

文章编号: 1000-8152(2001)02-0191-04

## 非线性系统的鲁棒采样最优控制

胡立生 邵惠鹤

孙优贤

(上海交通大学自动化系·上海, 200030) (浙江大学工业控制技术国家重点实验室·杭州, 310027)

**摘要:** 采样系统控制作为一种数字控制的直接设计方法, 近年来引起了广泛的重视, 另一方面系统的时域约束在工业控制中是不可避免的. 利用实用稳定性理论, 研究了具有输出约束的一类非线性系统的鲁棒采样最优控制问题, 结果表示为一些矩阵不等式, 最后给出了一个迭代算法.

**关键词:** 鲁棒控制; 采样控制; 约束; 非线性系统; 实用稳定性

**文献标识码:** A

## Optimal Robust Sampled-Data Control for Nonlinear Systems

HU Lisheng and SHAO Huihe

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, P. R. China)

SUN Youxian

(National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, P. R. China)

**Abstract:** As a direct design procedure for digital controller, sampled-data system control has received wide attention in these years. Moreover, constraints are inevitable in industrial process control. Using practical stability of systems, optimal robust sampled-data control for a class of nonlinear systems with constraints on the outputs is considered. The results are described as some matrix inequalities. Finally, an iterate algorithm for sampled-data control is proposed.

**Key words:** robust control; sampled-data control; constraint; nonlinear systems; practical stability

### 1 引言(Introduction)

设计传统数字控制器的方法有: 先进行模拟设计, 再用数字近似实现; 或将对象近似离散化, 再进行数字设计. 采用前一种方法, 只有在采样周期趋于零的情形下, 才能复现原设计性能, 而采用后一种方法, 则不能考虑采样周期之间系统的行为, 这在考虑系统的连续扰动、连续扰动信号抑制等方面反映出其不足, 虽然传统的广义  $z$  变换可用于分析采样周期之间系统的行为, 但难以作为一种合适的设计方法. 近年来, 对采样控制系统研究(即连续被控对象由离散控制器和适当的采样器、保持器组成的控制器控制)引起了广泛的重视<sup>[1]</sup>. 采样控制不作任何近似, 是直接基于连续的被控对象设计数字控制器, 因而显示了其更大的工业应用价值. 基于 Lifting 技术和系统的  $L_2$  范数, 在时域中研究线性确定性采样系统的  $H_2$  和  $H_\infty$  控制, 已经得到了很多结果<sup>[1]</sup>. 对于线性不确定采样系统鲁棒性和鲁棒控制问题也进行了许多研究<sup>[2]</sup>. 然而采样系统的鲁棒控制问题还远远没有解决. 另一方面, 由于最优控制能较好地体现

生产过程的生产目标, 具有明确的物理含义, 因此最优控制一直是人们研究的热点之一. 鲁棒最优控制目前主要研究二次或非二次优化指标控制和 Guaranteed Cost 控制. 对于采样系统的最优控制, 主要是研究采样系统的  $H_2$  控制, 采样系统的 LQ 控制, 可以转化为  $H_2$  控制<sup>[3]</sup>. 而不确定采样系统的鲁棒最优控制几乎是一个空白. 本文采用实用稳定性理论<sup>[4]</sup> 来研究一类非仿射系统的鲁棒采样最优控制问题, 结果表示为一些矩阵不等式.

### 2 问题提出(Problem formulation)

对于给定的正常数  $\delta, \sigma$ , 且  $\delta < \sigma$ , 考虑如下非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \bar{B}\xi, \quad \xi \in \bar{f}(Cx + B_1u), \\ y &= C_2x. \end{aligned}$$

当  $\|y(0)\| < \delta$  时, 满足约束  $\|y(t)\| < \sigma, t \geq 0$ , 和性能指标

$$\min_u J = \int_0^\infty [y^T(s)Q_1y(s) + u^T(s)Q_2u(s)] ds \quad (1)$$

下的最优采样控制问题,其中  $\bar{f} \in C[\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p], \bar{f}(0) = 0, x \in \mathbb{R}^n$  是系统的状态,  $u \in \mathbb{R}^m$  是系统的控制输入,  $y \in \mathbb{R}^q$  是输出,  $A, \bar{B}, C, C_2$  和  $B_1$  为适维矩阵,  $Q_1$  是半正定对称阵,  $Q_2$  是正定对称阵.

这类系统在汽车的转向控制研究中较为常见,由于汽车轮胎的非线性力学特性,常可将对象描述为上述系统.考虑到在工程实际中此非线性特性的特点,可采用下列不确定非线性模型刻画这一系统

$$\dot{x} = Ax + (B + H\Delta(x, t)E)f(Cx + B_1u), \quad (2)$$

$$y = C_2x, \quad (3)$$

其中  $f \in C[\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p], f(0) = 0$ , 且满足  $\|f\| \leq 1$ ,  $A, B, H, E, C, C_2$  和  $B_1$  为适维矩阵,  $\Delta(x, t)$  是 Lebesgue 可测函数,不失一般性设满足  $\Delta^T \Delta \leq I$ . 采用如下采样控制器

$$u(t) = \bar{u}[t_k], \quad t \in (t_k, t_{k+1}],$$

$$\bar{u}[t_k] = F[t_k]x(t_k),$$

前式表示零阶保持器,  $F[t_k]$  表示数字控制器增益,从中可以看出采样控制与连续控制和离散控制的传统设计存在本质区别,  $\{t_k\}$  是采样时刻,采样周期  $T_s = t_{k+1} - t_k$ . 记  $\bar{x}(t) = (x^T(t), u^T(t))^T$ , 则上述问题归结为系统

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + (\bar{B} + \bar{H}\Delta E)f(\bar{C}\bar{x}(t)), \quad (4)$$

$$\bar{x}(t_k^+) = \bar{A}\bar{x}(t_k) + \bar{B}\bar{u}[t_k], \quad (5)$$

$$y = \bar{C}_2\bar{x}, \quad (6)$$

在满足上述约束和性能指标(1)下的最优控制问题,其中相应矩阵为

$$\begin{bmatrix} -P[t_k] & (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k])^T P[t_k^+] & \bar{F}^T[t_k] \\ P[t_k^+](\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k]) & -P[t_k^+] & 0 \\ \bar{F}[t_k] & 0 & -(T_s Q_2)^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -P_1[t_k] & (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k])^T P_1[t_k^+] \\ P_1[t_k^+](\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k]) & -P_1[t_k^+] \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$P_1[t] \leq a_1 \bar{C}_2^T \bar{C}_2, \quad a_2 \bar{C}_2^T \bar{C}_2 \geq P_2[t] \geq b \bar{C}_2^T \bar{C}_2, \quad (11)$$

其中

$$S[t] = Y[t_k] + P[t]\bar{A} + \bar{A}^T P[t] + \zeta_1^{-1} \bar{C}^T \bar{C} + \zeta_2^{-1} \bar{C}^T E^T E \bar{C} + \bar{Q}_1,$$

$$S_1[t] = Y_1[t_k] + P_1[t]\bar{A} + \bar{A}^T P_1[t] + \zeta_3^{-1} \bar{C}^T \bar{C} + \zeta_4^{-1} \bar{C}^T E^T E \bar{C} + c_k \bar{C}^T \bar{C},$$

则最优控制律  $\bar{u}^*[t_k] = F[t_k]x(t_k)$ , 使系统(4)~(6)实用鲁棒渐近稳定,即  $\|y(t)\| < \sigma, t \geq 0$ .

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = [C \quad B_1], \quad \bar{C}_2 = [C_2 \quad 0],$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

记

$$\bar{F}[t_k] = [F[t_k] \quad 0], \quad \bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} C_1^T Q_1 C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3 主要结果(Main results)

**定理 1** 考虑系统(4)~(6),对于给定的时域性能参数  $\delta, \|y(0)\| < \delta, \sigma$  和采样周期  $T_s$ , 且  $\delta < \sigma$ , 若存在正定对称在  $(t_k, t_{k+1})$  上分段连续的矩阵函数  $P_1[t] = P_1[t_k^+] + (t - t_k)Y_1[t_k]$  和  $P_2[t] = P_2[t_k^+] + (t - t_k)Y_2[t_k], k = 1, 2, \dots$ , 正常数  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, c_k, a_1, a_2$  和  $b, a_1 \delta^2 + a_2 \delta^2 < b \sigma^2$ , 记  $P[t] = P_1[t] + P_2[t], Y[t_k] = Y_1[t_k] + Y_2[t_k], P[t_k^+] = P_1[t_k^+] + P_2[t_k^+]$ , 使得下列矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} S[t] & P[t]\bar{B} & P[t]\bar{H} \\ \bar{B}^T P[t] & -\zeta_1^{-1} I & 0 \\ \bar{H}^T P[t] & 0 & -\zeta_2^{-1} I \end{bmatrix} \leq 0, \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} S_1[t] & P_1[t]\bar{B} & P_1[t]\bar{H} \\ \bar{B}^T P_1[t] & -\zeta_3^{-1} I & 0 \\ \bar{H}^T P_1[t] & 0 & -\zeta_4^{-1} I \end{bmatrix} \leq 0, \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \quad (8)$$

证 设在  $t \in (t_k, t_{k+1})$  上分段右连续 Lyapunov 函数为  $V_1(t, \bar{x}) = \bar{x}^T P_1[t] \bar{x}$  和  $V_2(t, \bar{x}) = \bar{x}^T P_2[t] \bar{x}$ , 并记

$$V(t, \bar{x}) = \bar{x}^T P[t] \bar{x} = \bar{x}^T P_1[t] \bar{x} + \bar{x}^T P_2[t] \bar{x}.$$

由式(7)和  $f(\cdot)$  的有界性得到,存在正常数  $\zeta_1, \zeta_2$  使得

$$\begin{aligned} y^T Q_1 y &= \bar{x}^T \bar{Q}_1 \bar{x} - D^* V(t, \bar{x}) + 2\bar{x}^T P[t](\bar{A}\bar{x} + (\bar{B} + \bar{H}\Delta E)f(\bar{C}\bar{x})) + \bar{x}^T Y[t_k] \bar{x} \leq \\ &= -D^* V(t, \bar{x}) + \bar{x}^T (\bar{Q}_1 + Y[t_k] + P[t]\bar{A} + \bar{A}^T P[t] + \zeta_1^{-1} \bar{C}^T \bar{C} + \zeta_1 P[t]\bar{B}\bar{B}^T P[t] + \zeta_2 P[t]\bar{H}\bar{H}^T P[t] + \zeta_2^{-1} \bar{C}^T E^T E \bar{C}) \bar{x} \leq \end{aligned}$$

$$- D^+ V(t, \bar{x}).$$

设  $\Delta V(t_k, x(t_k)) = V(t_k^+, x(t_k^+)) - V(t_k, x(t_k))$ ,  
由式(9)得到

$$\begin{aligned} & \bar{u}^T[t_k] T_1 Q_2 \bar{u}[t_k] = \\ & \bar{u}^T[t_k] T_1 Q_2 \bar{u}[t_k] - \\ & \Delta V(t_k, \bar{x}(t_k)) - \bar{x}^T(t_k) P[t_k] \bar{x}(t_k) + \\ & \bar{x}^T(t_k) (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k])^T P[t_k^+] (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k]) \bar{x}(t_k) < \\ & - \Delta V(t_k, \bar{x}(t_k)). \end{aligned}$$

那么有

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [y^T(s) Q_1 y(s) + u^T(s) Q_2 u(s)] ds = \\ & \int_0^\infty [\bar{x}^T(s) \bar{Q}_1 \bar{x}(s) + u^T(s) Q_2 u(s)] ds = \\ & \sum_{k=0}^\infty \int_{t_k^+}^{t_{k+1}^+} \bar{x}^T(s) \bar{Q}_1 \bar{x}(s) ds + \bar{u}^T[t_k] T_1 Q_2 \bar{u}[t_k] < \\ & \sum_{k=0}^\infty \int_{t_k^+}^{t_{k+1}^+} (-D^+ V(s, \bar{x})) ds - \Delta V(t_k, \bar{x}(t_k)) = \\ & V(t_0, \bar{x}_0). \end{aligned}$$

由此可知  $\bar{u}[t_k] = \bar{u}^*[t_k]$  是最优控制. 条件(10)等

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -P[t_k] & \bar{A}^T P[t_k^+] & \bar{F}^T[t_k] (T_1 Q_2)^{1/2} \\ P[t_k^+] \bar{A} & -P[t_k^+] - P[t_k^+] \bar{B} (T_1 Q_2)^{-1} \bar{B}^T P[t_k^+] & P[t_k^+] \bar{B} (T_1 Q_2)^{-1/2} \\ (T_1 Q_2)^{1/2} \bar{F}[t_k] & (T_1 Q_2)^{-1/2} \bar{B}^T P[t_k^+] & -I \end{bmatrix} < 0, \\ & \begin{bmatrix} -P_1[t_k] & \bar{A}^T P_1[t_k^+] & \epsilon \bar{F}^T[t_k] \\ P_1[t_k^+] \bar{A} & -P_1[t_k^+] - \epsilon^{-2} P_1[t_k^+] \bar{B} \bar{B}^T P_1[t_k^+] & \epsilon^{-1} P_1[t_k^+] \bar{B} \\ \epsilon \bar{F}[t_k] & \epsilon^{-1} \bar{B}^T P_1[t_k^+] & -I \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

下面给出鲁棒采样最优控制的迭代算法, 其是文献[6]算法的推广:

a) 选择合适的时域参数  $c_k, \delta, \sigma$  和  $\epsilon$ , 设  $k = 0$ ;

b) 求解下列 Riccati 方程

$$-P[t_k] + \bar{A}^T P[t_k^+] \bar{A} - \bar{A}^T P[t_k^+] \bar{B} (T_1 Q_2 + \bar{B}^T P[t_k^+] \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P[t_k^+] \bar{A} = 0,$$

min $\beta$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} -P[t_k] & \bar{A}^T P[t_k^+] & \bar{F}^T[t_k] (T_1 Q_2)^{1/2} \\ P[t_k^+] \bar{A} & -\beta^2 P[t_k^+] - \Theta(P, X) & P[t_k^+] \bar{B} (T_1 Q_2)^{-1/2} \\ (T_1 Q_2)^{1/2} \bar{F}[t_k] & (T_1 Q_2)^{-1/2} \bar{B}^T P[t_k^+] & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -P_1[t_k] & \bar{A}^T P_1[t_k^+] & \epsilon \bar{F}^T[t_k] \\ P_1[t_k^+] \bar{A} & -\beta^2 P_1[t_k^+] - \Theta(P_1, X_1) & \epsilon^{-1} P_1[t_k^+] \bar{B} \\ \epsilon \bar{F}[t_k] & \epsilon^{-1} \bar{B}^T P_1[t_k^+] & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

以及条件式(7), (8) 和(11),

其中

$$\Theta(P, X) = X[t_k^+] \bar{B} (T_1 Q_2)^{-1} \bar{B}^T P[t_k^+] + P[t_k^+] \bar{B} (T_1 Q_2)^{-1} \bar{B}^T X[t_k^+] - X[t_k^+] \bar{B} (T_1 Q_2)^{-1} \bar{B}^T X[t_k^+],$$

价于

$$\begin{aligned} & \bar{x}^T(t_k) (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k])^T P[t_k^+] (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k]) \bar{x}(t_k) < \\ & \bar{x}^T(t_k) P[t_k] \bar{x}(t_k). \end{aligned}$$

那么由上式和条件式(8)得到

$$D^+ V_1(t, x) \leq -c_k \|y\|^2, \quad t \in (t_k, t_{k+1}],$$

$$V_1(t_k^+, x(t_k^+)) < V_1(t_k, x(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

那么由文献[5]的定理1可知, 最优控制律实用鲁棒渐近镇定系统(2)~(3), 即定理得证.

#### 4 算法与算例(Algorithm and example)

求解定理所列条件即可得到鲁棒采样最优控制, 然而定理条件并不是线性矩阵不等式. 注意到  $P[t]$  和  $P_1[t]$  的线性性, 我们只要在采样点  $t_k$  上验证条件是否成立, 同时若已知  $F[t_k]$ , 那么定理所列条件即为线性矩阵不等式. 易知式(10)等价于存在正常数  $\epsilon$ , 使得

$$\begin{aligned} & -P_1[t_k] + \epsilon^2 \bar{F}^T[t_k] \bar{B}^T \bar{B} \bar{F}[t_k] + \\ & (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k])^T P_1[t_k^+] (\bar{A} + \bar{B}\bar{F}[t_k]) < 0, \end{aligned}$$

那么式(9)和上式可以等价地表示为下列不等式

$$-P_1[t_k] + \bar{A}^T P_1[t_k^+] \bar{A} - \bar{A}^T P_1[t_k^+] \bar{B} (\epsilon^2 I + \bar{B}^T P_1[t_k^+] \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P_1[t_k^+] \bar{A} = 0,$$

设其解为  $P[t_k^+], P_1[t_k^+]$ , 作为初值  $X[t_k^+] = P[t_k^+], X_1[t_k^+] = P_1[t_k^+]$ ;

c) 求解下列广义特征值问题:

$$\Theta(P_1, X_1) = \epsilon^{-2} X_1[t_k^*] \bar{B} \bar{B}^T P_1[t_k^*] + \\ \epsilon^{-2} P_1[t_k^*] \bar{B} \bar{B}^T X_1[t_k^*] - \\ \epsilon^{-2} X_1[t_k^*] \bar{B} \bar{B}^T X_1[t_k^*];$$

d) 求解下列优化问题

$$\min(\text{tr} P_1[t_k^*] + \text{tr} P_2[t_k^*])$$

s. t. 条件式(7), (8), (12) 和(13);

e) 若  $|\text{tr}(X[t_k^*] - P[t_k^*])| + |\text{tr}(X_1[t_k^*] - P_1[t_k^*])| < \rho$ , 转 f), 否则转 g),  $\rho$  为计算精度;

f) 若  $\beta = 1, k = k + 1$ , 转 h), 否则, 无可行解, 停止;

g) 设  $X[t_k^*] = P[t_k^*], X_1[t_k^*] = P_1[t_k^*]$ , 若  $\beta = 1$ , 转 d), 否则转 c);

h) 若  $k$  达到预定步数, 停止, c) 步的解即为最优解.

下面考虑如下算例, 系统(2)~(3)的参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 10 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -20 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0 \quad 0.5].$$

性能指标(1)参数为  $Q_1 = 10, Q_2 = 0.01$ . 时域参数为  $\delta = 0.2, \sigma = 0.4$ . 选采样周期为  $T_s = 0.01\text{s}, \epsilon = 0.01$ . 采用上述算法迭代 10 步后得到系统(2)~(3)的最优控制为  $F[t_k] = [-0.0131 \quad 0.5022]$ .

## 5 结束语(Conclusion)

近年来对一种数字控制的直接设计方法——采样系统控制引起了广泛的重视, 由于采样系统本质上是包含连续信号和离散信号的混合系统, 因此传统的连续和离散设计方法不能直接用于采样控制系

统的设计. 本文在以往对于实用稳定性的研究基础上, 研究了具有输出约束的一类非线性不确定系统的鲁棒采样最优控制问题, 结果表示为一些矩阵不等式, 最后并给出了一个迭代算法, 仿真实例验证了算法的合理性. 因此本文研究对于填补不确定系统鲁棒采样最优控制的空白有较大的作用.

## 参考文献(References)

- [1] Hara S, Yamamoto Y and Fujioka H. Modern and classical analysis/synthesis methods in sampled-data control - a brief overview with numerical examples [A]. Proceeding of the 35th Conference on Decision and Control [C], Kobe, 1996, 1251 - 1256
- [2] Dullerud G E and Glover K. Robust performance of periodic systems [J]. IEEE Trans. on Automat. Contr., 1996, 41(8): 1146 - 1159
- [3] Chen T and Francis B. Optimal Sampled-Data Control Systems [M]. London Limited: Springer-Verlag, 1995
- [4] Lakshmikantham V, Bainov D D and Simenov P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific Publishing, 1989
- [5] Hu L S, Shao H H and Sun Y X. Constrained robust sampled-data control for a class of nonlinear uncertain systems [A]. IFAC 14th Triennial World Congress [C], Beijing, 1999, 521 - 526
- [6] Lam J and Cao Y Y. Simultaneous linear-quadratic optimal control design via static output feedback [J]. Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 1999, 9(9): 551 - 558

## 本文作者简介

胡立生 1964年生, 现在上海交通大学自动化系做博士后研究工作. 研究兴趣是具有时域约束的复杂系统的鲁棒控制以及在汽车控制中的应用.

邵惠鹤 1936年生, 现为上海交通大学自动化系教授, 博士生导师, 上海交通大学自动化研究所副所长. 主要研究方向是过程控制, 生化控制, 智能控制, 管控一体化等.

孙优贤 见本刊 2001 年第 1 期第 54 页.