第 18 卷第 4 期
2001 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 18, No. 4
Aug., 2001

文章编号: 1000 - 8152(2001)04 - 0513 - 06

线性奇异系统的 H_∞ 控制问题:状态反馈情形*

马树萍　程兆林
(山东大学数学与系统科学学院·济南,250100)

摘要: 讨论了线性奇异系统的状态反馈 H_∞ 控制问题,阐述了其和一个正常状态空间线性系统的状态反馈 H_∞ 控制问题的等价性;利用线性矩阵不等式(LMI)的方法,给出了一个使闭环系统无脉冲模,内稳定,且满足 H_∞ 性能指标的状态反馈控制器存在的充分必要条件及控制器的一族解.

关键词: 奇异系统; H_∞ 控制; 状态反馈
文献标识码: A

State Feedback H_∞ Control Design Problem for Linear Singular Systems

MA Shuping　and　CHENG Zhaolin
(School of Mathematics and System Science, Shandong University · Jinan, 250100, P. R. China)

Abstract: This paper discusses the state feedback H_∞ control problem for linear singular systems, the equivalence of this problem and the state feedback H_∞ control problem for standard state-space linear systems is presented. Using the method of linear matrix inequalities, we show the necessary and sufficient condition to the existence of a controller that the closed-loop system is impulse-free and stable, and satisfies H_∞ performance. A family of particular solution of controllers are given.

Key words: singular system; H_∞ control; state feedback

1　引言(Introduction)

H_∞ 控制问题,自 80 年代被提出,受到广大学者的重视[1~5].就线性系统而言,依赖于代数 Riccati 方程的解法已经成熟[4].近年来,许多学者利用代数 Riccati 不等式及 LMI 解决线性系统的 H_∞ 控制问题,得到了很好的结果[1~3].随着线性系统 H_∞ 控制理论的日趋成熟和完善,线性奇异系统的 H_∞ 控制理论也相应地得到了发展,Morihira 和 Takaba 等人于 1993,1994 年利用 J-谱分解的方法[6,7],Wen 和 Yaling(1993)用广义特征值方法[8]讨论了线性奇异系统的 H_∞ 控制问题.这些结果都是在类似于文献[4]中的假定下,用求解广义代数 Riccati 方程给出的.直到 1997 年,Masubuchi 等人[9]用两个广义的代数 Riccati 不等式给出了线性奇异系统 H_∞ 控制器的存在条件,才从本质上克服了以上假设条件所带来的限制.尽管如此,线性奇异系统的 H_∞ 控制理论的发展仍属初步,理论成果的工程应用报道更属罕见.

本文从一个新的角度研究线性奇异系统的状态反馈 H_∞ 控制问题.首先,在系统为脉冲能控,R-能稳和满足一个较为一般的秩条件的假定下,通过引入一个状态-控制对的非奇异变换,建立了这一问题和正常状态空间线性系统的状态反馈 H_∞ 控制问题的等价性;然后,利用 LMI 方法及正常状态空间线性系统 H_∞ 控制问题的已有结果,给出了线性奇异系统的状态反馈 H_∞ 控制器存在的充分必要条件及控制器的一族解.本文的组织是这样的,第二节讨论问题的描述与转化,第三节给出线性奇异系统的状态反馈 H_∞ 控制问题有解的充要条件及一族状态反馈控制器解,第四节算例,第五节结语.

关于 LMI 的求解,目前已有不少具有良好数值稳定性的计算方法,例如 Gahinet 等人的 LMI Control Toolbox (1995)[10], Gahinet 和 Nemirovski 的投影算法(1997)[11]等等.作者相信,随着 LMI 软件包的不断发展和完善,基于 LMI 的 H_∞ 控制设计必将在奇异系

* 基金项目:国家重点基础研究项目(G1998020300),高校博士学科点专项科研基金(98042212),山东省自然科学基金(Q99A07)资助项目.
收稿日期:1999 - 06 - 30; 收修改稿日期:2000 - 07 - 31.

统的各个应用领域得到广泛应用.

2 问题描述及转化(Description and transformation of the problem)

本文考虑线性奇异系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \end{cases} \tag{1}$$

在状态反馈

$$u = Kx, \text{ 或 } u = Kx + K_3 w \tag{2}$$

下的 H_∞ 控制问题.其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态,$w \in \mathbb{R}^q$ 干扰输入,$u \in \mathbb{R}^p$ 为控制输入,$z \in \mathbb{R}^m$ 为受控输出. $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, E 降秩, $\operatorname{rank} E = r < n$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D_{11} \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $D_{12} \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $K_3 \in \mathbb{R}^{p\times q}$.

注 当 w 不可量测时,采用第一种反馈形式,当 w 完全可量测时,可采用第二种反馈形式.

我们的目的是设计状态反馈控制器(2),使之与系统(1)构成的闭环系统满足:

1) 内稳定; 2) $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$; 3) 无脉冲模. (*1)

这里 $T_{zw}(s)$ 是指 w 到 z 的传递函数,γ 是给定的正数.

因 $\operatorname{rank} E = r < n$,故存在受限制等价变换 M, $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使有

$$\begin{cases} MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \\ MB_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \ MB_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \\ C_1 N = [C_{11} \quad C_{12}], \ N^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{3}$$

式中 $A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $B_{11} \in \mathbb{R}^{r\times q}$, $B_{12} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times q}$, $B_{21} \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $B_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times p}$, $C_{11} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $C_{12} \in \mathbb{R}^{m\times(n-r)}$, $x_1 \in \mathbb{R}^r$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$. 于是系统(1)r.s.e.于下述系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_{11}w + B_{21}u, \\ 0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_{12}w + B_{22}u, \\ z = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + D_{11}w + D_{12}u, \end{cases} \tag{4}$$

状态反馈(2)则转化为

$$u = K_1 x_1 + K_2 x_2, \tag{5a}$$

或

$$u = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 w, \tag{5b}$$

其中 $[K_1 \quad K_2] = KN$, $K_1 \in \mathbb{R}^{p\times r}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{p\times(n-r)}$. 注意到r.s.e.变换不改变系统的输入输出关系,故考察线性奇异系统(1)在状态反馈(2)下的 H_∞ 控制问题可以等价地代之以考察线性奇异系统(4)在状态反馈(5)下的 H_∞ 控制问题.记前一问题为 P_1,后一问题为 P_2.显然,解 P_2 即是解 P_1.以下考察 P_2 的解,亦即考察状态反馈控制器(5)的设计,使之与系统(4)构成的闭环系统满足(*1).为此作如下假设:

假设 1 当 $w = 0$ 时,系统(1)脉冲能控.

假设 2 当 $w = 0$ 时,系统(1)R-能稳.

假设 3 系统(1)满足如下秩条件:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ E & A & B_2 \\ 0 & C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + r + p. \tag{6}$$

熟知,系统(1)的脉冲能控性等价于矩阵 $[A_{22} \quad B_{22}]$ 行满秩[12],故存在非奇异矩阵 $P \in \mathbb{R}^{(n-r+p)\times(n-r+p)}$ 使得

$$[A_{22} \quad B_{22}]P = [I_{n-r} \quad 0]. \tag{7}$$

令

$$\begin{cases} P \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} A_{12} & B_{21} \\ A_{22} & B_{22} \\ C_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & \bar{B}_{21} \\ I_{n-r} & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{D}_{12} \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{8}$$

其中 $P_{11} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $P_{12} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times p}$, $P_{21} \in \mathbb{R}^{p\times(n-r)}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $\bar{B}_{21} \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $\bar{C}_{12} \in \mathbb{R}^{m\times(n-r)}$, $\bar{D}_{12} \in \mathbb{R}^{m\times p}$.

根据式(7),作如下非奇异变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & P_{12} & 0 \\ 0 & P_{21} & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{u} \\ w \end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中 $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$. 在变换(9)下,系统(4)转化为

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + B_{11}w + \bar{B}_{21}\bar{u}, \tag{10a}$$

$$0 = A_{21}x_1 + \bar{x}_2 + B_{12}w, \tag{10b}$$

$$z = C_{11}x_1 + \bar{C}_{12}\bar{x}_2 + D_{11}w + \bar{D}_{12}\bar{u}. \tag{10c}$$

注意,由(10b)推得

$$\bar{x}_2 = -A_{21}x_1 - B_{12}w, \tag{11}$$

故系统(10)还可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21})x_1 + (B_{11} - \bar{A}_{12}B_{12})w + \bar{B}_{21}\bar{u}, \\ z = (C_{11} - \bar{C}_{12}A_{21})x_1 + (D_{11} - \bar{C}_{12}B_{12})w + \bar{D}_{12}\bar{u}, \\ \bar{x}_2 = -A_{21}x_1 - B_{12}w. \end{cases} \tag{12}$$

注意,系统(12)为正常状态空间线性系统,其状态为 x_1,干扰输入为 w,控制输入为 $\bar{u}$,受控输出为 z. 设系统(12)在状态反馈

$$\bar{u} = \bar{K}x_1 \tag{13}$$

下的 H_∞ 控制问题为 P_3. 显然, P_3 为正常状态空间线性系统 H_∞ 控制问题. 以下我们设法弄清问题 P_2 与 P_3 的关系, 以便由解 P_3 获得 P_2 的解.

引理 1 　系统(12)能稳的充要条件为假设 2 成立.

引理 2 　若假设 1 成立, 则矩阵 $\bar{D}_{12}$ 列满秩的充要条件为假设 3 成立.

引理 1, 引理 2 的证明从略.

注　引理 1 指出, 假设 2 等价于 $(A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21}, \bar{B}_{21})$ 能稳, 因此, 假设 2 既是问题 P_1 有解的必要条件, 也是问题 P_3 有解的必要条件.

定理 1 　若假设 1, 2 成立, 则问题 P_2 有解 (5a), (5b) 的充分必要条件为, 对于下述矩阵 P:

$$P \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_{22}^{-1} & -\tilde{A}_{22}^{-1}B_{22} \\ \tilde{K}_2\tilde{A}_{22}^{-1} & -\tilde{K}_2\tilde{A}_{22}^{-1}B_{22} + I_p \end{bmatrix}, \tag{14}$$

变换(9)所确定的问题 P_3 有解, 式中

$$\tilde{A}_{22} = A_{22} + B_{22}\tilde{K}_2, \tag{15}$$

$\tilde{K}_2$ 为使得 $\tilde{A}_{22}$ 非奇异的某一实阵.

证　充分性. 注意, 式(14)所示之矩阵 P 必满足式(7), 设对于该 P, 由变换(9)确定的问题 P_3 有解. 亦即存在状态反馈(13), 使之与系统(12)构成的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} + \bar{B}_{21}\bar{K})x_1 + \\ \qquad (B_{11} - \bar{A}_{12}B_{12})w, \\ z = (C_{11} - \bar{C}_{12}A_{21} + \bar{D}_{12}\bar{K})x_1 + \\ \qquad (D_{11} - \bar{C}_{12}B_{12})w, \\ \bar{x}_2 = -A_{21}x_1 - B_{12}w \end{cases} \tag{16}$$

满足:

$$\begin{cases} \text{1) 内稳定, 即矩阵 } A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} + \bar{B}_{21}\bar{K} \\ \quad \text{的特征根全部位于左半平面;} \\ \text{2) } \| T_{zw}(s) \|_\infty < \gamma, \end{cases} \tag{*2}$$

这里

$$T_{zw}(s) = (C_{11} - \bar{C}_{12}A_{21} + \bar{D}_{12}\bar{K})(sI_r - (A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} + \bar{B}_{21}\bar{K}))^{-1}(B_{11} - \bar{A}_{12}B_{12}) + (D_{11} - C_{12}B_{12}). \tag{17}$$

注意到由式(9), (11)可推得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & P_{12} & 0 \\ 0 & P_{21} & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ -A_{21} & 0 & -B_{12} \\ 0 & I_p & 0 \\ & 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{u} \\ w \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -P_{11}A_{21}x_1 + P_{12}\bar{u} - P_{11}B_{12}w \\ -P_{21}A_{21}x_1 + P_{22}\bar{u} - P_{21}B_{12}w \\ w \end{bmatrix}, \tag{18}$$

结合式(13), 则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ (-P_{11}A_{21} + P_{12}\bar{K})x_1 - P_{11}B_{12}w \\ (-P_{21}A_{21} + P_{22}\bar{K})x_1 - P_{21}B_{12}w \\ w \end{bmatrix}. \tag{19}$$

令 u 如式(5b)所示, 注意到式(19)有:

$$\begin{aligned} u &= K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3 = \\ &K_1x_1 + K_2(-P_{11}A_{21} + P_{12}\bar{K})x_1 - \\ &K_2P_{11}B_{12}w + K_3w = \\ &(-P_{21}A_{21} + P_{22}\bar{K})x_1 - P_{21}B_{12}w, \end{aligned} \tag{20}$$

故有

$$K_1 = (-P_{21}A_{21} + P_{22}\bar{K}) - K_2(-P_{11}A_{21} + P_{12}\bar{K}), \tag{21}$$

$$K_3 = -P_{21}B_{12} + K_2P_{11}B_{12} = (K_2 - \tilde{K}_2)\tilde{A}_{22}^{-1}B_{12}. \tag{22}$$

反馈增益阵 K_2 的选择有较大自由度, 为使系统(4)及反馈律(5b)构成的闭环系统无脉冲模, 取 K_2 使得

$$\bar{A}_{22} = A_{22} + B_{22}K_2 \tag{23}$$

非奇异. 特别地, 若取

$$K_2 = \tilde{K}_2, \tag{24}$$

则有

$$\bar{A}_{22} = \tilde{A}_{22}, \tag{25}$$

并且

$$K_3 = 0, \tag{26}$$

此时, 反馈控制律(5b)成为(5a).

考察状态反馈(5b)和系统(4)构成的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} + B_{21}K_1)x_1 + (A_{12} + \\ \qquad B_{21}K_2)x_2 + (B_{11} + B_{21}K_3)w, \\ 0 = (A_{21} + B_{22}K_1)x_1 + (A_{22} + \\ \qquad B_{22}K_2)x_2 + (B_{12} + B_{22}K_3)w, \\ z = (C_{11} + D_{12}K_1)x_1 + (C_{12} + \\ \qquad D_{12}K_2)x_2 + (D_{11} + D_{12}K_3)w, \end{cases} \tag{27}$$

式中 K_1, K_2, K_3 分别如式(21), (23), (22) 所示. 注意到 $\bar{A}_{22}$ 非奇异, 故闭环系统(27)无脉冲模, 亦即闭环系统(27)满足条件(*1)中的 3). 下证闭环系统

(27)满足条件(＊1)中的1)、2).为此改写式(27)为下述形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ((A_{11} + B_{21}K_1) - (A_{12} + B_{21}K_2)\bar{A}_{22}^{-1}(A_{21} + \\ \qquad B_{22}K_1))x_1 + ((B_{11} + B_{21}K_3) - (A_{12} + \\ \qquad B_{21}K_2)\bar{A}_{22}^{-1}(B_{12} + B_{22}K_3))w, \\ z = ((C_{11} + D_{21}K_1) - (C_{12} + D_{21}K_2)\bar{A}_{22}^{-1}(A_{21} + \\ \qquad B_{22}K_1))x_1 + ((D_{11} + D_{21}K_3) - (C_{12} + \\ \qquad D_{12}K_2)\bar{A}_{22}^{-1}(B_{12} + B_{22}K_3))w, \\ x_2 = -(A_{22} + B_{22}K_2)^{-1}((A_{21} + B_{22}K_1)x_1 + \\ \qquad (B_{12} + B_{22}K_3)w). \end{cases} \tag{28}$$

考察式(28)的系数矩阵,结合式(7),(8)及式(21)～(23),推得

$$\begin{cases} A_{11} + B_{21}K_1 - (A_{12} + B_{21}K_2)\bar{A}_{22}^{-1}(A_{21} + B_{22}K_1) = \\ A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} + \bar{B}_{21}\bar{K}, \\ B_{11} + B_{21}K_3 - (A_{12} + B_{21}K_2)\bar{A}_{22}^{-1}(B_{12} + B_{22}K_3) = \\ B_{11} - \bar{A}_{12}B_{12}, \\ C_{11} + D_{12}K_1 - (C_{12} + D_{21}K_2)\bar{A}_{22}^{-1}(A_{21} + B_{22}K_1) = \\ C_{11} - \bar{C}_{12}A_{21} + \bar{D}_{12}\bar{K}, \\ D_{11} + D_{12}K_3 - (C_{12} + D_{12}K_2)\bar{A}_{22}^{-1}(B_{12} + B_{22}K_3) = \\ D_{11} - \bar{C}_{12}B_{12}. \end{cases} \tag{29}$$

注意,式(29)的等号右端即闭环系统(16)的对应系数矩阵,故式(29)告诉我们,若问题 P_2 的控制器取为(5b),且状态反馈增益矩阵 K_i, $i = 1,2,3$, 按式(21)～(23)选取,则闭环系统(28)的特征根及传递函数 T_{zw} 与问题 P_3 的闭环系统(16)的特征根及传递函数 T_{zw} 完全一致,亦即问题 P_2 有状态反馈控制器解,且解以(5b),(21)～(23)表出.特别地,若 K_2 取值 $\tilde{K}_2$,则由式(26)知 $K_3 = 0$,即 P_2 控制器解为(5a).充分性得证.

必要性.设问题 P_2 有解(5a),于是由闭环系统(27)无脉冲模知 $\bar{A}_{22} = A_{22} + B_{22}K_2$ 非奇异.将闭环系统(27)改写为(28),式中 $K_3 = 0$.取矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{22}^{-1} & -\bar{A}_{22}^{-1}B_{22} \\ K_2\bar{A}_{22}^{-1} & -K_2\bar{A}_{22}^{-1}B_{22} + I_p \end{bmatrix}, \tag{30}$$

按变换(9)将系统(4)变换为系统(12),并对其按以下控制律:

$$\bar{u} = K_1x_1 \tag{31}$$

实施控制,得闭环方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} + \bar{B}_{12}K_1)x_1 + (B_{11} - \bar{A}_{12}B_{12})w, \\ z = (C_{11} - \bar{C}_{12}A_{21} + \bar{D}_{12}K_1)x_1 + (D_{11} - \bar{C}_{12}B_{12})w, \\ \bar{x}_2 = -A_{21}x_1 - B_{12}w. \end{cases} \tag{32}$$

类似于充分性的证明,由式(8),(9),(30)及(31),容易验证闭环系统(32)与闭环系统(28)的系数阵对应相等,故两者有同样的特征根及传递函数 T_{zw},即对于式(30)所示之矩阵 P,变换(9)所确定的问题 P_3 有解(31).必要性得证. 证毕.

3 状态反馈 H_∞ 控制器(State feedback H_∞ controller)

本节讨论问题 P_2(等价地,P_1)的解的存在性,根据第二节的讨论及定理1,我们只须从讨论问题 P_3 着手.

引理 3[1] 考虑线性系统(A,B,C,D),其传递函数 $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$,对于给定的 $\gamma > 0$,则 A 稳定,即 $\sigma(A) \subset C^-$,且 $\|T(s)\|_\infty < \gamma$ 的充要条件为:存在 $X > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} A^TX + XA & XB & C^T \\ B^TX & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{33}$$

成立.

我们有:

定理 2 1)考虑问题 P_2,设假设1～3成立,则对于给定的 $\gamma > 0$,存在状态反馈(5a),(5b),使之与系统(4)构成的闭环系统满足(＊1)的充分必要条件为:存在矩阵 $X > 0$,使得下述线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} X\tilde{A}_1^T + \tilde{A}_1X - \bar{B}_2\bar{B}_2^T & \gamma^{-1}\tilde{B}_1 & X\tilde{C}_1^T \\ \gamma^{-1}\tilde{B}_1^T & -I_q & \gamma^{-1}\tilde{D}_{11}^T \\ \tilde{C}_1X & \gamma^{-1}\tilde{D}_{11} & -I_m \end{bmatrix} < 0 \tag{34}$$

成立.式中

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = \bar{A}_1 - \bar{B}_2\bar{C}_1,\ \tilde{B}_1 = \bar{B}_1 - \bar{B}_2\bar{D}_{11}, \\ \tilde{C}_1 = (I_m - \bar{D}_{12}\bar{D}_{12}^+)\bar{C}_1,\ \tilde{D}_{11} = (I_m - \bar{D}_{12}\bar{D}_{12}^+)\bar{D}_{11}, \\ \bar{B}_2 = \bar{B}_{21}\bar{D}_{12}^+,\ \bar{D}_{12}^+ = (\bar{D}_{12}^T\bar{D}_{12})^{-1}\bar{D}_{12}^T, \\ \bar{A}_1 = A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21},\ \bar{B}_1 = B_{11} - \bar{A}_{12}B_{12}, \\ \bar{C}_1 = C_{11} - \bar{C}_{12}A_{21},\ \bar{D}_{11} = D_{11} - \bar{C}_{12}B_{12}, \end{cases} \tag{35}$$

$\bar{A}_{12}, \bar{B}_{21}, \bar{C}_{12}, \bar{D}_{12}$ 取自式(8),式(8)中的矩阵 P 取自式(14).

2)若不等式(34)有解 $X > 0$,则问题 P_2 有状态反馈解(21)～(26),式中

$$\bar K = -\bar Q^{-1}((\bar B_{21} + \gamma^{-2}\bar B_1 R^{-1}\bar D_{11}^{\mathrm T}\bar D_{12})^{\mathrm T}X^{-1} + \bar D_{12}^{\mathrm T}S^{-1}\bar C_1), \tag{36a}$$

$$\begin{cases} S = I_m - \gamma^{-2}\bar D_{11}\bar D_{11}^{\mathrm T},\ R = I_q - \gamma^{-2}\bar D_{11}^{\mathrm T}\bar D_{11} > 0, \\ \bar Q = \bar D_{12}^{\mathrm T}S^{-1}\bar D_{12} = \bar D_{12}^{\mathrm T}(I + \gamma^{-2}\bar D_{11}R^{-1}\bar D_{11}^{\mathrm T})\bar D_{12}. \end{cases} \tag{36b}$$

证　必要性.设问题 P_2 有解(5a),(5b),则由定理1知必存在如(14)所示的矩阵 P,使得由变换(9)确定的问题 P_3 有解(13).联系到式(27)～(29)及引理3,知存在矩阵 $Y>0$,使得

$$\begin{bmatrix} (\bar A_1+\bar B_{21}\bar K)^{\mathrm T}Y+Y(\bar A_1+\bar B_{21}\bar K) & Y\bar B_1 & (\bar C_1+\bar D_{12}\bar K)^{\mathrm T} \\ \bar B_1^{\mathrm T}Y & -\gamma I_q & \bar D_{11}^{\mathrm T} \\ \bar C_1+\bar D_{12}\bar K & \bar D_{11} & -\gamma I_m \end{bmatrix} < 0. \tag{37}$$

由引理2知 $\bar D_{12}$ 列满秩,因而有行满秩矩阵 $\bar D_{12}^{\perp} \in \mathbb{R}^{(m-p)\times m}$,使得

$$\bar D_{12}^{\perp}\bar D_{12} = 0. \tag{38}$$

取

$$T_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 & -Y\bar B_{21}\bar D_{12}^{+} \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & \bar D_{12}^{\perp} \end{bmatrix}, \tag{39}$$

将 T_1 及 $T_1^{\mathrm T}$ 分别左乘及右乘式(37),注意到 T_1 行满秩,并令 $X=\gamma^{-1}Y^{-1}$,结合式(35)推得

$$\begin{bmatrix} X\tilde A^{\mathrm T}+\tilde A_1X-\tilde B_2\tilde B_2^{\mathrm T} & \gamma^{-1}\tilde B_1 & X\bar C_1^{\mathrm T}(\bar D_{12}^{\perp})^{\mathrm T} \\ \gamma^{-1}\tilde B_1^{\mathrm T} & -I_q & \gamma^{-1}\bar D_{11}^{\mathrm T}(\bar D_{12}^{\perp})^{\mathrm T} \\ \bar D_{12}^{\perp}\bar C_1X & \gamma^{-1}\bar D_{12}^{\perp}\bar D_{11} & -\bar D_{12}^{\perp}(\bar D_{12}^{\perp})^{\mathrm T} \end{bmatrix} < 0. \tag{40}$$

注意,式(40)又等价于下述降维的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} X\tilde A_1^{\mathrm T}+\tilde A_1X-\tilde B_2\tilde B_2^{\mathrm T}+X\bar C_1^{\mathrm T}\hat D_{12}\bar C_1X & \gamma^{-1}\tilde B_1+\gamma^{-1}X\bar C_1^{\mathrm T}\hat D_{12}\bar D_{11} \\ \gamma^{-1}\tilde B_1^{\mathrm T}+\gamma^{-1}\bar D_{11}^{\mathrm T}\hat D_{12}\bar C_1X & -I_q+\gamma^{-2}\bar D_{11}^{\mathrm T}\hat D_{12}\bar D_{11} \end{bmatrix} < 0, \tag{41}$$

式中

$$\hat D_{12} = (\bar D_{12}^{\perp})^{\mathrm T}(\bar D_{12}^{\perp}(\bar D_{12}^{\perp})^{\mathrm T})^{-1}\bar D_{12}^{\perp}. \tag{42}$$

注意 $\hat D_{12}$ 还满足下述关系:

$$\hat D_{12} = I_m - \bar D_{12}\bar D_{12}^{+}. \tag{43}$$

将式(43)代入式(41),并注意到式(35),推得

$$\begin{bmatrix} X\tilde A_1^{\mathrm T}+\tilde A_1X-\tilde B_2\tilde B_2^{\mathrm T}+X\tilde C_1^{\mathrm T}\tilde C_1X & \gamma^{-1}\tilde B_1+\gamma^{-1}X\tilde C_1^{\mathrm T}\tilde D_{11} \\ \gamma^{-1}\tilde B_1^{\mathrm T}+\gamma^{-1}\tilde D_{11}^{\mathrm T}\tilde C_1X & -I_q+\gamma^{-2}\tilde D_{11}^{\mathrm T}\tilde D_{11} \end{bmatrix} < 0 \tag{44}$$

有解 $X>0$.联系到式(44)与式(34)等价,必要性得证.

充分性.设不等式(34)有解 $X>0$.注意到式(34)与式(44)等价,而式(44)与

$$\begin{cases} X\tilde A_1^{\mathrm T}+\tilde A_1X-\tilde B_2\tilde B_2^{\mathrm T}+X\tilde C_1^{\mathrm T}\tilde C_1X+\gamma^{-2}(\tilde B_1+ \\ X\tilde C_1^{\mathrm T}\tilde D_{11})(I-\gamma^{-2}\tilde D_{11}^{\mathrm T}\tilde D_{11})^{-1}(\tilde B_1+X\tilde C_1^{\mathrm T}\tilde D_{11})^{\mathrm T} < 0, \\ I-\gamma^{-2}\tilde D_{11}^{\mathrm T}\tilde D_{11} > 0 \end{cases} \tag{45}$$

等价,故 $X>0$ 亦为式(45)的解.取 $\bar K$ 如式(36)所示,将式(45)改写为:

$$\begin{aligned} &X\tilde A_1^{\mathrm T}+\tilde A_1X-\tilde B_2\tilde B_2^{\mathrm T}+X\tilde C_1^{\mathrm T}\tilde C_1X+\gamma^{-2}(\tilde B_1+ \\ &X\tilde C_1^{\mathrm T}\tilde D_{11})(I-\gamma^{-2}\tilde D_{11}^{\mathrm T}\tilde D_{11})^{-1}(\tilde B_1+X\tilde C_1^{\mathrm T}\tilde D_{11})^{\mathrm T}+ \\ &X(\bar K+\bar Q^{-1}((\bar B_{21}+\gamma^{-2}\bar B_1R^{-1}\bar D_{11}^{\mathrm T}\bar D_{12})^{\mathrm T}X^{-1}+ \\ &\bar D_{12}^{\mathrm T}S^{-1}\bar C_1))^{\mathrm T}\bar Q(\bar K+\bar Q^{-1}((\bar B_{21}+ \\ &\gamma^{-1}\bar B_1R^{-1}\bar D_{11}^{\mathrm T}\bar D_{12})^{\mathrm T}X^{-1}+\bar D_{12}^{\mathrm T}S^{-1}\bar C_1))X < 0. \end{aligned} \tag{46}$$

经计算推得,上式等价于

$$\begin{aligned} &X(\bar A_1+\bar B_{21}\bar K)^{\mathrm T}+(\bar A_1+\bar B_{21}\bar K)X+ \\ &X(\bar C_1+\bar D_{12}\bar K)^{\mathrm T}(\bar C_1+\bar D_{12}\bar K)X+ \\ &\gamma^{-2}(\bar B_1+X(\bar C_1+\bar D_{12}\bar K)^{\mathrm T}\bar D_{11})R^{-1}(\bar B_1^{\mathrm T}+ \\ &\bar D_{11}^{\mathrm T}(\bar C_1+\bar D_{12}\bar K)X) < 0, \end{aligned} \tag{47}$$

联系到(36b),进一步等价于

$$\begin{bmatrix} X(\bar A_1+\bar B_{21}\bar K)^{\mathrm T}+(\bar A_1+\bar B_{21}\bar K)X & \gamma^{-1}\bar B_1 & X(\bar C_1+\bar D_{12}\bar K)^{\mathrm T} \\ \gamma^{-1}\bar B_1^{\mathrm T} & -I_q & \gamma^{-1}\bar D_{11}^{\mathrm T} \\ (\bar C_1+\bar D_{12}\bar K)X & \gamma^{-1}\bar D_{11} & -I_m \end{bmatrix} < 0. \tag{48}$$

令 $Y=\gamma^{-1}X^{-1}$,则式(48)等价于式(37),即得 Y 满足式(37),并且,因 X 为式(34)的解,$X>0$,知 $Y>0$.联系到引理3,由此推得闭环系统(16)内稳定,且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$,即问题 P_3 有解(13),并且,状态反馈阵 $\bar K$ 以式(36)表出.返回到问题 P_2,由定理1即得 P_2 有解(21)～(26),(36).充分性得证.

证毕.

返回到问题 P_1.综合以上讨论及定理1,2,我们有:

定理3　问题 P_1 与 P_2 同样有解.在假设1～3成立前提下,线性矩阵不等式(34)有解 $X>0$ 为 P_1,P_2 有解的充分必要条件.若该条件被满足,则 P_1 有解:

$$u = [K_1 \quad K_2]N^{-1}x + K_3 w, \tag{49}$$

式中 K_1, K_3 如式(21),(22),(36) 所示, K_2 可取使得 $A_{22} + B_{22}K_2$ 非奇异的任一矩阵. 特别地, 若 K_2 取式(24), 则 $K_3 = 0$, 这时, P_1 有解

$$u = [K_1 \quad K_2]N^{-1}x. \tag{50}$$

根据定理1~3, 对于系统(1)的状态反馈 H_∞ 控制器的设计步骤可归纳如下:

1) 根据(3)对系统(1)作受限制等价变换, 根据(14),(15)求得矩阵 P;

2) 解不等式(34), 求得 $X > 0$;

3) 由(36)求得 $\bar{K}$, 并由(21)~(26)求得 K_1, K_2, K_3; 最后由式(49),(50)求得控制器.

4 算例(Example)

考虑如下线性奇异系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} u, \\ z = [0 \quad 0.1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0.1w + 0.1u \end{cases} \tag{51}$$

的状态反馈 H_∞ 控制问题. 令 $\gamma = 0.2$ 给定, 经计算可知, 系统(51)满足假设1~3, 取 $\bar{K}_2 = 1$, 则

$$\begin{cases} \bar{A}_{22} = 0.2, \ P = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & \bar{B}_{21} \\ I_{n-r} & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{D}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{52}$$

根据式(35)推得

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_1 = 0.1, \ \tilde{B}_1 = 0.1, \ \tilde{C}_1 = 0, \\ &\tilde{D}_{11} = 0, \ \tilde{B}_2 = 1, \ \tilde{D}_{12}^{+} = -10, \end{aligned} \tag{53}$$

将上述系数代入式(34), 求解线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} 0.2X - 1 & 0.1\gamma^{-1} & 0 \\ 0.1\gamma^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0. \tag{54}$$

当 $\gamma = 0.2$ 时, 不等式(54)对于 $X < 3.75$ 成立. 取 $X = 1$, 则由式(36)得

$$S = 1, \ R = 1, \ \bar{Q} = 0.01, \ \bar{K} = 8, \tag{55}$$

从而由式(21),(22)推得

$$K_1 = -1 + 9K_2, \ K_3 = 0.5(K_2 - 1), \ K_2 \neq 0. \tag{56}$$

则系统(51)的状态反馈 H_∞ 控制器为

$$u = (9K_2 - 1)x_1 + K_2 x_2 + 0.5(K_2 - 1)w. \tag{57}$$

特别地, 若 $K_2 = \bar{K}_2 = 1$, 则 $K_3 = 0$, 此时状态反馈 H_∞ 控制器为

$$u = 8x_1 + x_2 \tag{58}$$

满足闭环系统无脉冲模, 内稳定, 且 $\| T_{zw} \|_\infty < 0.2$.

5 结语(Conclusions)

本文从一个新的角度讨论了线性奇异系统的 H_∞ 控制问题的状态反馈解, 在较为一般的假设下, 证明了它和一个正常状态空间线性系统的状态反馈 H_∞ 控制问题的等价性, 利用线性矩阵不等式方法, 给出了问题有解的充分必要条件, 以及一族解的表达式. 本文所设计的控制器保证闭环系统无脉冲模, 内稳定, 满足指定 H_∞ 范数指标.

参考文献(References)

[1] Gahinet P and Apkarian P. A linear matrix inquality approach to H_∞ control [J]. Int J. Robust Nolinear Control, 1994, 4:421-448

[2] Iwasaki T and Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30(8):1307-1317

[3] Yu J, Sideris A. H_∞ systhesis via reduced-order LMIs [J]. Int. J. Control, 1998, 70(1):85-101

[4] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P and Francis B A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1989, 34(8):831-847

[5] Shen tielong. H_∞ Control Theory and Applications [M]. Beijing: Qinghua Univevsity Publishing House, 1996, 71-92 (in Chinese)

[6] Morihira N, Takaba K and Katayama T. On the H_∞ control for descriptor systems — a J-spectral factorization approach [A]. In Proc. 16th SICE Symp. on Dynamical Systems Theory [C], Kobe, Japan, 1993, 261-266

[7] Takaba K, Morihira N and Katayama T. H_∞ control for descriptor systems — a J-spectral factorization approach [A]. In Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control [C], Lake Buena Vista, F L, 1994, 2251-2256

[8] Wen T and Yaling C. H_∞-optimal control for descriptor systems [A]. Proceedings of 12th IFAC World Congress [C], Sydney, 1993, 2:201-204

[9] Masubushi I, Kamitane Y, Ohara A and Suda N. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach [J]. Automatica, 1997, 33(1):669-673

[10] Gahinet P and Nemirovski A, Laub A J and Chilali M. LMI Control Toolbox [M]. Natick, MA, USA: The Math-Works Inc., 1995

[11] Gahinet P and Nemirovski A. The projective method for solving linear matrix inequalities [J]. Math. Programming, Series B, 1997, 77(2):163-190

[12] Dai L. Singular Control Systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences [M]. New York: Springer-Verlag, 1989

本文作者简介

马树萍 1970年生. 1992年, 1997年于山东大学数学系分别获学士及硕士学位, 现于山东大学攻读博士学位. 研究方向: 多变量控制理论与应用.

程兆林 山东大学数学院教授, 博士生导师. 研究方向: 多变量控制.