

文章编号: 1000-8152(2001)02-0166-05

小波变换在有约束广义预测控制中的应用*

李少远 席裕庚

王群仙

(上海交通大学自动化研究所·上海, 200030), (河北工业大学自动化系·天津, 300130)

摘要: 基于小波变换的多分辨率分析功能, 对有约束广义预测控制的预测和控制时域在小波域进行分块压缩, 降低了约束维数, 大大提高了计算效率。

关键词: 预测控制; 小波变换; 约束

文献标识码: A

Applications of Wavelet to Constrained Generalized Predictive Control

LI Shaoyuan and XI Yugeng

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University·Shanghai, 200030, P. R. China)

WANG Qunxian

(Department of Automation, Hebei University of Technology·Tianjin, 300130, P. R. China)

Abstract: A generalized predictive control (GPC) algorithm with constraint-handling properties is proposed, which retains computational simplicity. The constraint-handling is achieved by formulating an infinite-horizon receding problem. On-line computational requirements for multi-time scale systems are reduced substantially by wavelet. We show that the blocking and condensation technology is conveniently applied after expressing the GPC and constraint equation in terms of wavelet bases.

Key words: predictive control; wavelets; constraint

1 引言(Introduction)

在工业过程中经常遇到对输入和输出信号以及它们的变化率的限定问题, 例如执行机构的饱和, 阀位与温度等被控量需在一定范围内, 并且变化幅度不能太大等。预测控制的多步预测和滚动优化使得未来的输出和输入都反映在控制器中, 因而易于在目标函数中加入对系统的输入信号及其变化率的约束以及输出信号及其变化率的约束, 构成了有约束预测控制^[1,2]。席裕庚在文[3]中对有约束多目标多自由度的优化问题进行了可行性分析。近年来开始将小波变换应用于预测控制中^[4], 但未涉及系统约束问题。本文将小波变换和分块技术应用用于有约束广义预测控制中, 提高计算效率。

2 GPC 问题描述(Description of GPC)

用 CARIMA 模型表示一个具有非平稳噪声的实际过程:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + T(z^{-1})\xi(t)/\Delta, \quad (1)$$

其中, $y(t)$, $u(t)$ 分别是过程的输出和输入,

$\{\xi(t)\}$ 是互不相关的零均值噪声序列, $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ 和 $\Delta(z^{-1})$ 均是后移算子 z^{-1} 的多项式。

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a},$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b},$$

$$T(z^{-1}) = 1 + t_1 z^{-1} + \cdots + t_{n_t} z^{-n_t},$$

$$\Delta = 1 - z^{-1}.$$

控制系统的目标函数为:

$$J = \sum_{l=1}^p (y(k+l|k) - w(k+l))^2 + \lambda \sum_{j=1}^M \Delta u(k+j-1)^2. \quad (2)$$

约束条件为:

$$u_{\min}(k+l) \leq u(k+l) \leq u_{\max}(k+l), \quad 0 \leq l \leq M-1, \quad (3)$$

$$|\Delta u(k+l)| \leq \Delta u_{\max}(k+l), \quad 0 \leq l \leq M-1, \quad (4)$$

$$y_{\min}(k+l) \leq y(k+l) \leq y_{\max}(k+l), \quad 1 \leq l \leq p. \quad (5)$$

* 基金项目: 国家自然科学基金(60074004)资助项目。

收稿日期: 1999-03-25; 收修改稿日期: 1999-11-22.

预测方程为:

$$y(t+j|t) = f(t+j) + G_j \Delta u(t+j-1), \quad (6)$$

以向量形式表达为:

$$\min_{\Delta U(k)} \|\varepsilon(k)\|_2^2 + \lambda \|\Delta U(k)\|_2^2, \quad (7)$$

$$\Phi_u \Delta U(k) \geq \Phi(k), \quad (8)$$

其中

$$\varepsilon(k) = R(k) - F - G \Delta U(k). \quad (9)$$

$$F = [f(t+1), \dots, f(t+p)]^T,$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & g_0 \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_{N-N_u} \end{bmatrix}$$

是系统阶跃响应的系数矩阵,称为动态矩阵.

$$U_{\max}(k) = \begin{bmatrix} u(k-1) - u_{\max}(k) \\ \vdots \\ u(k-1) - u_{\max}(k+M-1) \end{bmatrix},$$

$$U_{\min}(k) = \begin{bmatrix} u_{\min}(k) - u(k-1) \\ \vdots \\ u_{\min}(k+M-1) - u(k-1) \end{bmatrix},$$

$$Y_{\max}(k) = \begin{bmatrix} y_{\max}(k) - f(k+1) \\ \vdots \\ y_{\max}(k) - f(k+p) \end{bmatrix},$$

$$Y_{\min}(k) = \begin{bmatrix} y_{\min}(k) - f(k+1) \\ \vdots \\ y_{\min}(k) - f(k+p) \end{bmatrix},$$

$$\Delta U_{\max}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_{\max}(k) \\ \vdots \\ \Delta u_{\max}(k) \end{bmatrix}, U(k) = \begin{bmatrix} u(k) - u(k-1) \\ \vdots \\ u(k+M-1) - u(k-1) \end{bmatrix},$$

$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} u(k) - u(k-1) \\ \vdots \\ u(k+M-1) - u(k+M-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+M-1) \end{bmatrix}_M,$$

$$I_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{M \times M}, U(k) = I_L \Delta U(k),$$

$$R(k) = \begin{bmatrix} w(k+1) \\ \vdots \\ w(k+p) \end{bmatrix}_p,$$

$$\Phi_u = \begin{bmatrix} -I_L \\ I_L \\ -I \\ I \\ -G \\ G \end{bmatrix}_{(4 \times M + 2 \times P) \times M}, \Phi(k) = \begin{bmatrix} -U_{\max}(k) \\ U_{\min}(k) \\ -\Delta U_{\max} \\ -\Delta U_{\min} \\ -Y_{\max}(k) \\ Y_{\min}(k) \end{bmatrix}.$$

3 小波变换在 GPC 中的应用 (The application of wavelet to GPC)

对预测时域和控制时域长度的输出信号和输入信号均进行离散小波变换,简单的标准正交小波 Harr 小波作为基小波,并在小波域对其进行压缩,这样可以很好地兼顾到过程的暂态响应和整体稳态性能.

3.1 预测时域和控制时域各量的小波变换 (Wavelet transformation of predictive and control horizon)

由于 Harr 基为正交基,则从标准脉冲基到 Harr 基只是等价变换,即

$$x = \sum_{k=0}^{2^l-1} a_{0,k} \phi_{0,k} = a_{l,0} \phi_{l,0} + \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} \sum_{m=1}^l b_{m,k} \psi_{m,k}. \quad (10)$$

令

$$\tilde{x}^* = [a_{l,0} \ b_{1,0} \ b_{l-1,0} \ b_{l-1,1} \ \cdots \ b_{l-1,2^{l-1}-2} \ b_{l,2^{l-1}-1}]^T,$$

$$\tilde{x} = [a_{0,0} \ a_{0,1} \ a_{0,2} \ a_{0,3} \ \cdots \ a_{0,2^l-2} \ a_{0,2^l-1}]^T,$$

则 $\tilde{x}^* = U \tilde{x}$, U 是合适的正交矩阵 ($U^T U = I$). 例如,对于 $x \in V_3^3$,

$$\begin{bmatrix} a_{3,0} \\ b_{3,0} \\ b_{2,0} \\ b_{2,1} \\ b_{1,0} \\ b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ b_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \\ a_{0,2} \\ a_{0,3} \\ a_{0,4} \\ a_{0,5} \\ a_{0,6} \\ a_{0,7} \end{bmatrix}.$$

令 $p = 2^{\hat{p}} + 1, M = 2^{\hat{m}} + 1$, 定义 $u_c(k, t) y_c(k, t)$ 可看作是连续的未来输入向量和输出向量,有

$$u_c(k, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ u(k+l) - u(k-1), & l \leq t \leq l+1, 0 \leq l \leq 2^{\hat{m}}-1, \\ u(k+2^{\hat{m}}) - u(k-1), & t \geq 2^{\hat{m}}, \end{cases}$$

$$y_c(k, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ y(k+l | k), & l-1 \leq t \leq l, 1 \leq l \leq 2^{\hat{p}}, \\ y(k+2^{\hat{p}}+1 | k), & t \geq 2^{\hat{p}}. \end{cases}$$

对 $u_c(k, t)$ 作小波变换, 并令

$$u^*(k) = [u_{m,+}^*, u_{m,0}^*, u_{m-1,1}^*, \dots, u_{1,2^{m-1}-1}^*, u_f^*]^T_k,$$

表示小波变换的系数矩阵, 则

$$u^*(k) = V_u U(k). \quad (11)$$

同理

$$\begin{cases} y^*(k) = W_y Y(k | k), R^*(k) = W_y R(k), \\ y_{\max}^*(k) = W_y Y_{\max}^*(k), y_{\min}^*(k) = W_y Y_{\min}(k), \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{其中, } V_u = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, W_y = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

V, W 是相应的标准基到小波基的转换阵, $Y(k | k)$ 是未来输出预测序列向量。

3.2 小波域的分块和压缩(Blocking and condensation)

由于小波变换具有时域和频域联合的局部分析性能, 因此在小波域中, 在不同的分辨率(块)下, 舍去不重要的细节分量(压缩), 就可减少小波系数的个数, 并且重建信号时, 并不影响时域的结构和特性。

令 m_l 表示第 l 层小波的前 m_l 个元素, 即要保留的小波系数, 令 $u_B^*(k)$ 表示压缩后的小波系数向量,

$$u_B^*(k) = [u_{m,+}^*, u_{m,0}^* \{u_{m-1,j}^*\}_{j=0, m_{m-1}} \dots \{u_{1,j}^*\}_{j=0, m_1} u_f^*]^T_k,$$

$$\text{则 } u^*(k) = B^T u_B^*(k). \quad (13)$$

例 对于 $m = 4$, 选取 $m_l = 1, l = 1, 2, 3, 4$, 有

$$u^*(k) = [u_{4,+}^*, u_{4,0}^*, u_{3,0}^*, u_{3,1}^*, u_{2,0}^*, \dots, u_{2,3}^*, u_{1,0}^*, \dots, u_{1,7}^*, u_f^*]^T_k,$$

$$u_B^*(k) = [u_{4,+}^*, u_{4,0}^*, u_{3,0}^*, u_{2,0}^*, u_{1,0}^*, u_f^*]^T_k,$$

$$B = \begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [0] & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

同理

$$\epsilon_H^*(k) = H \epsilon^*(k) \Rightarrow \epsilon^*(k) = H^T \epsilon_H^*(k), \quad (14)$$

$$y_H^*(k | k) = H y^*(k | k) \Rightarrow y^*(k | k) = H^T y_H^*(k | k).$$

(15)

3.3 目标函数和约束方程的小波变换(Wavelet transformation of objective and constraint function)

考虑到

$$\Delta U(k) = H \cdot U(k) = I_L^{-1} U(k),$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

经过变换后的目标函数和受约束方程为:

$$\min_{u_B^*(k)} \|W_y^T H^T \epsilon_H^*(k)\|_2^2 + \lambda \|H \cdot V_u^T B^T u_B^*(k)\|_2^2, \quad (16)$$

$$\epsilon_H^*(k) = H W_y |R(k) - F - G \cdot H \cdot V_u^T B^T u_B^*(k)|, \quad (17)$$

$$(\Phi_u^*)_B \cdot u_B^*(k) \geq \Phi_H(k), \quad (18)$$

其中

$$(\Phi_u^*)_B = \begin{bmatrix} -V_u^T B^T \\ V_u^T B^T \\ -H \cdot V_u^T B^T \\ H \cdot V_u^T B^T \\ -G \cdot H \cdot V_u^T B^T \\ G \cdot H \cdot V_u^T B^T \end{bmatrix},$$

$$\Phi_H(k) = \begin{bmatrix} -V_u^T B^T (u_{\max}^*)_B \\ V_u^T B^T (u_{\min}^*)_B \\ -\Delta U_{\max} \\ -\Delta U_{\min} \\ W_y^T H^T H W_y |F - Y_{\max}(k)| \\ -W_y^T H^T H W_y |F - Y_{\min}(k)| \end{bmatrix}.$$

这是一个 QP 问题, 但是求解维数大大降低, 并且不等式约束的个数也减少了。

4 算法分析(Algorithm analysis)

4.1 求解维数的比较(The compare of dimension)

定理 1 假设 n_u 和 n_y 分别为输入和输出维数, p_l 的意义同 m_l , 则约束方程(8)经小波变换后方程的维数为:

$$4 \times \left[\sum_{l=1}^{\hat{n}} m_l + 2 \right] \times n_u + 2 \times \left[\sum_{l=1}^{\hat{p}} p_l + 2 \right] \times n_y.$$

由式(18)易得定理 1.

相对而言,原时域约束方程的维数为:

$$4 \times [(2^{\hat{n}} + 1) \times n_u] + 2 \times [(2^{\hat{p}} + 1) \times n_y]. \quad (19)$$

可看出,计算量大大减少,提高了计算效率.

4.2 对闭环系统的影响及压缩水平的选择(The effect to closed-loop and the selection of condensation)

对大多数过程控制问题,一个有启发的方案是对 $\{m_l\}_{1 \leq l \leq \hat{n}}$, 选择同样一个数值,因为同样的数值意味着,随着频率的降低(l 的增大),控制时域相对加大.对于化工过程来讲,大多数扰动和设定值变化的典型功率谱集中在低频区,随着频率的增高逐渐降低,则输入高频变化需要的控制时域长度相对低频要短得多.事实上,大多数持续高频变化往往带来不良的或不稳定的闭环控制特性.因此,如果在未来时域内考虑了高频特性,有时反而会更有害.经变换的控制时域恰好考虑了这点.

而对 p_l 的选择是 $m_l + (t_s)_l$, 即控制时域加上对应于输入第 l 个小波的合适的调整时间.这种方法提供了选择压缩矩阵的一种合适的方法.

4.3 与时域压缩的关系(The connection with time-domain blocking)

从上述小波变换和压缩的过程,可得到输入量时域压缩的公式为:

$$\Delta \bar{u}(k) = H \cdot V_u^T B^T u_B^*(k) = H \cdot V_u^T B^T B V_u \cdot H^{-1} \Delta U(k). \quad (20)$$

矩阵 $H \cdot V_u^T B^T B V_u \cdot H^{-1}$ 和矩阵 B 具有同样大小的秩,并且

$$H \cdot V_u^T B^T B V_u \cdot H^{-1} = [U_1 \mid U_2] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_b & \\ 0 & & & 0 & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{V_1^T}{V_2^T} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

由式(21),有

定理 2 在时域中应选择的压缩矩阵 B_i 应为:

$$B_i = U_1^T.$$

推论 1 如果采用 Harr 基作小波变换,并假设

$m_l = 1, 1 \leq l \leq \hat{n}$, B_i 可直接得到为:

$$B_i = \begin{bmatrix} I_{n_u} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{n_u} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & [I_{n_u} \ 0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & [I_{n_u} \ 0 \cdots 0]_{1 \times \hat{n}} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

由于采用 Harr 基作小波变换, V_u 具有特殊的结构,由定理 2 即得推论.

同理,输出量时域压缩矩阵 H_i 可类似得到.

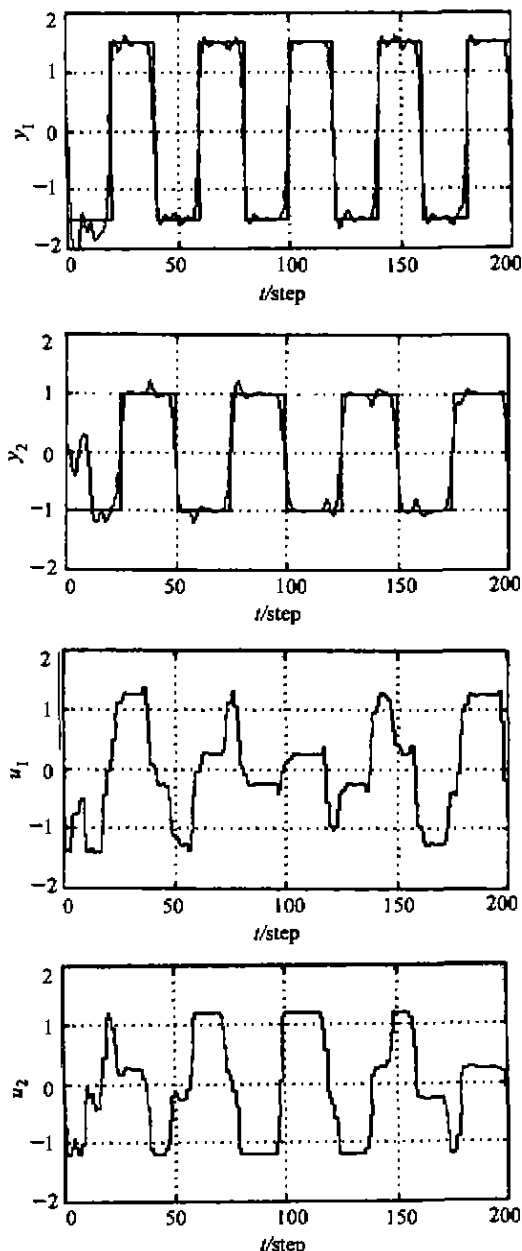


图 1 仿真结果

Fig. 1 Simulation results

5 仿真结果(Simulation results)

针对二输入二输出系统:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1} \\ \frac{0.5s + 1}{s^2 + 2s + 1} & \frac{1}{s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

系统约束为:

$$\begin{cases} -1.2 \leq u_1 \leq 1.2, \\ -1.4 \leq u_2 \leq 1.4. \end{cases}$$

控制目标为 y_1 和 y_2 分别跟踪两个不同幅值和变化频率的方波信号,根据本文算法,得到下述结果,与标准广义预测控制算法相比,计算量大大降低,可由定理 1 和定理 2 估算.

6 结论(Conclusion)

GPC 是一种先进的工业控制算法,然而由于多变量过程多时域特性的存在,使算法的在线优化计算变得困难.针对这个问题,提出用小波变换对预测时域和控制时域进行压缩,大大提高了计算效率.只要压缩程度适当,系统仍将体现良好的鲁棒性,并且由于压缩过程是离线进行的,对实时控制不会造成额外的计算量,可望对复杂工业过程的 GPC 控制有所帮助.

参考文献(References)

[1] Clarke D W and Scattolini R. Constrained receding-horizon predictive

control [J]. IEEE Proceedings, Part D: Control Theory and Applications, 1991,138(4):347-354

[2] Camacho E F. Constrained generalized predictive control [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1993,38(2):327-332

[3] Xi Yugeng and Li Kang. Feasibility analysis of constrained multi-objective multi-degree-of-freedom optimization control in industrial processes [J]. Control Theory and Applications, 1995,12(5):590-596 (in Chinese)

[4] Juarez A E. On the application of wavelets to model predictive control [A]. Proc. of American Control Conference [C], Chicago, USA, 1992,TA8:1582-1586

[5] Zhao Songnian and Xiong Xiaoyun. Wavelets Transformation and Wavelets Analysis [M]. Beijing: Electrical Industrial Press, 1996 (in Chinese)

本文作者简介

李少远 1965 年生,1987 年毕业于河北工业大学自动化系,1992 年 3 月在该校获得硕士学位,1997 年 7 月在南开大学计算机与系统科学系获得博士学位,现在上海交通大学自动化所做博士后研究工作,研究领域为预测控制,智能控制,自适应控制理论与应用.

席裕庚 1946 年生,1968 年毕业于哈尔滨军事工程学院,1984 年在德国慕尼黑工业大学获得博士学位,现为上海交通大学自动化系教授,博士生导师,主要从事复杂系统控制理论和智能机器人的研究.

王群仙 女,1969 年生,1990 年毕业于河北工业大学自动化系,1993 年 3 月在该校获得硕士学位,1998 年 7 月在南开大学计算机与系统科学系获得博士学位,现在河北工业大学自动化系工作,研究领域为预测控制,模糊控制,自适应控制理论与应用.

《机器人学》出版发行

蔡自兴教授的新著《机器人学》最近由清华大学出版社出版发行,并举行了该书的首发式.这是蔡自兴教授继《机器人原理及其应用》后的又一机器人学力作.中国工程院院长宋健教授为该书作代序;中国工程院院士、北京航空航天大学张启先教授作序,指出机器人学是 20 世纪自动化的辉煌篇章,已为人类作出不可磨灭的贡献,并将仍是 21 世纪自动化高技术前沿和推进新技术革命的重要力量.

该书介绍机器人学的基本原理及其应用,是一部机器人学的通用教材和系统著作,全书共 10 章:第一章叙述机器人学的概况;第二章讨论机器人学的数学基础;第三章阐述机器人运动方程的表示与求解;第四章涉及机器人动力学方程、动态特性和静态特性;第五章和第六章研究机器人的控制原则和控制方法;第七章讨论机器人规划问题;第八章概述机器人的程序设计;第九章探讨机器人的应用问题;第十章分析机器人学的现状,并展望机器人学的未来.

本书特别适合作为本科生和研究生的机器人学教材,也可供从事机器人学研究、开发和应用的科技人员学习参考.全书共 62 万字,定价半精装版 39 元,精装版 49 元.(杨华清)