

一种求解最速控制时间的方法

杜勤建

(四川大学电气信息学院·成都, 610065)

摘要: 针对跟踪系统中的最速控制问题, 采用牛顿法, 给出了一种求解最速控制时间的方法, 为最速控制理论应用于工程实践提供了一种新的途径。

关键词: 最速控制时间; 牛顿法; 跟踪系统

文献标识码: A

A Way to Get the Time of Time-Optimal Control

DU Qinjian

(College of Electrical Information, Sichuan University·Chengdu, 610065, P.R. China)

Abstract: Using Newton method, a way to get the time of time-optimal control in tracking system is given in this paper. A new approach for applying the theory of time-optimal control to engineering practice is provided.

Key words: time of time-optimal control; Newton method; tracking system

1 引言(Introduction)

时间最优控制应用在工程上, 通常的做法是: 求取开关线或开关面。这里采用求解最优控制量作用时间的方法, 实现最速控制。能否求出最速控制时间? 如何求解? 本文在这方面作了一些探讨。

2 问题描述(Problem statement)

考虑一具有三阶调节对象的跟踪控制系统, 受控部分如图 1 所示。

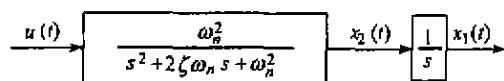


图 1 受控部分框图

Fig. 1 Block diagram of the controlled part

图中 $x_1(t)$ 是位置信号, $x_2(t)$ 是速度信号, $u(t)$ 是控制量, 满足 $|u(t)| \leq U_m$, U_m 为 $u(t)$ 允许的最大取值。由图 1 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \ddot{x}_2(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}_2(t) + \omega_n^2x_2(t) = \omega_n^2u(t). \end{cases} \quad (1)$$

设目标方位信号为 $r(t)$, 在跟踪系统快速调转阶段, 工程上通常认为

$$r(t) = a + bt,$$

其中 a 为初位移, b 为速度常数, 且应满足

$$|b| \leq U_m.$$

将系统状态方程表示成误差形式

$$x(t) = x_1(t) - r(t), \quad (\text{位置误差})$$

$$y(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{r}(t), \quad (\text{速度误差})$$

$$z(t) = \ddot{x}_1(t) - \ddot{r}(t), \quad (\text{加速度误差})$$

则规范化状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = z(t), \\ \dot{z}(t) = -\omega_n^2y(t) - 2\zeta\omega_n z(t) + \omega_n^2u'(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $u'(t) = u(t) - b$, 最速控制 $u^*(t) = \pm U_m$ (见文献[1])。

三阶系统最速控制切换区域由系统的开关面、开关线确定^[2], 最速控制轨迹如图 2 所示。

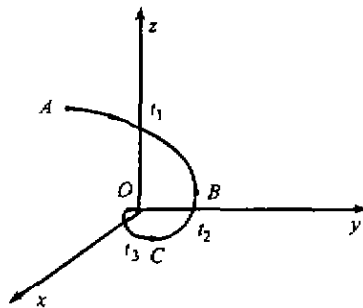


图 2 最速控制轨迹

Fig. 2 Path of time-optimal control

点 A 为状态空间 $[x(t), y(t), z(t)]$ 中任一初始状态点, 点 B 处于开关面上, 点 C 处于开关线上。最速控制量 $u^*(t)$ 在轨迹各段的作用时间, 如表 1 所示。

表1 最速控制过程
Table 1 Process of time-optimal control

轨迹	$u^*(t)$	作用时间
$\widehat{AB}$	$\pm U_m$	t_1
$\widehat{BC}$	$\mp U_m$	t_2
$\widehat{CO}$	$\pm U_m$	t_3

设初始状态为

$$x(t)|_{t=0} = x(0), y(t)|_{t=0} = y(0),$$

$$z(t)|_{t=0} = z(0).$$

求解式(2),得 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 表达式为:

$$x(t) = x(0) + \frac{2\xi\omega_n[y(0) + b - u^*(t)] + x(0)}{\omega_n^2} - \frac{2\xi\omega_n[y(0) + b - u^*(t)] + z(0)}{\omega_n^2} \cdot \exp(-\xi\omega_n t) \cos\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \frac{(1-2\xi^2)[y(0) + b - u^*(t)]\omega_n - \xi z(0)}{\omega_n^2 \sqrt{1-\xi^2}} \cdot \exp(-\xi\omega_n t) \sin\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + [u^*(t) - b]t, \quad (3)$$

$$y(t) = [y(0) + b - u^*(t)] \exp(-\xi\omega_n t) \cdot \cos\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \frac{\xi\omega_n[y(0) + b - u^*(t)] + z(0)}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \cdot \exp(-\xi\omega_n t) \sin\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + [u^*(t) - b], \quad (4)$$

$$z(t) = z(0) \exp(-\xi\omega_n t) \cos\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \frac{\omega_n[y(0) + b - u^*(t)] + \xi z(0)}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \exp(-\xi\omega_n t) \sin\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t. \quad (5)$$

在点 O 处有

$$\begin{cases} x(t_1 + t_2 + t_3) = 0, \\ y(t_1 + t_2 + t_3) = 0, \\ z(t_1 + t_2 + t_3) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

三个未知数,三个方程,可解。

3 牛顿法求解 (Solving process by Newton method)

采用牛顿法求解非线性方程组(6). $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ 和 $u_3^*(t)$ 表示各时间段上的最速控制量。

由式(3)~(5),在轨迹 $\widehat{AB}$ 段的 B 处有:

$$x(t_1) = x(t) \Big|_{u^*(t)=u_1^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} f(t_1), \quad (7)$$

$$y(t_1) = y(t) \Big|_{u^*(t)=u_1^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} g(t_1), \quad (8)$$

$$z(t_1) = z(t) \Big|_{u^*(t)=u_1^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} h(t_1). \quad (9)$$

以 $f(t_1)$, $g(t_1)$ 和 $h(t_1)$ 为初值,在轨迹 $\widehat{BC}$ 段的点 C 处有:

$$x(t_1 + t_2) = x(t) \Big|_{u^*(t)=u_2^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} l(f, g, h, t_2), \quad (10)$$

$$y(t_1 + t_2) = y(t) \Big|_{u^*(t)=u_2^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} m(g, h, t_2), \quad (11)$$

$$z(t_1 + t_2) = z(t) \Big|_{u^*(t)=u_2^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} n(g, h, t_2). \quad (12)$$

以 $l(f, g, h, t_2)$, $m(g, h, t_2)$ 和 $n(g, h, t_2)$ 为初值,在轨迹 $\widehat{CO}$ 段的点 O 处有:

$$x(t_1 + t_2 + t_3) = x(t) \Big|_{u^*(t)=u_3^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} p(l, m, n, t_3), \quad (13)$$

$$y(t_1 + t_2 + t_3) = y(t) \Big|_{u^*(t)=u_3^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} q(m, n, t_3), \quad (14)$$

$$z(t_1 + t_2 + t_3) = z(t) \Big|_{u^*(t)=u_3^*(t)} \stackrel{\Delta}{=} v(m, n, t_3). \quad (15)$$

据此可得非线性方程组:

$$\begin{cases} p(l, m, n, t_3) = 0, \\ q(m, n, t_3) = 0, \\ v(m, n, t_3) = 0, \end{cases}$$

其中,自变量为 t_1 , t_2 和 t_3 . 根据牛顿法,迭代公式为:

$$\begin{bmatrix} t_1(k+1) \\ t_2(k+1) \\ t_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_2(k) \\ t_3(k) \end{bmatrix} - J_k^{-1} \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \\ v_k \end{bmatrix},$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

其中 Jacobi 矩阵为

$$J_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_k}{\partial t_1} & \frac{\partial p_k}{\partial t_2} & \frac{\partial p_k}{\partial t_3} \\ \frac{\partial q_k}{\partial t_1} & \frac{\partial q_k}{\partial t_2} & \frac{\partial q_k}{\partial t_3} \\ \frac{\partial v_k}{\partial t_1} & \frac{\partial v_k}{\partial t_2} & \frac{\partial v_k}{\partial t_3} \end{bmatrix},$$

要求 J_k 非奇异,其中各项为:

$$\frac{\partial p}{\partial t_1} = \frac{\partial p}{\partial l} \left(\frac{\partial l}{\partial f} \cdot \frac{df}{dt_1} + \frac{\partial l}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dt_1} + \frac{\partial l}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt_1} \right) +$$

$$\frac{\partial p}{\partial m} \left(\frac{\partial m}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dt_1} + \frac{\partial m}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt_1} \right) +$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \left(\frac{\partial n}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dt_1} + \frac{\partial n}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt_1} \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t_2} = \frac{\partial p}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial t_2} + \frac{\partial p}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t_2} + \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial t_2}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t_3} = \frac{\partial p}{\partial t_3}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t_1} = \frac{\partial q}{\partial m} \left(\frac{\partial m}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dt_1} + \frac{\partial m}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt_1} \right) +$$

$$\frac{\partial q}{\partial n} \left(\frac{\partial n}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dt_1} + \frac{\partial n}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt_1} \right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t_2} = \frac{\partial q}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t_2} + \frac{\partial q}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial t_2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t_3} = \frac{\partial q}{\partial t_3}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} = \frac{\partial v}{\partial m} \left(\frac{\partial m}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dt_1} + \frac{\partial m}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt_1} \right) +$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} \left(\frac{\partial n}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dt_1} + \frac{\partial n}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt_1} \right), \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_2} = \frac{\partial v}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t_2} + \frac{\partial v}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial t_2}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_3} = \frac{\partial v}{\partial t_3}. \quad (24)$$

以上表达式中各项均可根据式(3)~(5)求得. 为了克服矩阵 J_k 可能出现的奇异或病态性, 可采用带阻尼因子的牛顿迭代公式:

$$\begin{bmatrix} t_1(k+1) \\ t_2(k+1) \\ t_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_2(k) \\ t_3(k) \end{bmatrix} - [J_k + \mu_k I]^{-1} \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \\ v_k \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

式中, μ_k 为阻尼因子, 其取值须满足 $[J_k + \mu_k I]$ 非奇异并保证剩余量范数递减^[3]. I 是单位矩阵.

4 计算机求解(Solving process by computer)

t_1, t_2 和 t_3 值的求取须借助于计算机进行迭代求解.

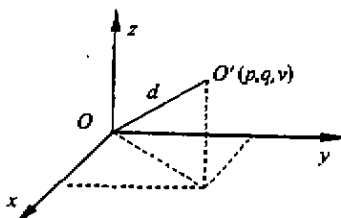


图3 状态点与原点间的距离

Fig. 3 Distance between a state point and the origin

设原点附近由 p, q, v 值确定的状态点 O' , 它到原点 O 的距离是:

$$d = |OO'| = \sqrt{p^2 + q^2 + v^2},$$

给定精度 ϵ , 当 $d \leq \epsilon$ 时, 迭代结束.

为了避免出现死循环, 可设定一最大迭代次数 $K_{\max}$, 当迭代次数 $K > K_{\max}$ 时, 认为求解失败, 结束. 程序框图如图4.

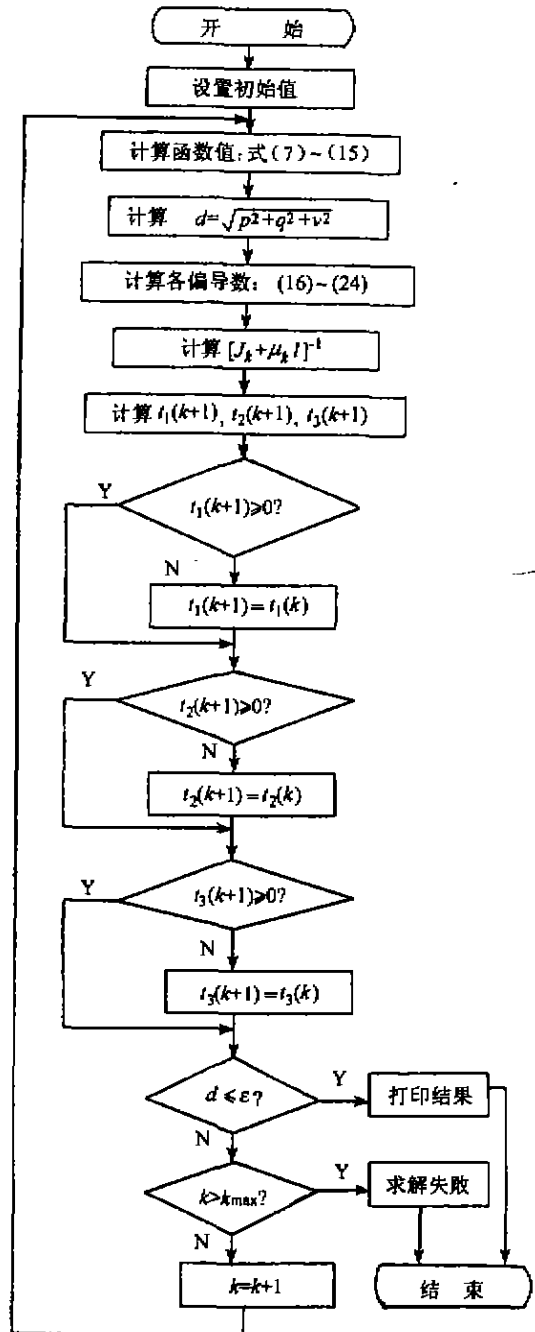


图4 程序流程图

Fig. 4 Flow chart of the program

5 应用及结论(Application and conclusion)

考虑图5所示的跟踪系统, 当 $t < T$ 时为最速

控制, $t \geq T$ 时为线性控制, $D(z)$ 为线性控制器:

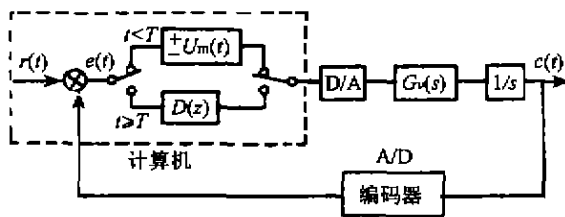


图 5 最速控制框图

Fig. 5 Block diagram of time-optimal control

表 2 计算结果

Table 2 Computational results

$x(0)$ (rad)	$y(0)$ (rad/s)	$z(0)$ (rad/s ²)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)
0.4	0	0	0.67015	0.00854	0.00506
0.39	0	0	0.65348	0.00854	0.00506
0.39	0.03	0	0.68736	0.00807	0.00524
0.4	-0.03	0	0.63869	0.00902	0.00488
-0.2	0.06	0	0.30703	0.00951	0.00470
-0.19	0.09	0	0.27955	0.01000	0.00452
-0.21	0.03	0	0.33710	0.00902	0.00488
-0.21	0.09	0	0.30854	0.01000	0.00452
0.4	0.1	-0.04	0.80210	0.00700	0.00566
0.3	0.03	0.1	0.52947	0.00807	0.00524
0.3	-0.03	-0.5	0.47990	0.00902	0.00488
-0.25	0.06	-0.1	0.38279	0.00951	0.00470
-0.25	-0.06	0.5	0.46567	0.00761	0.00542

设被控对象 $G_v(s)$ 传递函数为:

$$G_v(s) = \frac{K_p \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.084 \times 128.805^2}{s^2 + 2 \times 0.65 \times 128.805 s + 128.805^2}$$

其中最大转速

$$\omega_{\max} = 0.6 \text{ rad/s},$$

则

$$|U_m| = \omega_{\max} = 0.6 \text{ rad/s}.$$

选取初始状态空间中若干点, 计算其 t_1, t_2 和 t_3 值, 结果如表 2.

文中取 $\mu_k = 0.1$, 计算精度 ε 值为 1.0×10^{-5} . 按表 2 数据, 经仿真^[1]及实验^[4]表明, 采用此方法计算出的最速控制时间是完全正确的, 获得了预期结果.

参考文献 (References)

- [1] Du Qian and Ma Jianguang. A time-optimal control method switched by time [J]. Opto-Electronic Engineering, 1998, 25(5): 30-36 (in Chinese)
- [2] Zheng Yong and Li Ruitang. The time-optimal control of servomechanisms [J]. Control Theory and Applications, 1989, 6(4): 57-63 (in Chinese)
- [3] Hu Zuchi and Lin Yuanqu. Numerical Analysis [M]. Beijing: Higher Education Press, 1987 (in Chinese)
- [4] Du Qian. Experimental application of time-optimal control method switched by time [J]. Opto-Electronic Engineering, 1999, 26(6): 51-54 (in Chinese)

本文作者简介

杜勤建 1966 年生, 副教授, 1988 年北京航空航天大学自动控制系学士毕业, 1991 年中国科学院光电技术研究所硕士毕业. 现于四川大学电气信息学院任教. 主要从事计算机控制理论及应用方面的科研及教学工作.

(上接第 244 页)

- logic and neural networks [J]. International Journal of Intelligent Systems, 1993, 8: 727-748
- [2] Kosko B. Neural Network and Fuzzy Systems [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991
- [3] Berenji H R and Khedbar P. Learning and tuning fuzzy logic controllers through reinforcements [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1992, 3(5): 724-740
- [4] Nauck D and Kruse R. NEFCON-I: An X-window based simulator for neural fuzzy controllers [A]. Proc. IEEE Int. Conf. Neural Networks 1994 at IEEE World Congress on Computational Intelligence [C], Orlando, 1994
- [5] Nauck D and Kruse R. A fuzzy neural network learning fuzzy control rules and membership functions by fuzzy error backpropagation [A].

Proc. IEEE Int. Conf. on Neural Networks [C], San Francisco, 1993, 1022-1027

本文作者简介

吴耿锋 1945 年生, 教授, 博士生导师. 1970 年毕业于中国科技大学并在该校任教. 1998 年调任上海大学计算机学院常务副院长. 先后主持完成了国家自然科学基金重大项目子课题、国家地震局“八五”重点项目以及第三世界科学院国际合作项目等, 获安徽省 1998 年度和国家地震局 1999 年度科技进步二等奖. 目前主要兴趣是: 模糊控制, 模糊神经控制, 专家系统以及智能实时系统等.

傅忠谦 1959 年生, 副教授. 1982 年毕业于中国科技大学. 现为中国科技大学电子科学与技术系微机教研室副主任. 目前从事模糊控制, 模糊神经控制和计算机网络等研究.