

文章编号: 1000-8152(2001)02-0266-04

全局最优鲁棒控制器设计*

李连锋 王广雄 姚 远

(哈尔滨工业大学控制工程系·哈尔滨, 150001)

摘要: 研究了一类时变不确定系统, 证明了求解全局最优鲁棒性能问题的一组线性矩阵不等式(LMI), 给出了相应全局最优鲁棒控制器的具体设计方法. 并通过算例对控制器的设计作了进一步的说明.

关键词: 全局最优; 鲁棒控制器; 常值对角标定; 线性矩阵不等式

文献标识码: A

Global Optimal Robust Controller Design

LI Lianfeng, WANG Guangxiong and YAO Yuan

(Department of Automatic Control, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, P.R. China)

Abstract: A class of time-varying uncertain system is studied in this paper. A set of LMIs, which is corresponding with the solution to the global optimal robust performance problem, is proved. The design method of the global optimal robust controller is given. An example is also given to illustrate the design procedure.

Key words: global optimal; robust controller; constant diagonal scaling; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

对不确定系统的鲁棒性能设计, 如果不确定性是时变的, 可以应用常值标定的方法来对鲁棒性能进行优化^[1,2], 对一般的常值标定问题, 常用迭代方法来解^[3], 但迭代方法不能保证全局最优.

对常值对角标定系统, 文[4]给出了性能指标的全局最优解, 是将非凸约束用多个凸约束逼近, 给出了一种三角覆盖的逼近算法, 从而可以应用 LMI(线性矩阵不等式)求取全局最优的性能指标. 文[5]以引理的形式给出了此算法中所用到的 LMI, 可以求取性能指标的最优值, 但[4]、[5]都没有给出控制器的求解方法. 本文基于这种逼近算法, 对常值对角标定系统最优鲁棒性能设计问题进行了研究, 证明了相应的 LMI, 给出了用 LMI 来求解的步骤和全局最优鲁棒控制器的设计方法.

2 准备知识(Preliminaries)

设广义对象:

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

w_1, z_1 和 w_2, z_2 组成广义对象(1)的性能输入 $[w_1,$

$w_2]^T, [z_1, z_2]^T$.

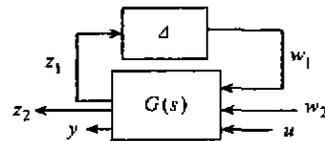


图 1 LFT 形式的对象
Fig. 1 Plant in LFT form

不失一般性, 可以假设 $\dim(w_1) = \dim(z_1) = q$, 并设 Δ 属于如下块对角结构算子集合:

$$\Delta := \{\text{diag}(\Delta = \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}) \mid \Delta_i \in \Delta_i,$$

$$\|\Delta_i\|_\infty \leq 1\}, q_1 + \dots + q_{m-1} = q,$$

Δ_i 为输入输出维数均为 q_i 的线性时变算子, 不确定性 Δ_i 满足范数条件 $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$, 由小增益定理条件, 系统稳定性要求 $\|T_{w_1 z_1}\|_\infty < 1$. 从性能来讲, 要求 $\|T_{w_2 z_2}\|_\infty$ 趋于最小. 而对带摄动 Δ 的系统(1)来说, 则是鲁棒性能问题:

$$\sup_{\|\Delta\|_\infty \leq 1} \|F_l(G_\Delta, K)\|_\infty < \gamma,$$

式中 $G_\Delta = F_u(G, \Delta)$, $F_u(\cdot)$, $F_l(\cdot)$ 分别表示上、下线性分式变换.

引理^[6] 如果参数摄动为任意时变的, 则系统(1)具有鲁棒性能:

* 基金项目: 高等学校博士点基金(96021314)和 211 工程资助项目.
收稿日期: 1999-04-05; 收修改稿日期: 2000-03-17

$$\sup_{\|\Delta\|_{\infty} \leq 1} \|F_l(G_\Delta, K)\|_{\infty} < \gamma,$$

当且仅当下面条件成立:

存在使系统稳定的 $K(s)$, 满足

$$\left\| \begin{bmatrix} \gamma^{-1}W & 0 \\ 0 & I_{q_m} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} F_l(G, K) \begin{bmatrix} \gamma^{-1}W^{-1} & 0 \\ 0 & I_{q_m} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\infty} < \gamma, \quad (2)$$

W 为对角阵属于集合:

$$\mathscr{W} := \{ \text{diag}(w_1 I_{q_1}, \dots, w_{m-1} I_{q_{m-1}}) \mid w_i \in \mathbb{R}, w_i > 0, i = 1, \dots, m-1 \},$$

I_{q_i} 为 $q_i \times q_i$ 的单位阵.

(2) 式即为常值对角标定问题, 标定阵 W 对应于稳定性要求, 即 $\|T_{w_1 z_1}\|_{\infty} < 1$, I_{q_m} 对应性能 $\|T_{w_2 z_2}\|_{\infty}$ 要求. 由定理 1 可知, 系统(1)的鲁棒性能问题等价于(2)式的常值对角标定问题, 在(2)式约束下最小化 γ , 即可得到系统的最优鲁棒性能. 然而(2)式为非凸约束, 不能直接化为 LMI 来求解.

由于(2)式等价于下面(3)、(4)两式:

$$\left\| \begin{bmatrix} \gamma^{-1}W & 0 \\ 0 & I_{q_m} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} F_l(G, K) \begin{bmatrix} \gamma^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{q_m} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\infty} < \gamma, \quad (3)$$

$$w_i v_i \leq 1, i = 1, \dots, m-1, W \in \mathscr{W}, V \in \mathscr{V}, \quad (4)$$

其等价性可由文[4]中的引理 3.1 推知. 这样(3)式为凸约束, 可以化为标准 LMI 问题, (4)式为非凸约束, 对(4)式的处理, 可以采用文[4]中三角覆盖的方法, 即把 $w_i v_i \leq 1$ 改用凸约束:

$$\theta_{ij} w_i + v_i \leq 2\sqrt{\theta_{ij}} \quad (5)$$

来逼近, 在优化时, (5)式中的 θ_{ij} 的值由下式随着 j 的增加取不同的值, 直至覆盖整个凹区间

$$\theta_{ij} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - (1 - \epsilon)^2}}{1 - \sqrt{1 - (1 - \epsilon)^2}} \right)^{2j} \theta_{i0}, \theta_{i0} = \frac{\bar{v}_i}{\bar{w}_i}, \quad (6)$$

式中 ϵ 为事先设定的逼近精度, \bar{w}_i, \bar{v}_i 为 w_i, v_i 的上界.

由于(5)式可以在事先设定的精度下逼近于非凸约束(4), 这样可在一定的精度 ϵ 要求下由凸约束(3)、(5), (转化为 LMI 后)应用凸优化算法软件包^[9], 最小化 γ 得到全局最优的性能指标 γ_{\min} . 另外, 应用凸约束(5)来逼近非凸约束(4)时, 要首先确定出 \bar{w}_i, \bar{v}_i 的上界 \bar{w}_i, \bar{v}_i , 在本文的求取全局最优鲁棒性能问题中, \bar{w}_i, \bar{v}_i 的确定方法同文[4]类似.

3 全局最优鲁棒控制器的设计 (Global optimal robust controller design)

定理 凸约束(3)等价于下列三个 LMI 有对称解 R, S .

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma \bar{W} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma \bar{V} & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma \bar{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0. \quad (9)$$

式中

$$\bar{W} = \text{diag}(\gamma^{-1}W, I_{q_m}), \bar{V} = \text{diag}(\gamma^{-1}V, I_{q_m}).$$

证 设控制器

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}.$$

将 $K(s)$ 和广义对象 $G(s)$ 代入(3)式左端, 整理后可得:

$$F_l(\hat{G}, K) = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}W & 0 \\ 0 & I_{q_m} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} F_l(G, K) \begin{bmatrix} \gamma^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{q_m} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}},$$

其中

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} A & B_1 \bar{V}^{(-1/2)} & B_2 \\ \bar{W}^{(-1/2)} C_1 & \bar{W}^{(-1/2)} D_{11} \bar{V}^{(-1/2)} & \bar{W}^{(-1/2)} D_{12} \\ C_2 & D_{21} \bar{V}^{(-1/2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

这样常值对角标定问题(3)就可化成为下面的一般 H_{∞} 问题

$$\|F_l(\hat{G}, K)\|_{\infty} < \gamma, \quad (11)$$

从而可以用一般 H_{∞} 问题的结果^[7]来求解.

设 N_{Rl}, N_{Sl} 分别表示 $[B_2^T \ D_{12}^T \bar{W}^{(-1/2)}]$, $[C_2 \ D_{21} \bar{V}^{(-1/2)}]$ 的零空间的正交基, 注意到

$$N_{Rl} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{W}^{(1/2)} \end{bmatrix} N_R, \quad N_{Sl} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{V}^{(1/2)} \end{bmatrix} N_S,$$

其中 N_R 和 N_S 分别为 (B_2^T, D_{12}^T) 和 (C_2, D_{21}) 的零空间的正交基, 并设

$$T_V = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \bar{V}^{(1/2)} \end{bmatrix}, \quad T_W = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \bar{W}^{(1/2)} \end{bmatrix},$$

将 \hat{G} 代入文献[7]的结果中,并用 T_V, T_W 分别作合同(congruent)变换,则可得到式(7)、(8). 证毕.

根据以上证明,控制器的设计可以按以下步骤进行:

i) 应用不等式约束(7)、(8)、(9)以及(5)通过MATLAB中的凸优化软件包^[9],对 γ 进行寻优,得到全局最优的 $\gamma_{\min}, W_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}, R_{\text{opt}}, S_{\text{opt}}$.

ii) 把 $W_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}$ 和 γ_{\min} 的值代入(10)式,计算等

$$A + \Delta A(r) = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 + r_1(t) & -0.707 & 1.3229 + r_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \bar{C}_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

$$\bar{D}_{11} = 0, \bar{D}_{12} = 0, \bar{D}_{21} = 0,$$

$$B_2 = [0.4422 \ 3.0447 \ -5.52 \ 0]^T,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

不确定性界设为: $|r_1(t)| \leq 1.5, |r_2(t)| \leq 2$.

设计控制器,使得系统(1)中 w_2 到 z_2 的扰动抑制达到最小.

$$W_{\text{opt}} = \text{diag}\{0.63973, 2.4895\}, \quad V_{\text{opt}} = \text{diag}\{1.5587, 0.39618\},$$

$$R_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} 2.1801e+006 & 1.501e+007 & -2.7213e+007 & 3.0083 \\ 1.501e+007 & 1.0335e+008 & -1.8737e+008 & 0.37176 \\ -2.7213e+007 & -1.8737e+008 & 3.3971e+008 & -1.0297 \\ 3.0083 & 0.37176 & -1.0297 & 1.8569 \end{bmatrix},$$

$$S_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} 4.027e+008 & -0.0081792 & -0.0056739 & 5.9863 \\ -0.0081792 & 4.9321e+008 & -3.0499 & -1.1762e+006 \\ -0.0056739 & -3.0499 & 134.68 & -1.6732e+005 \\ 5.9863 & -1.1762e+006 & -1.6732e+005 & 5.1988e+008 \end{bmatrix},$$

及全局最优的性能指标 $\gamma_{\min} = 0.30182$, 由此可以由(12)式求控制器,具体利用的是 MATLAB 5.1 中

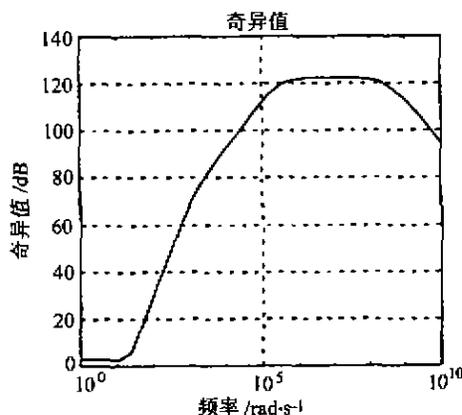


图2 控制器奇异值

Fig. 2 Singular values of the controller

效的对象 \hat{G} .

iii) 求解式(11),要求满足

$$\|F_i(\hat{G}, K)\|_{\infty} < \gamma_{\min}, \quad (12)$$

则得到的控制器即为所求的全局最优鲁棒性能控制器(参见算例).

4 算例(Design example)

下面以文[8]中的直升机模型为背景,对本文控制器的设计方法进一步进行说明.

在广义对象(1)中:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = 0, \quad D_{21} = 0,$$

不确定性

$$\Delta = \text{diag}\{\Delta_1(t), \Delta_2(t)\}, \quad |\Delta_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

取三角覆盖时(6)式中的逼近精度 $\epsilon = 0.01$, 得到:

的函数

$$[K, g_{\text{fin}}] = \text{klmi}(P, r, \text{gamma}, X1, X2, Y1, Y2).$$

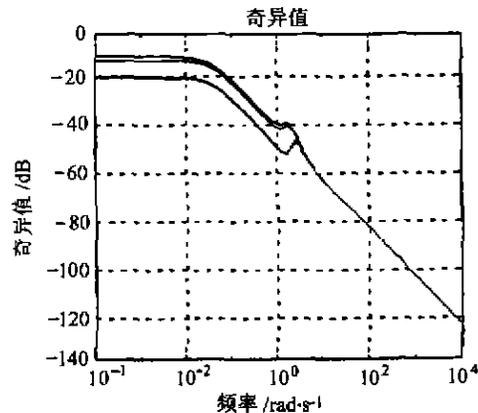


图3 系统 $T_{w_2 z_1}$ 奇异值

Fig. 3 Singular values of system $T_{w_2 z_1}$

图 2 为设计所得的全局最优鲁棒控制器的奇异值 Bode 图, 图 3 为参数 $r_1(t)$, $r_2(t)$ 分别摄动到 ± 1.5 , ± 2 时的闭环系统 $T_{w_2 z_2}$ 的奇异值 Bode 图, 由图 3 可以看出系统性能达到指标 $\gamma_{\min} = 0.30182$ 且具有鲁棒性。

5 结论(Conclusions)

1) 本文在证明过程中, 把常值对角标定向题等价为一个一般的 H_∞ 问题, 由此给出了全局最优鲁棒控制器的设计方法, 使得在求解全局最优鲁棒性能时, 从求解结果可以设计出相应的控制器。

2) 本文对常值对角标定向题的研究是结合参数不确定系统进行的, 其实对一般的不确定系统, 不确定性用范数来表示时, 其鲁棒性能问题都可用常值标定的方法来处理^[1,2]。如果块对角的结构性摄动中每个摄动块均为满块, 则标定阵为常值对角阵, 同样可应用三角覆盖算法, 用 LMI 来求解, 所以本文有一定的普遍性。

参考文献(References)

- [1] Megretski A. Necessary and sufficient condition of stability: a multi-loop generalization of the circle criterion [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38(5): 753 - 756
- [2] Shamma J S. Robust stability with time-varying structured uncertainty [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(3): 714 - 724
- [3] Rotea M A and Iwasaki T. An alternative to the $D-K$ iteration? [J]. Proc. American Control Conf. [C], Baltimore, Maryland, 1994, 53 - 57
- [4] Yamada Y and Hara S. Global optimization for H_∞ control with constant diagonal scaling [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1998, 43(2): 191 - 202
- [5] Yamada Y, Hara S and Fujioaka H. Global optimization for constantly scaled H_∞ control problem [A]. Proc. American Control Conf. [C], Seattle, Washington, 1995, 427 - 430
- [6] Yamada Y and Hara S. An LMI approach to local optimization for constantly scaled H_∞ control problems [J]. Int. J. Control, 1997, 67(2): 233 - 250
- [7] Gahinet P and Apkarian P. An LMI-based parameterization of all H_∞ controllers with applications [A]. Proc. IEEE Conf. Decision Contr. [C], San Antonio, Texas, 1993, 656 - 661
- [8] Schmitendorf W E. Design methodology for robust stabilizing controllers [J]. AIAA J. Guidance, Contr. Dynamics, 1987, 10(3): 250 - 254
- [9] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J and Chilali M. LMI Control Toolbox [M]. Natick, Mass.: The Math Works Inc., 1995
- [10] Boyd S, Ghaoui L El and Feron E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994

(上接第 265 页)

ion, 1997, 12(5): 559 - 564 (in Chinese)

- [6] Chen Y H, Leitmann G and Kai X Z. Robust control design for interconnected system with time-varying uncertainties [J]. Int. J. Contr., 1991, 54(5): 1119 - 1142
- [7] Lin S and Sunil K S. Decentralized control for interconnected uncertain systems: extensions to higherorder uncertainties [J]. Int. J. Contr., 1993, 57(6): 1453 - 1468
- [8] Wu H S. Decentralized robust control for a class of large-scale interconnected systems with uncertainties [J]. Int. J. Syst. Sci., 1989, 20(12): 2597 - 2603
- [9] Xie Y F, Gui W H, Liu X Y and Wu M. Decentralized robust stabilizing control design for interconnected time-varying uncertain systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(6): 903 - 906 (in Chinese)

本文作者简介

李连铸 1974 年生, 哈尔滨工业大学控制工程系博士研究生。1998 年于哈尔滨工业大学电气工程系取得硕士学位, 致力于电机工程的研究。目前研究方向为鲁棒控制系统设计, H_∞ 控制。

王广雄 1933 年生, 1957 年哈尔滨工业大学研究生毕业, 现为哈尔滨工业大学教授、博士生导师, 研究方向为 H_∞ 控制理论及应用, 高精度伺服系统的设计和实践。

姚远 1973 年生, 1998 年在哈尔滨工业大学控制工程系获硕士学位, 现为香港城市大学研究生, 主要研究方向为鲁棒控制及滤波, 计算数学复杂性和视觉。

本文作者简介

谢永芳 1972 年生, 1999 年毕业于中南工业大学信息科学与工程学院, 获工学博士学位。主要研究方向为分散控制和鲁棒控制, H_∞ 控制理论及应用, 生产过程控制。

桂卫华 见本刊 2001 年第 1 期第 130 页。

吴敏 1963 年生, 教授, 博士生导师。目前主要研究方向是鲁棒控制, 智能控制和非线性控制。

陈宁 1970 年生, 1995 年获中南工业大学自控系工学硕士学位, 现为该校信息科学与工程学院教师, 在读博士。研究方向为 LMI 方法及应用, 大系统分散控制, H_∞ 控制和结构奇异值控制。