 时,存在种群 $\bar{S}$,使得 $P(S_n \to \bar{S}) > 0$,即存在个体 $\bar{b}$,使得

$$\lim_{n\to\infty} P(f(b_n) = f(\bar{b})) \neq f(b)) > 0,$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty} P(f(b_n) = f(b)) < 1$$

成立.这与 $\lim_{k\to\infty} P(f(b_k) = f(b)) = 1$ 的全局收敛条件矛盾.因此 AGA 并不能全局收敛.

说明:1) 当种群 S_n 中所有个体均为全局最优解 b 时,上面的证明仍然成立.此时,$\mathrm{fit}(\bar{b}) = \mathrm{fit}(b)$.除其中的一个全局最优个体不参与交叉、变异操作外,其余的均参与.对于有多个相同最优解的种群也采取同样的方法.之所以这样解释 AGA 的操作,是因为对于一个事先并不知道全局最优解的问题而言,无法判断 GA 何时找到全局最优解.只有依靠算法本身所体现的特征来判断.一般以 $t \to \infty$ 时最优个体适应度是否保持恒定做为停止搜索的条件.对于种群中所有个体均相同,但非全局最优解的情况,只有采取上述操作种群方可继续进化.否则 GA 将停止搜索,而收敛到种群中所有个体均相同的任一状态[4].这显然不符合 AGA 设计者的初衷.

2) 选择操作在交叉、变异操作之前还是之后进行的问题.正如文章一开始所提到的,这并不影响 AGA 的收敛性分析.从上述证明过程可看出,AGA 不能全局收敛的关键在于最优解未能以概率 1 保留到下一代,而有可能在选择操作中丢失.对于选择操作在交叉、变异之前进行的 AGA 同样存在上述问题.AGA 中自适应交叉、变异概率所保留的仅是经历选择操作后(此时上一代的最优个体可能丢失)种群中的最优个体,而非上一代的最优个体.

3)虽然上述证明说明 AGA 不能全局收敛.但从证明过程可以看出,AGA 不全局收敛的可能性是较小的.因为由比例选择的定义,

$$P(S_n' \to \bar{S}) = \left(\frac{\mathrm{fit}(\bar{b})}{\sum\limits_{i=1}^{M}\mathrm{fit}(b_i')}\right)^M,$$

的值是很小的.体现在 GA 的状态极限概率分布上[6],即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{S^{(i)}\cap S\neq\emptyset} V^i(k) = 1$ 为全局收敛;而在 AGA 中 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{S^{(i)}\cap S\neq\emptyset} V^i(k) \to 1$, 但不能等于 1.

其中 $V(k) = [V^1(k), V^2(k), \cdots, V^N(k)]$, $N = C_{2^l+M-1}^{M}$ 为一概率向量,表示种群在状态空间的分布.$V^i(k)$ 表示种群状态取 $S^{(i)}$ 的概率.S 为包含全局最优解的种群状态.

4)AGA 在执行交叉、变异操作时,对于种群中的最优个体 $P_c = P_m = 0$,交叉、变异算子相当于在维数为 $C_{2^l+M-2}^{M-1}$ 种群状态空间中搜索,而未加入自适应交叉、变异概率以前 GA 的种群状态空间维数为 $C_{2^l+M-1}^{M}$,即 AGA 操作缩小了 GA 的搜索范围;另一方面,因为每代的最优个体不参与交叉、变异操作,AGA 也未充分利用适应度较高个体中的有用基因块.而实际通过交叉操作进行个体间有用基因块的组合以形成适应度更高的个体,对提高 GA 整个种群的平均适应度,加速进行过程是很有意义的.从以上两方面来讲,自适应交叉、变异概率的采用对 AGA 尽早发现最优解并无益处.从常见的 EGA 操作过程可看出,无论最优个体保留在进化种群之外或之内,实际最优个体均参与了交叉、变异操作[5],其目的就是为了充分利用适应度较高个体中的有用基因块.

5 AGA 的时齐性(Homogeneity of AGA)

在文[1]中,作者认为描述 AGA 的 Markov 链是非时齐的.从自适应交叉、变异概率的表示方式来看,

$$P_c = \begin{cases} k_1(f_{\max} - f')/(f_{\max} - \bar{f}), & f' \geqslant \bar{f}, \\ k_3, & f' < \bar{f}; \end{cases}$$

$$P_m = \begin{cases} k_2(f_{\max} - f)/(f_{\max} - \bar{f}), & f \geqslant \bar{f}, \\ k_4, & f < \bar{f}. \end{cases}$$

其中 $0 < k_1, k_2, k_3, k_4 \leqslant 1$.虽然每代 P_c, P_m 都在变化,但它们均与时间无关,而仅与参加交叉、变异操作的个体和父代种群的构成有关,调整 P_c, P_m 的 $f', f, f_{\max}, \bar{f}$ 分别为参加交叉操作、变异操作个体的适应度和父代种群个体适应度最大值、平均值,k_1, k_2, k_3, k_4 根据经验确定,它们均与进化代数即时间无关.

由时齐 Markov 链的定义[1]:X 在时刻 k 处于状态 i 条件下,经 m 步转移,在时刻 $k+m$ 到达状态 j 的条件概率 $P(X_{k+m} = j \mid X_k = i)$ 称为 X 的 m 步转移概率,记为 $P_{ij}(k, k+m)$.如果对一切 $i, j \in [1, N]$, $P_{ij}(k, k+1)$ 与时间 k 无关,则称 Markov 链是时间齐次的,简记为 P_{ij}.由上述,在 AGA 中 P_c, P_m 与 k 无关,而交叉、变异操作方式也与 k 无关(实际为固定不变的),选择操作采用比例选择,则 $P_{ij}(k, k+1)$ 的确定仅依赖于状态 i, j,也与 k 无关,因此 AGA 仍可用时齐 Markov 来描述.AGA 的远期行为可由种群的初始分布和一步转移概率 P_{ij} 组成的状态转移概率矩阵 P 所决定.

由此也可得出以下结论:在进化过程中,遗传算子作用方式及其作用概率的变化与否不是判断 GA 可否由时齐 Markov 链描述的本质特征,只要 GA 满足:对于状态空间的任意两个状态 i, j,一旦起始状态 i 和终点状态 j 确定,状态转移概率 P_{ij} 就确定下来,而无须考虑这两个状态产生在哪一个时刻,即可断定该 GA 可由时齐 Markov 链描述.也就是说,在时齐 GA 中,遗传算子的作用方式及其作用概率也

可发生变化,只要它们的变化不依赖于进化代数 k 或时间即可.

参考文献(References)

[1] Yun Weimin and Xi Yugeng. The analysis of GA's global convergence and computational efficiency [J]. Control Theory and Applications, 1996,13(4):455 - 460(in Chinese)

[2] Strinvas M and Patnaik L M. Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms[J]. IEEE Trans. System, Man and Cybernetics. 1994,24(4):656 - 666

[3] Rudolph G. Convergence analysis of canonical genetic algorithms[J]. IEEE Tran. on Neural Networks, 1994,5(1):455 - 459

[4] Davis T E. Toward an extrapolartion of simulated annealing convergence theory onto simple genetic algorithm[D]. Florida, USA: University of Florida, 1991

[5] Dinabandhu Bhandart and Murthy C A. Genetic algorithm with elitist model and its convergence[J]. Int. J. of Pattern Recongnition and Artificial Intelligence, 1996, 10(6):101 - 113

[6] Zhang Jiangshe, Xu Zongben and Liang Yi. The entire genetic algorithm and its sufficient and necessary conditions for convergence [J]. China Science (E), 1996,27(2):154 - 164(in Chinese)

本文作者简介

何　琳　1973 年生.现为哈尔滨工程大学自动控制系博士.研究领域为遗传算法,智能控制等.

王科俊　1963 年生.现为哈尔滨工程大学自动控制系教授,博士后.研究领域为神经网络,遗传算法,智能控制理论与应用等.

李国斌　1937 年生.现为哈尔滨工程大学自动控制系教授,博士生导师.研究领域为船舶特辅装置,船舶智能控制等.