文章编号: 1000-8152(2001)02-0260-03

单滞后时变区间动力系统的指数稳定性*

孙继涛
(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640; 同济大学数学研究所·上海, 200331)
邓飞其 刘永清
(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640)

摘要: 用矩阵测度和时滞微分不等式研究了单滞后时变区间动力系统 $\dot{x}(t)=N[P(t),Q(t)]x(t)+N[C(t),D(t)]x(t-\tau),\ \tau\geqslant 0$ 的指数稳定性, 给出了其指数稳定的判别准则, 推广和改进了文[1~3]的工作.

关键词: 时变区间系统; 时滞; 指数稳定; 矩阵测度; 时滞微分不等式
文献标识码: A

Exponential Stability of Time-Varying Interval Dynamical Systems with Time Delay

SUN Jitao
(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P.R.China)
(Institute of Mathematics, Tongji University · Shanghai, 200331, P.R.China)
DENG Feiqi and LIU Yongqing
(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P.R.China)

Abstract: Investigate the exponential stability for a kind of time-varying interval dynamical systems with time delay: $\dot{x}(t)=N[P(t),Q(t)]x(t)+N[C(t),D(t)]x(t-\tau),\tau\geqslant 0$. The sufficient conditions of exponential stability about this system are obtained by matrix measure and delay differential inequality, the results of the paper [1~3] are extended and improved.

Key words: time-varying interval systems; time delay; exponential stability; matrix measure; delay differential inequality

1 引言(Introduction)

在实际控制问题中,许多系统由于模型的误差、测量的误差和线性化近似等,不确定性就会出现在控制系统中,时间滞后现象是经常出现的,它常常是导致系统不稳定的根源,因此,关于不确定系统和不确定时滞系统的鲁棒稳定性研究,具有重要的理论意义和实际应用价值,近年来已引起国内外学者的极大兴趣[1~11].关于滞后区间动力系统的指数稳定性研究,作者往往先是研究滞后区间动力系统的渐近稳定性,然后用一个变换而得到系统的指数稳定性判据[1~4].

本文用矩阵测度和时滞微分不等式研究比文[1~3]更广一类的单滞后时变区间动力系统

$$\dot{x}(t)=N[P(t),Q(t)]x(t)+N[C(t),D(t)]x(t-\tau),\tau\geqslant 0 \quad (1)$$

的指数稳定性,得到了系统(1)指数稳定的充分条件,推广和改进了文[1~3]的工作.系统(1)中, $N[P(t),Q(t)]=\{A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}\mid p_{ij}(t)\leqslant a_{ij}(t)\leqslant q_{ij}(t),i,j=1,2,\cdots,n,t\geqslant t_0, p_{ij}(t), q_{ij}(t), a_{ij}(t)$ 均是连续函数, $P(t)=(p_{ij}(t))_{n\times n}, Q(t)=(q_{ij}(t))_{n\times n}\}$.

先介绍矩阵测度的概念.

一个方阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 的测度定义如下

$$\mu(A(t))=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\|I+\epsilon A(t)\|-1}{\epsilon},$$

I 为单位矩阵.

上式中的范数 $\|\cdot\|$ 分别是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的矩阵范数

$$\|A\|_1=\max_j\sum_{i=1}^n|a_{ij}|,\ \|A\|_2=[\lambda_{\max}(A^*A)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|,\ \|A\|_\omega=\max_j\sum_{i=1}^n\frac{\omega_i}{\omega_j}|a_{ij}|$$

时,可得出相应的矩阵测度 μ 为

* 基金项目:国家自然科学基金(69874015)重点项目和高等学校骨干教师资助计划资助项目.
收稿日期:1999-10-07; 收修改稿日期:2000-06-12.

$$\mu_1(A) = \max_j\{a_{jj} + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} |a_{ij}|\},$$

$$\mu_2(A) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(A^* + A),$$

$$\mu_\infty(A) = \max_i\{a_{ii} + \sum_{j\neq i,j=1}^{n} |a_{ij}|\},$$

$$\mu_\omega(A) = \max_j\{a_{jj} + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} \frac{\omega_i}{\omega_j} |a_{ij}|\},$$

其中 A^* 表示 A 的共扼转置，$\lambda_{\max}[B]$ 表示 B 的最大特征值.

再介绍一个引理.

引理[12] 设 $P(t)$ 是在区间 $[t_0-\tau,+\infty)$ 上的非负连续函数，满足 $t\geqslant t_0$ 时 $\dot P(t)\leqslant -a(t)P(t)+b(t)P_t$，这里 $\tau\geqslant 0$，$a(t)$ 和 $b(t)$ 连续且至少有一个有界，$P_t=\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\{P(t+\theta)\}$，又 $\inf\limits_{t\geqslant t_0}\{a(t)-b(t)\}>0$，则存在正数 η，使得

$$P(t)\leqslant P_{t_0}\exp(-\eta(t-t_0)).$$

对任意的 $A(t)\in \mathbb{N}[P(t),Q(t)]$，$B(t)\in\mathbb{N}[C(t),D(t)]$，考虑系统

$$\dot x(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau), \qquad (2)$$

设 $x(t)$ 是系统(2)的解，则 $t\geqslant t_0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}|x(t)|_\cdot}{\mathrm{d}t} - \mu_\cdot(A(t))|x(t)|_\cdot - \|B(t)\|_\cdot |x(t-\tau)|_\cdot =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}[|x(t+\varepsilon)|_\cdot - \|I+\varepsilon A(t)\|_\cdot |x(t)|_\cdot - \|B(t)\|_\cdot |x(t-\tau)|] \leqslant$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}|x(t-\tau)-x(t)-\varepsilon A(t)x(t)-B(t)x(t-\tau)|_\cdot,$$

由于 $x(t)$ 是系统(2)的解，故上式右端为零，因此

$$\frac{\mathrm{d}|x(t)|_\cdot}{\mathrm{d}t}\leqslant \mu_\cdot(A(t))|x(t)|_\cdot + \|B(t)\|_\cdot |x(t-\tau)|_\cdot,$$

由引理知

定理 1 如果对任意给定的 $A(t)\in\mathbb{N}[P(t),Q(t)]$，$B(t)\in\mathbb{N}[C(t),D(t)]$，$\mu_\cdot(A(t))$ 与 $\|B(t)\|$ 中至少有一个有界，且 $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\{\mu_\cdot(A(t))+\|B(t)\|_\cdot\}<0$，则单滞后区间动力系统(1)是指数稳定的.

现设

$$\mathring{A}(t) = \lambda_1 P(t) - (1-\lambda_1)Q(t),$$

$$\mathring{B}(t) = \lambda_2 C(t) + (1-\lambda_2)D(t),$$

$$\lambda_i\in[0,1],(i=1,2),$$

$$\Delta A = A(t)-\mathring{A}(t),\ \Delta B = B(t)-\mathring{B}(t),$$

$M(t)=Q(t)-P(t)$，$E(t)=D(t)-C(t)=(e_{ij}(t))_{n\times n}$，则当 $\cdot=1,\omega,\infty$ 时，由 $\mu_\cdot(A(t))$ 和 $\|A(t)\|_\cdot$ 的定义知

$$\mu_\cdot(A(t)) = \mu_\cdot(\mathring{A}(t)+\Delta A)\leqslant$$

$$\mu_\cdot(\mathring{A}(t)) + \mu_\cdot(\Delta A)\leqslant$$

$$\mu_\cdot(\mathring{A}(t)) + \max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t)),$$

$$\|B(t)\|_\cdot\leqslant \|\mathring{B}(t)+\Delta B\|_\cdot\leqslant$$

$$\|\mathring{B}(t)\|_\cdot + \max(1-\lambda_2,\lambda_2)\|E(t)\|_\cdot.$$

又

$$\mu_2(\Delta A)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\Delta A+\Delta A^{\mathrm T})\leqslant\frac{1}{2}\mu_\cdot(\Delta A+\Delta A^{\mathrm T})\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t)+M(t)^{\mathrm T}),$$

故

$$\mu_2(A(t))\leqslant$$

$$\mu_2(\mathring{A}(t)) + \frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t)+M(t)^{\mathrm T}).$$

由于

$$\Delta B^{\mathrm T}\Delta B\leqslant$$

$$n[\max(1-\lambda_2,\lambda_2)]^2\mathrm{diag}(D(t)-C(t))^{\mathrm T}(D(t)-C(t)),$$

故

$$\|\Delta B\|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}(\Delta B^{\mathrm T}\Delta B)\leqslant$$

$$\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\sqrt{n\lambda_{\max}\mathrm{diag}(E^{\mathrm T}(t)E(t))}.$$

这样，由定理 1，我们得到

定理 2 如存在 $\lambda_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$，使得下列条件中至少有一个成立

1) $\mu_\cdot(\mathring{A}(t)+\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t))$ 或 $\|\mathring{B}(t)\|_\cdot+\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\|E(t)\|_\cdot$ 有界且 $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\{\mu_\cdot(\mathring{A}(t)+\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t))+\|\mathring{B}(t)\|_\cdot+\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\|E(t)\|_\cdot\}<0$;

2) $\mu_2(\mathring{A}(t))+\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t)+M(t)^{\mathrm T})$ 或 $\|\mathring{B}(t)\|_2+\max(1-\lambda_2,\lambda_2)[n\lambda_{\max}\mathrm{diag}(E^{\mathrm T}(t)E(t))]^{\frac{1}{2}}$ 有界且 $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\{\mu_2(\mathring{A}(t))+\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t)+M(t)^{\mathrm T})+\|\mathring{B}(t)\|_2+\max(1-\lambda_2,\lambda_2)[n\lambda_{\max}\mathrm{diag}(E^{\mathrm T}(t)E(t))]^{\frac{1}{2}}\}<0$，则单滞后时变区间动力系统(1)是指数稳定的.这里 $\cdot=1,\omega,\infty$.

记 $\Delta B=(\bar b_{ij}(t))_{n\times n}$，则 $\Delta B^{\mathrm T}\Delta B$ 中 (i,j) 的元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\bar b_{ki}(t)\bar b_{kj}(t)$.

$$\lambda_{\max}(\Delta B^{\mathrm T}\Delta B)\leqslant$$

$$\min[\max_i\sum_{j=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}\bar b_{ki}(t)\bar b_{kj}(t)|,\max_j\sum_{i=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}\bar b_{ki}(t)\bar b_{kj}(t)|]\leqslant$$

$$[\max(1-\lambda_2,\lambda_2)]^2\min[\max_i\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n e_{ki}(t)e_{kj}(t),$$

$$\max_j\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n e_{ki}(t)e_{kj}(t)],$$

又若记

$$G(t)=(g_{ij}(t))_{n\times n},$$

$$g_{ij}(t)=\max(|p_{ij}(t)|,|q_{ij}(t)|),\ (i\neq j),$$

$$g_{ii}(t)=q_{ii}(t),(i,j=1,2,\cdots,n).$$

则对任意给定的 $A(t)\in\mathbb{N}[P(t),Q(t)]$, $\cdot=1,\omega,\infty$ 时, $\mu_\cdot(A(t))\leqslant\mu_\cdot(G(t))$,由此我们得到

定理3 如果存在 $\lambda_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$,使得下列条件中至少有一个成立

1) $\mu_2(\mathring{A}(t))+\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t)+M(t)^{\mathrm{T}})$ 或 $\|\mathring{B}(t)\|_2+\max(1-\lambda_2,\lambda_2)[\min[\max_i\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n e_{ki}(t)e_{kj}(t),\max_j\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n e_{ki}(t)e_{kj}(t)]]^{\frac{1}{2}}$ 有界且

$$\sup_{t\geqslant t_0}\{\mu_2(\mathring{A}(t))+\frac{1}{2}\max(1-\lambda_1,\lambda_1)\mu_\cdot(M(t)+M(t)^{\mathrm{T}})+\|\mathring{B}(t)\|_2+\max(1-\lambda_2,\lambda_2)[\min[\max_i\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n e_{ki}(t)e_{kj}(t),\max_j\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n e_{ki}(t)e_{kj}(t)]]^{\frac{1}{2}}\}<0;$$

2) $\mu_\cdot(G(t))$ 或 $\|\mathring{B}(t)\|_\cdot+\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\|E(t)\|_\cdot$ 有界且 $\sup_{t\geqslant t_0}\{\mu_\cdot(G(t))+\|\mathring{B}(t)\|_\cdot+\max(1-\lambda_2,\lambda_2)\|E(t)\|_\cdot\}<0$,则具单滞后的时变区间动力系统(1)是指数稳定的,这里 $\cdot=1,\omega,\infty$.

例 取

$$P(t)=\begin{bmatrix}-6+\sin t & -2\\ -2 & -5+\cos t\end{bmatrix},$$

$$Q(t)=\begin{bmatrix}-5 & 1+\sin t\\ 1-\cos t & -4\end{bmatrix},$$

$$C(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \cos t-\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix},\quad D(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \cos t & 0\end{bmatrix},$$

则有

$$G=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix},\quad \mu_\infty(G(t))=-2,$$

$$E(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix},\quad \|E(t)\|_\infty=\frac{1}{2}.$$

取 $\lambda_2=\frac{1}{2}$,则又有

$$\mathring{B}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \cos t-\frac{1}{4} & 0\end{bmatrix},\quad \|\mathring{B}(t)\|_\infty=\frac{4}{3}.$$

故定理3的条件2)成立,因此具有单滞后的时变区间动力系统(1)指数稳定.

参考文献(References)

[1] Liao Xiaoxin, Wang Xiaojun and Fu Yuli. Stability and decay rate of interval delay dynamical systems [J]. Appl. Math. J. Chinese Univ. 1992,7(3):391–402

[2] Liu Yongqing and Tang Gongyou. Theory and Application of Large-Scale Dynamic Systems [M]. Vol.3. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1992(in Chinese)

[3] Zhang Yinping and Sun Jitao. Stability of delay interval dynamical systems [J]. Control Theory and Applications, 1994,11(3):371–375(in Chinese)

[4] Sun Jitao. Stability and decay rate of interval time-varying dynamical systems with multidelay [J]. Chin. J. of Auto., 1996,8(3):243–247

[5] Sun Y J, Hsieh J G and Yang H C. On the stability of uncertain systems with multiple time-varying delays [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997,42(1):101–105

[6] Wu H. Eigenst ructure assignment-based robust stability conditions for uncertain systems with multiple time-varying delays [J]. Automatica, 1997,33(1):97–102

[7] Luo J S, Vanden Bosch P P J, Weiland S and Goldenberge A. Design of performance robustness for uncertain linear systems with state and control delays [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1998,43(11):1593–1596

[8] Cao Yongyan and Sun Youxian. Robust stabilization of uncertain systems with time-varying multistate delay [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1998,43(10):1484–1488

[9] Gu Yongru, Wang Shouchen and Li Qiqing, et al. On delay-dependent stability and decay estimate for uncertain systems with time-varying delay [J]. Automatica, 1998,34(8):1035–1039

[10] Meheli D, Hamid M A and Perrin F. Robustness and optimality of linear quadratic controllor for uncertain systems [J]. Automatica, 1996,32(7):1081–1083

[11] Liu Xingyu, Gao Liqun and Zhang Wenli. Decentralized stabilization and output tracking for a class of uncertain composite systems [J]. Information and Control, 1998,27(5):342–350 (in Chinese)

[12] Hou Chunhai and Qian Jixin. Remarks on quantitative analysis for a family of scalar delay differential inequalities [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1999,44(2):334–336

本文作者简介

孙继涛 1963年生.同济大学应用数学系教授.华南理工大学自动控制工程系在职博士生.对常微分方程理论与应用感兴趣,在国内外发表学术论文60余篇,获科技进步奖四项.

邓飞其 1962年生.1983年、1997年分别于湖南大学、华南理工大学获理学学士学位、工学博士学位,现为华南理工大学自动控制工程系教授.主要研究方向为时滞系统,随机系统,大系统的控制理论.

刘永清 见本刊2001年第1期第108页.