文章编号: 1000-8152(2001)02-0249-04

带状态观测器系统的鲁棒容错控制

黄书鹏　王诗宓
(清华大学自动化系·北京,100084)

摘要: 对具有不确定性参数的状态观测器反馈系统,提出了传感器失效的鲁棒完整性控制方法,并对一定的二次性能指标具有最优性.设计方法简单、实用.

关键词: 容错控制; 完整性; 鲁棒控制; 状态观测器; 传感器失效
文献标识码: A

Robust Fault-Tolerant Control for Systems with a State Observer

HUANG Shupeng　and　WANG Shifu
(Department of Automation, Tsinghua University·Beijing, 100084, P.R.China)

Abstract: Proposed in this paper is a robust integrity control law designed for systems with parameter uncertainties by using a state observer. It attains the optimum under certain LQ criterion and it ensures the stabililty of the system when failures of sensors occur. The method is simple and practical.

Key words: fault-tolerant control; integrity; robust control; state observer; sensor failure

1 引言(Introduction)

现有的容错控制方法大都基于状态反馈,如文献[1~5].但在实际控制系统中,由于系统状态有时不易获得,往往采用状态观测器,故而研究带状态观测器系统的容错控制是很有意义的.现在这方面的研究成果还不多.另外,系统模型不可避免地与实际系统有一定的误差,确保容错控制律在系统参数不确定时仍然有效也非常重要.

本文针对上述问题进行了研究.结果显示,适当选取状态反馈阵 K 及观测器参数阵 H,可以达到闭环系统的鲁棒完整性,而且是二次性能指标下的最优控制律.在设计方法上,K 及 H 的设计被归结为两个 Riccati 方程的求解,两者虽然不具有完全的分离特性,但耦合很小.这就大大方便了控制律的设计.仿真结果表明,本文的方法是有效的,而且具有简单、实用的特点.

2 无参数摄动的系统(Systems without parameter uncertainties)

图1所示为带状态观测器的状态反馈系统.其中对象方程为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{1}$$

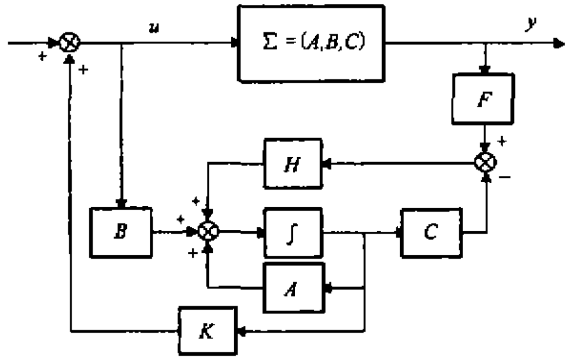

图 1　带状态观测器的状态反馈系统

Fig. 1　State feedback system with state observer

观测器方程为:

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC)\hat{x} + Bu + HCx, \tag{2}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

取控制律为 $u = K\hat{x}$, 并考虑传感器失效,引入失效阵

$$F = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m\},$$
$$0 \leqslant \sigma_i \leqslant 1,\ i = 1,2,\cdots,m,$$

其中 σ_i 为第 i 个传感器失效度,$\sigma_i = 1$ 表示传感器正常,$\sigma_i = 0$ 表示完全失效,$0 < \sigma_i < 1$ 表示部分失效.则闭环系统的方程为:

收稿日期:1999-05-28; 收修改稿日期:2000-06-13.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ HFC & A - HC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

引入状态变换

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix},$$

可得

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ H(I - F)C & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

定义代数 Riccati 方程

$$P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 - P_1B(2R^{-1} - I)B^{\mathrm{T}}P_1 + C^{\mathrm{T}}C + Q_1 = 0, \tag{5}$$

并考虑性能指标

$$J = \int_0^{\infty} \{x_1^{\mathrm{T}}[Q_1 + C^{\mathrm{T}}C + P_1B(I - R^{-1})B^{\mathrm{T}}P_1]x_1 + u^{\mathrm{T}}Ru\}\mathrm{d}t, \tag{6}$$

其中 $Q_1 > 0, R > 0$. 则有如下定理.

定理 1 对状态完全可控和可观的系统(1),控制律

$$u = K\hat{x} = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1\hat{x} \tag{7}$$

成为性能指标(6)的最优完整性控制律的充分条件为: H 使 $A - HC$ 稳定,并使 Riccati 方程

$$P_2(A - HC) + (A - HC)^{\mathrm{T}}P_2 + P_2HH^{\mathrm{T}}P_2 + \epsilon Q_2 + K^{\mathrm{T}}K = 0 \tag{8}$$

有非负定解.其中 P_1 为 Riccati 方程(5)的非负定解, $Q_2 > 0, \epsilon > 0$.

证 取 Lyapunov 函数

$$V(\bar{x}) = V_1(x_1) + V_2(x_2) = x_1^{\mathrm{T}}P_1x_1 + x_2^{\mathrm{T}}P_2x_2,$$

$$\dot{V}_1(x_1) = \dot{x}_1^{\mathrm{T}}P_1x_1 + x_1^{\mathrm{T}}P_1\dot{x}_1 = x_1^{\mathrm{T}}(P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1BK + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P_1)x_1 - x_1^{\mathrm{T}}P_1BKx_2 - x_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P_1x_1,$$

利用文献[6]中的不等式 $X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant X^{\mathrm{T}}X + Y^{\mathrm{T}}Y$ 和 $(-X^{\mathrm{T}})Y + Y^{\mathrm{T}}(-X) \leqslant X^{\mathrm{T}}X + Y^{\mathrm{T}}Y$ 可得

$$\begin{aligned} &\dot{V}_1(x_1) \leqslant \\ &x_1^{\mathrm{T}}(P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1BK + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P_1)x_1 + \\ &x_1^{\mathrm{T}}P_1BB^{\mathrm{T}}P_1x_1 + x_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Kx_2 = \\ &x_1^{\mathrm{T}}[P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 - P_1B(2R^{-1} - \\ &I)B^{\mathrm{T}}P_1]x_1 + x_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Kx_2. \end{aligned}$$

同理可得

$$\dot{V}_2(x_2) \leqslant x_2^{\mathrm{T}}[P_2(A - HC) + (A - HC)^{\mathrm{T}}P_2 + P_2HH^{\mathrm{T}}P_2]x_2 + x_1^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(I - F)(I - F)Cx_1.$$

由于 $(I - F)(I - F) \leqslant I$, 故

$$\dot{V}_2(x_2) \leqslant x_2^{\mathrm{T}}[P_2(A - HC) + (A - HC)^{\mathrm{T}}P_2 + P_2HH^{\mathrm{T}}P_2]x_2 + x_1^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cx_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) \leqslant\ & x_1^{\mathrm{T}}[P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 - P_1B(2R^{-1} - I)B^{\mathrm{T}}P_1 + \\ & C^{\mathrm{T}}C]x_1 + x_2^{\mathrm{T}}[P_2(A - HC) + \\ & (A - HC)^{\mathrm{T}}P_2 + P_2HH^{\mathrm{T}}P_2 + K^{\mathrm{T}}K]x_2 = \\ & -x_1^{\mathrm{T}}Q_1x_1 - \epsilon x_2^{\mathrm{T}}Q_2x_2 < 0. \end{aligned}$$

由稳定性理论可知,该系统具有完整性.考虑到观测器存在的条件,系统应是可观的;同时,为保证 Riccati 方程(5)有解,系统还应是可控的.

由最优控制理论可知,对应式(6)目标的最优控制律为:

$$u = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px,$$

其中 P 满足

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q_1 + C^{\mathrm{T}}C + P_1B(I - R^{-1})B^{\mathrm{T}}P_1 = 0.$$

由式(5)可知, $P = P_1$ 为上述方程的解. 证毕.

3 鲁棒系统的设计(Design of robust systems)

设对象存在参数摄动

$$\begin{cases} \dot{x} = [A + \Delta A(t)]x + [B + \Delta B(t)]u, \\ y = [C + \Delta C(t)]x, \end{cases} \tag{9}$$

其中摄动满足: $\sigma_{\max}[\Delta A(t)] \leqslant \alpha, \sigma_{\max}[\Delta B(t)] \leqslant \beta, \sigma_{\max}[\Delta C(t)] \leqslant \gamma, \sigma_{\max}[\cdot]$ 代表最大奇异值.为方便起见,以下均将 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ 和 $\Delta C(t)$ 分别写为 $\Delta A, \Delta B$ 和 ΔC. 则闭环系统的方程为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK + \Delta A + \Delta BK & -(B + \Delta B)K \\ H(I-F)C + \Delta A + \Delta BK - HF\Delta C & A - HC - \Delta BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

定义代数 Riccati 方程

$$P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 - (2\lambda - 2\beta^2\lambda^2 - 1)P_1BB^{\mathrm{T}}P_1 + (1 + \alpha^2 + \beta^2)P_1^2 + 3I + C^{\mathrm{T}}C + Q_1 = 0, \tag{11}$$

并考虑性能指标

$$J = \int_0^{\infty} \{x_1^{\mathrm{T}}[Q_1 + 3I + C^{\mathrm{T}}C + (1 + \alpha^2 + \beta^2)P_1^2 + (2\beta^2\lambda^2 - \lambda + 1)P_1BB^{\mathrm{T}}P_1]x_1 + \lambda^{-1}u^{\mathrm{T}}u\}\mathrm{d}t, \tag{12}$$

其中 $Q_1 > 0, \lambda > 0$. 则有如下定理.

定理 2 对状态完全可控和可观的系统(9),控

制律

$$u = K\hat{x} = -\lambda B^{\mathrm{T}} P_1 \hat{x} \tag{13}$$

成为性能指标(12)的最优完整性控制律的充分条件为：H 使 $A - HC$ 稳定，并使 Riccati 方程

$$P_2(A-HC)+(A-HC)^{\mathrm{T}}P_2+(1+\gamma^2)P_2HH^{\mathrm{T}}P_2+(1+\alpha^2+\beta^2)P_2^2+\varepsilon Q_2+3K^{\mathrm{T}}K=0 \tag{14}$$

有非负定解. 其中 P_1 为 Riccati 方程(11)的非负定解，$Q_2 > 0, \varepsilon > 0$.

证　最优性的证明与定理1类似，下面只证明完整性.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x_1) \leqslant\ & x_1^{\mathrm{T}}(P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1BK + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P_1 + \\ & I + P_1\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1P_1 + K^{\mathrm{T}}\Delta B\Delta B^{\mathrm{T}}K + \\ & P_1BB^{\mathrm{T}}P_1 + P_1\Delta B\Delta B^{\mathrm{T}}P_1)x_1 + 2x_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Kx_2.\end{aligned}$$

由于 $XX^{\mathrm{T}} \leqslant [\sigma_{\max}(X)]^2 I$，故

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x_1) \leqslant\ & x_1^{\mathrm{T}}(P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 - (2\lambda - \beta^2\lambda^2 - 1)P_1BB^{\mathrm{T}}P_1 + \\ & (1+\alpha^2+\beta^2)P_1^2 + I)x_1 + 2x_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Kx_2.\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_2) \leqslant\ & x_2^{\mathrm{T}}\{P_2(A-HC) + (A-HC)^{\mathrm{T}}P_2 + \\ & P_2[(1+\gamma^2)HH^{\mathrm{T}} + (1+\alpha^2+\beta^2)I]P_2 + \\ & K^{\mathrm{T}}K\}x_2 + x_1^{\mathrm{T}}(2I + C^{\mathrm{T}}C + \beta^2K^{\mathrm{T}}K)x_1, \\ \dot{V}(\tilde{x}) \leqslant\ & x_1^{\mathrm{T}}[P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1 - (2\lambda - 2\beta^2\lambda^2 - 1)\cdot \\ & P_1BB^{\mathrm{T}}P_1 + (1+\alpha^2+\beta^2)P_1^2 + C^{\mathrm{T}}C + \\ & 3I]x_1 + x_2^{\mathrm{T}}[P_2(A-HC) + (A-HC)^{\mathrm{T}}P_2 + \\ & (1+\gamma^2)P_2HH^{\mathrm{T}}P_2 + (1+\alpha^2+\beta^2)P_2^2 + 3K^{\mathrm{T}}K]x_2 = \\ & -x_1^{\mathrm{T}}Q_1x_1 - \varepsilon x_2^{\mathrm{T}}Q_2x_2 < 0.\end{aligned}$$

证毕.

在定理2中，验证方程(14)是否存在非负定解是控制律设计的关键问题，对此可以采用如下定理.

定理3[7]　Riccati方程(14)存在非负定解的充要条件是赫米特矩阵

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} -(A-HC) & (1+\alpha^2+\beta^2)I+(1+\gamma^2)HH^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon Q_2+3K^{\mathrm{T}}K & (A-HC)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

没有纯虚特征值.

由定理2可以看出，在反馈阵 K 与观测阵 H 的设计中，两者的设计虽然不具有完全的分离特性，但其耦合是很小的. 反馈阵 K 可以依据性能指标 J 的要求进行设计，它的选择并不考虑观测阵 H 的设计；在设计观测阵 H 时，要考虑到反馈阵 K 的影响，但其影响仅仅体现为式(14)中左部的最后一项，在设计时并不需要对两者进行平衡调整. 设计步骤可以总结如下：

1) 计算 α,β,γ；

2) 依据性能指标 J 的要求，确定 Q_1 及 λ；

3) 根据式(11)计算 P_1 并据式(13)计算 K；

4) 依据状态观测器极点的要求，对 $A - HC$ 进行极点配置，确定 H；

5) 确定 Q_2 及 ε；

6) 依据定理3验证方程(14)是否存在非负定解 P_2. 是则转7)，否则转4)，对 $A - HC$ 重新配置极点，以调整 H；

7) K 及 H 阵即为所求结果.

在确定 Q_1 时，要充分考虑到式(12)中有关 P_1 及 λ 的项对性能指标的影响，要留出充分的裕量，以满足性能指标的要求. 由证明过程可以看出，ε 的选择有很大裕量，设计时只需选择较小正数即可.

4　示例(Illustrative example)

考虑如下系统 $\{A + \Delta A(t), B + \Delta B(t), C + \Delta C(t)\}$，其中

$$A = \begin{bmatrix} -2.8 & 0.2 \\ 0.3 & -2.7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.15 \\ 0.35 & 0.7 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0.1299\sin(t) & -0.1001\cos(t) \\ 0.0752\sin(t) & 0.1732\cos(t) \end{bmatrix},$$

$$\Delta B(t) = \begin{bmatrix} 0.0501\cos(t) & -0.0433\sin(t) \\ 0.0866\cos(t) & 0.0245\sin(t) \end{bmatrix},$$

$$\Delta C(t) = \begin{bmatrix} 0.0411\sin(t) & -0.0809\cos(t) \\ 0.0566\sin(t) & 0.0588\cos(t) \end{bmatrix}.$$

计算 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ 和 $\Delta C(t)$ 的最大奇异值，得 $\alpha = 0.2, \beta = 0.1, \gamma = 0.1$. 取 $Q_1 = \mathrm{diag}\{1,1\}, \lambda = 1.5$. 据方程(11)和式(13)分别得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7088 & 0.1006 \\ 0.1006 & 0.7477 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -1.0631 & -0.1509 \\ -0.1509 & -1.1216 \end{bmatrix}.$$

将 $A - HC$ 的极点配置在$(-3.4, -3.3)$，可得 $H = \begin{bmatrix} 0.9412 & 0.0840 \\ -0.1176 & 1.0252 \end{bmatrix}$. 取 $Q_2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4.3 \end{bmatrix}, \varepsilon = 0.2$，则可验证方程(14)存在非负定解

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.6824 & 0.2607 \\ 0.2607 & 0.7669 \end{bmatrix}.$$

将所得的控制律代入闭环系统方程. 对不同的传感器失效情况，验证闭环系统的极点，所得结果如

表1.从表1中可以看出,系统对任意传感器失效都是稳定的,这说明系统对传感器失效具有完整性.同时,从设计过程可以看出,反馈阵 K 与观测阵 H 的设计耦合性是很小的,设计方法简单、有效.

表1 各种传感器失效情况下闭环系统的极点

Table 1 Poles of the closed-loop system under failures of sensors

	传感器正常	传感器1完全失效	传感器2完全失效	传感器1,2均完全失效
闭环系统极点	-3.9304	-2.8049	-2.6165	-2.5000
	-3.7543	-4.3165	-3.9065	-4.2719
	-3.4000	-3.4066	-4.5558	-4.6128
	-3.3000	-3.8567	-3.3059	-3.0000

5 结论(Conclusions)

对具有参数不确定性的带状态观测器的反馈系统,本文设计了对传感器失效的鲁棒完整性控制律.本文方法的主要优点在于:

1) 研究对象为存在状态观测器的系统.一般系统在采用状态反馈时,系统状态往往不易获得,采用状态观测器是常用的方法,故而本文方法对容错控制理论的应用具有实际意义.

2) 反馈阵 K 与观测阵 H 的设计具有较小的耦合性,避免了设计过程中对两者大量的反复设计,设计方法简单、实用、有效.

3) 通过大量的仿真研究表明,如果开环控制对象稳定或失稳并不严重,采用本文设计步骤总可以得到鲁棒完整性控制律.但对稳定性极差的开环控制对象,采用本文的迭代法有时难以得到收敛的结果,深入的理论分析将是作者进一步的研究工作.

参考文献(References)

[1] Cho K H and Lim J T. Fault-tolerant supervisory control of discrete event dynamical systems [J]. Int. J. of Systems Science, 1997, 28(10): 1001 - 1009

[2] Veillette R J. Reliable linear-quadratic state-feedback control [J]. Automatica, 1995, 31(1): 137 - 143

[3] Wu N E and Chen T J. Feedback design in control reconfigurable systems [J]. Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 1996, 6(6): 561 - 570

[4] Sun Jinsheng, Li Jun and Feng Zuangang, et al. Design of robust fault-tolerant control systems [J]. Control Theory and Applications, 1994, 11(3): 376 - 380 (in Chinese)

[5] Veillette R J, Medanic J and Perkins W R. Design of reliable control systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1992, 37(3): 290 - 304

[6] Ni Guoxi. Common Matrix Theory and Methods [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1984, 91 - 115 (in Chinese)

[7] Gohberg I, Lancaster P and Rodman L. On Hermitian solutions for the symmetric algebraic Riccati equation [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1986, 24(6): 1323 - 1334

本文作者简介

黄书鹏 1975年生.1996年获哈尔滨工程大学工学学士学位.1999年获清华大学工学硕士学位.研究方向为容错控制.

王诗宓 1944年生.清华大学自动化系教授.1967年毕业于清华大学动力机械系.1981和1983年获英国曼彻斯特大学理工学院硕士和博士学位.目前主要研究预测控制,容错控制及其在过程控制中的应用.