文章编号: 1000－8152(2001)04－0519－06

基于 l_∞ 范数和 l_1 范数最小化的二自由度最优鲁棒跟踪控制 *

李昇平
(汕头大学机械电子工程系·广东汕头, 515063)

摘要: 研究了具有乘摄动模型不确定性并存在未知干扰系统的最优鲁棒跟踪控制问题.采用二自由度控制器结构 Youla 参数化方法将最优鲁棒跟踪控制问题转化为两个相互独立的优化问题: 跟踪问题和鲁棒设计问题.跟踪问题以 l_∞ 范数为性能指标通过极小化跟踪误差的最大幅值实现最优跟踪控制; 鲁棒性设计问题中,将模型不确定性视为一种外界干扰,通过极小化干扰到误差的灵敏度函数的 l_1 范数使得干扰对跟踪误差的影响最小.通过截断处理,上述两种优化问题均可化为标准线性规划问题.给出了截断阶数与逼近误差之间的关系.仿真结果表明新方法的有效性.

关键词: 二自由度控制; 最优鲁棒跟踪; l_∞ 和 l_1 范数最优化
文献标识码: A

Two-Degree Optimal Robust Tracking Control Based on l_∞ and l_1 Norm Minimization

LI Shengping
(Department of Mechantronics Engineering, Shantou University · Guangdong Shantou. 515063, P.R.China)

Abstract: We investigate the problem of optimal robust tracking control of plants with multiplicative perturbations and unknown disturbances. By making use of Youla parametrization of two-parameter compensation scheme, the optimal robust tracking problem can be transformed into two independent problems that are called tracking problem and robustness design problem. The tracking performance is optimized by minimizing l_∞ norm of tracking error; The robustness design ensures stability to multiplicative perturbations and minimizes the l_1 norm of system's sensitivity from tracking error to various disturbances including that caused by model perturbations. These two optimizations are set up as linear program by truncation techniques. The relation between truncation degree and approximation error is provided. Simulations show that the new robust tracking control is effective.

Key words: two-parameter compensator; optimal robust tracking; l_∞ and l_1 norm optimization

1 引言(Introduction)

近十几年来, l_1 优化控制理论作为 H_∞ 控制理论的补充和平行的最优控制理论,得到了控制界的广泛关注并取得了大量有意义的研究成果. l_1 优化控制理论的基本问题之一是如何求解以范数为度量的模型匹配问题.从问题的不同方面已提出若干有效的求解方法,如 FMV(有限个变量), FME(有限个方程), DA(延迟增量)等[1,2],这些方法旨在将无穷维优化问题转化为有穷维问题,在应用方面的不足之处在于均涉及零点插值和秩插值运算,计算量较大,并且无法给出截断维数和最优指标之间的关系.另一个基本问题是鲁棒分析和综合问题,与 H_∞ 控制理论相比 l_1 控制理论对该问题的研究结果已相当成熟和完善[3,4].

近年来, l_1 优化控制理论开始应用于最优跟踪问题的研究[5,6].文献[5]以跟踪误差的 l_1 范数为性能指标,提出了新的最优跟踪控制器设计方案,该方案涉及一个以 l_1 范数为性能指标含无穷个变量和无穷个约束的优化问题,并且该问题不存在最优解.文献[6]利用 FMV 方法转化为有限维问题来处理,但该方法无法事先确定截断维数,只能凭经验给出.应当指出,截断维数与控制器作用的拍数有直接关系,这给实际应用带来很大的盲目性.

本文考虑同时具有乘摄动模型不确定性和未知干扰对象的最优鲁棒跟踪控制器的设计问题.利用二自由度控制器结构和控制器的 Youla 参数化设计

* 基金项目:广东省自然科学基金(990795)资助项目.
收稿日期:2000－01－18; 收修改稿日期:2000－10－13.

方法,将最优鲁棒跟踪问题转化为分别依赖二个独立参数的最优跟踪设计问题和最优鲁棒性设计问题.在最优跟踪问题中,以极小化跟踪误差的幅值为性能指标,相应的优化问题为以 l_∞ 范数为性能指标含无穷个变量和无穷个约束的优化问题,该优化问题较为复杂并且可能不存在最优解.本文给出一种新的截断方法,将优化问题化为线性规划问题,并且给出截断维数和最优指标的关系.在最优鲁棒性问题中,将系统的模型摄动对跟踪误差的影响视为一种未知干扰,从而最优鲁棒性设计问题转化为使干扰对跟踪误差幅值的影响最小,该问题归结为极小化各干扰到跟踪误差的灵敏度函数的 l_1 范数,但该优化问题不同于标准 l_1 模型匹配问题,因为,约束集含有确保系统稳定性的一个 l_1 范数约束.本文将提出一种新的处理方法将优化问题转化为线性规划问题.

2 问题描述(Problem statement)

记 $x(i)$ 为实数向量 x 的第 i 分量; $\|x\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \min_i |x(i)|$; $\|x\|_1 \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty}|x(i)|$; $l_\infty \overset{\text{def}}{=} \{x: \|x\|_\infty < \infty\}$; $l_1 \overset{\text{def}}{=} \{x: \|x\|_1 < \infty\}$.对所有 $x \in l_1$,定义 $\hat{x} = \sum_{i=0}^{\infty}x(i)z^i$(这里采用鲁棒控制习惯使用的 Z 变换法,与通常的 z 变换 $\hat{h} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty}x(i)z^{-i}$ 的关系是 $\hat{x}(z) = \hat{h}(\frac{1}{z})$),因 z 变换为一对一的映射,在下文中将 x 与 $\hat{x}$ 视为同一.定义 $p_kx = \{x_0, x_1, \cdots, x_k, 0, 0, \cdots\}$; $P_kl_1 = \{P_kx \mid x \in l_1\}$.以同样方式定义 P_kl_∞.表 X 为实赋范线性空间,X^* 为 X 的对偶空间,记 $x \in X, x^* \in X^*$,$\langle x, x^*\rangle$ 表示泛函 x^* 在 x 的取值.

本文考虑单变量系统的二自由度最优鲁棒跟踪控制问题.二自由度控制系统的一种可能的实现如图1所示[7].图中 r 为参考信号,d_1, d_2 为系统的未知但幅值有界干扰,即 $d_1 \in l_\infty$、$d_2 \in l_\infty$,z 为系统输出、P 为含有未建模动态的被控对象,表示为乘摄动不确定性模型:$P = P_0(1+\Delta)$,这里 $\Delta \in D_\infty(\gamma)$, 其中,$D_\infty(\gamma) = \{\Delta: \|\Delta\|_1 = \sup_{x\in\infty}\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leqslant \gamma$,$\Delta$ 为非线性或时变算子$\}$.名义模型可用互质分式表示,$P_0 = nd^{-1}$. $C_1 = d_c^{-1}n_{c1}$ 为跟踪控制器,$C_2 = d_c^{-1}n_{c2}$ 为反馈控制器.

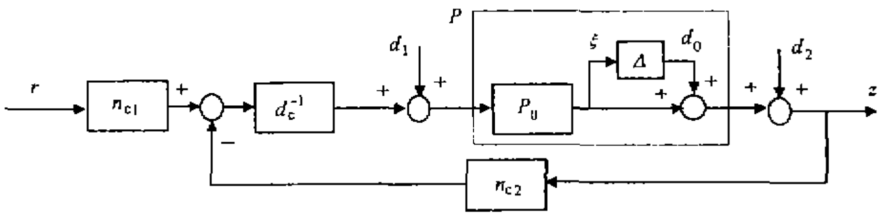

图1 二自由度控制器的一种实现

Fig. 1 Complementation of a Tow-parameter compensator

对二自由度控制器进行 Youla 参数化[7],可保证 $\Delta = 0$ 时图1所示名义系统是内稳定的.二自由度控制器的参数化形式为:

$$C = (C_1 \quad C_2) = d_c^{-1}(n_{c1} \quad n_{c2}) = (y - q_2n)^{-1}(q_1 \quad x + q_2d), \tag{1}$$

式中,$xn + dy = 1, y - q_2n \neq 0, q_1, q_2$,为相互独立的自由参数,满足:$q_1, q_2 \in l_1$.

定义 1[3] 图1所示系统中二自由度控制器取参数化形式(1).若对所有的 $\Delta \in D_\infty(\gamma)$ 系统内稳定,则称系统为鲁棒 l_∞ 稳定.

名义模型的跟踪误差记为 $\varepsilon = r - z$.

控制器设计目标是:在 l_1 空间中分别确定自由参数 q_1, q_2 使图1所示系统满足如下性能指标:名义系统对固定参考输入的一致跟踪误差 $\|\varepsilon\|_\infty$ 达到最小;对任意 $\Delta \in D_\infty(\gamma)$ 系统具有最优鲁棒 l_∞ 稳定性,并且使得干扰和模型摄动对系统输出的影响最小.

3 求解最优跟踪问题(Solving optimal tracking problem)

由图1名义模型的跟踪误差为

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{n_{c1}P_0}{d_c + n_{c2}P_0}\right)r, \tag{2}$$

式(1)代入式(2),得

$$\varepsilon = (1 - nq_1)r, \tag{3}$$

因此名义模型的最优一致跟踪问题化为如下优化问题:

$$\mu_T = \inf_{q_1\in l_1}\|\varepsilon\|_\infty = \inf_{q_1\in l_1}\|r - nrq_1\|_\infty. \tag{4}$$

假设 n, r 无单位圆上零点,记 $z_1, z_2, \cdots, z_l$ 为 nr 的位于单位圆内的零点,不失一般性,假设 nr 的单位圆内的零点互异.

记 $k = nrq_1$.

引理 1 给定假设1，$r \in l_\infty$ 和 $k \in l_\infty$，则存在 $q_1 \in l_1$ 满足 $k = nrq_1$ 的充分必要条件是：1) $k(z_i) = 0(i = 1,2,\cdots,l)$；2) k 具有与 nr 完全相同的单位圆上极点.

证 为保证 $q_1 = \dfrac{k}{nr} \in l_1$，$k$ 必含有 nr 的不稳定零点，即 1) 成立；并且由于 $k \in l_\infty$，所以 nr 必须含有 k 的不稳定极点，即 2) 成立. 充分性显然成立.

记 $S = \{k \in l_1 \mid k$ 满足引理 1 条件 1),2)$\}$，则 (4)等价于：

$$\mu_T = \inf_{k \in S} \| r - k \|_\infty. \tag{5}$$

注意到式(5)中由于约束条件 2)使得优化问题变得十分困难. 一种有效的方法是通过截断处理，缩小约束集 S 求式(5) 的次优解，但问题是如何确定次优解逼近最优解的程度与截断维数之间的关系. 下面通过放大约束集 S 得到式(5)的超最优问题，然后通过超最优解和次最优解之间的关系建立最优解与次优解的关系.

首先去掉约束条件 2)将约束集 S 放宽为 $S_1 = \{k \in l_\infty \mid k(z_i) = 0, i = 1,2,\cdots,l\}$，定义优化问题：

$$\mu_{T_s} = \inf_{k \in S_1} \| r - k \|_\infty. \tag{6}$$

记 $z_j r = \mathrm{Re}(1, z_j, z_j^2, \cdots)$，$z_j i = \mathrm{Im}(1, z_j, z_j^2, \cdots)$，于是

$$S_1 = \{k \in l_\infty \mid \langle z_j r, k\rangle = 0, \langle z_j i, k\rangle = 0, j = 1,2,\cdots,l\}.$$

定义子空间 $M = \mathrm{span}\{z_j r, z_j i(j = 1,2,\cdots,l)\}$，因 z_j 位于单位圆内 $|z_j| < 1(j = 1,2,\cdots,l)$ 所以 M 为 l_1 的子空间，又 $(l_1)^* = l_\infty$，因此 $S_1 = M^\perp$. 为进一步讨论，先引进下列定理.

定理 1[8] 设 M 为 X 的子空间，d 为 $x^*(\in X^*)$ 到 $M^\perp$ 的距离. 那么 $d = \min\limits_{m^* \in M^\perp} \| x^* - m^* \| = \sup\limits_{x \in BM} \langle x, x^* \rangle$. 总存在某个 $m^* \in M^\perp$ 使上式左端达到最小值；若存在某个 $x_0 \in BM$(BM 为 M 中的单位球)使右端达到上确界，则 $x^* - m^*$ 与 x_0 共线(即 $\langle x_0, x^* - m^* \rangle = \| x_0 \| \| x^* - m^* \|$).

由定理 1，式(6)存在最优解，可写成，

$$\mu_{T_s} = \min_{k \in M^\perp} \| r - k \|_\infty, \tag{7}$$

比较式(6)和式(5)，因 $S_1 \supseteq S$，所以 $\mu_{T_s} \leqslant \mu_T$，我们称式(6)为式(5)的超最优问题，显然超最优解不一定是可行解.

下面我们增加式(5)的约束条件考虑其次优问题. 重写式(5)：

$$\mu_T = \inf \| \varepsilon \|_\infty$$
$$\text{s.t.}\ r - \varepsilon = nrq_1,\ q_1 \in l_1.$$

在上述优化问题中引入附加约束，令序列 ε 中第 N 项以后各项为零，即对 ε 作 N 维截断，记 $\varphi = P_{N-1}\varepsilon$，因 $\varepsilon \in l_\infty$，所以 $\varphi \in P_{N-1} l_\infty$. 假设 N 取得足够大，使如下 N 维截断优化问题具有可行解：

$$\mu_{TN} = \min \| \varphi \|_\infty \tag{8}$$
$$\text{s.t.}\ r - \varphi = nrq_1,\ q_1 \in l_1.$$

因 φ 为有限维多项式，由 $r - \varphi = nrq_1$ 可知，$q_1 \in l_1$ 的充分必要条件是：$r - \varphi$ 应含有 nr 的全部不稳定零点，即 $(\varphi - r)(z_j) = 0(j = 1,2,\cdots,l)$. 于是式(8)可写成如下有限维优化问题：

$$\mu_{TN} = \min \| \varphi \|_\infty. \tag{9}$$
$$\text{s.t.}\ \varphi \in P_{N-1} l_\infty,\ \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(i) z_j^i = r(z_j),\ j = 1,2,\cdots,l.$$

由于式(9)由式(5)增加约束条件后得到，所以 $\mu_{TN} \geqslant \mu_T$. 我们称式(9)为式(5)的次最优问题.

上面建立了与原问题(5)有关的二个优化问题：超最优问题(6)和次最优问题(9)并且这二个优化问题都存在最优解，它们的最优目标函数值满足

$$\mu_{T_s} \leqslant \mu_T \leqslant \mu_{TN}. \tag{10}$$

定理 2 给定优化问题(9)，对任意给定的 $\delta > 0$，存在足够大的 N，使得 N 维截断问题(6) 与(9) 满足关系：$\mu_{T_s} \leqslant \mu_{TN} \leqslant (1 + \delta)\mu_{T_s}$。

证 事实上只需证明 $\mu_{TN} \leqslant (1 + \delta)\mu_{T_s}$. 不妨设 nr 的不稳定零点 $z_j(j = 1,2,\cdots,l)$ 中含 m 个实根，p 个共轭复根($m + 2p = l$)，其中前 m 个为实根. 根据定理 1，可有

$$\mu_{T_s} = \min_{k \in M^\perp} \| r - k \| = \sup_{g \in BM} \langle g, r \rangle, \tag{11}$$

其中 $BM = \{g \in l_1 \mid \sum\limits_{j=0}^{\infty} |g(j)| \leqslant 1, g(j) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^j + \sum\limits_{i=m+1}^{m+p} [\lambda_i \mathrm{Re}(z_i^j) + \lambda_{i+p} \mathrm{Im}(z_i^j)]\}$. 上述优化问题中前者称为原问题，后者称为对偶问题. 考虑对偶问题的 N 维截断问题：

$$\mu_{TNd} = \max \langle g, r \rangle \tag{12}$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=0}^{N-1} |g(j)| \leqslant 1.$$

容易验证式(12)正是式(9)的维截断问题的对偶问题. 即

$$\mu_{TN} = \min_{\substack{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi(i) z_j^i = r(z_j) \\ \varphi \in P_{N-1} l_\infty}} \| \varphi \|_\infty = \max_{\sum_{j=0}^{N-1} |g(j)| \leqslant 1} \langle g, r \rangle. \tag{13}$$

下面通过优化问题(11)和(13)的对偶问题部分建立

μ_{T_s} 与 μ_{TN} 的关系.

首先证明对于任意给定的 δ,存在足够大的正整数 N,满足:

$$\sum_{j=N}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^j + \sum_{i=m+1}^{m+p} [\lambda_i \mathrm{Re}(z_i^j) + \lambda_{i+p} \mathrm{Im}(z_i^j)] \right| \leqslant \delta.$$

定义矩阵:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ z_1 & \cdots & z_m & \mathrm{Re}(z_{m+1}) & \cdots & \mathrm{Re}(z_{m+p}) & \mathrm{Im}(z_{m+1}) & \cdots & \mathrm{Im}(z_{m+p}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{L-1} & \cdots & z_m^{L-1} & \mathrm{Re}(z_{m+1}^{L-1}) & \cdots & \mathrm{Re}(z_{m+p}^{L-1}) & \mathrm{Im}(z_{m+p}^{L-1}) & \cdots & \mathrm{Im}(z_{m+p}^{L-1}) \end{bmatrix},$$

式中 $L \geqslant l$.

记 $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)^{\mathrm{T}}$,因 $L \geqslant l$,注意 $l = m + 2p$,所以 F 有左逆 F^{-1} 使得 $F^{-1}F\bar{\lambda} = \bar{\lambda}$,而 $\bar{\lambda}$ 为 l 维实数向量,因此 $\bar{\lambda} \in P_l l_1$, $F\bar{\lambda} \in P_{L-1} l_1$. 将 F^{-1} 视为 $P_{L-1} l_1$ 空间到 $P_l l_1$ 空间的算子,记 $F^{-1} = [f_{ij}]_{l \times L}$,则不难验证其诱导范数为:

$$\| F^{-1} \|_{1,1} = \sum_{i=1}^{l} [\max_{1 \leqslant j \leqslant L-1} | f_{ij} |],$$

于是 $\quad \| \bar{\lambda} \|_1 \leqslant \| F^{-1} \|_{1,1} \| F\bar{\lambda} \|_1.$

因 $\quad \| F\bar{\lambda} \|_1 \sum_{j=0}^{L-1} | g(j) | \leqslant 1,$

所以 $\quad \| \bar{\lambda} \|_1 \leqslant \| F^{-1} \|_{1,1}.$

又

$$\sum_{j=L}^{\infty} | g(j) | \leqslant \sum_{j=L}^{\infty} [\max_{1 \leqslant i \leqslant l} | z_i |]^j \| \bar{\lambda} \|_1 \leqslant \frac{[\max_i | z_i |]^L}{1 - [\max_i | z_i |]} \| F^{-1} \|_{1,1}$$

(因 z_i 位于单位圆内,即 $\max_{1 \leqslant i \leqslant l} | z_i | < 1$) 对任意给定的 $\delta > 0$,取

$$N = \max\left\{ \ln \frac{\delta(1 - \max_i | z_i |)}{\| F^{-1} \|_{1,1}} / \ln(\max_i | z_i |), l \right\}, \tag{14}$$

只要 $L \geqslant N$,则 $\sum_{j=L}^{\infty} | g(j) | < \delta$.

下面对于给定的 δ 和由式(14) 估计的 N 证明 $\mu_{TN} \leqslant (1 + \delta)\mu_{T_s}$. 令优化问题(13) 中对偶问题(12) 的最优解为 $\bar{\lambda}^*$, 记

$$g^*(j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* z_i^j + \sum_{i=m+1}^{m+p} [\lambda_i^* \mathrm{Re}(z_i^j) + \lambda_{i+p}^* \mathrm{Im}(z_i^j)],$$

则

$$\sum_{j=0}^{\infty} | g^*(j) | = \sum_{j=0}^{N-1} | g^*(j) | + \sum_{j=N}^{\infty} | g^*(j) | < 1 + \delta,$$

并且 $\langle g^*, r \rangle = \mu_{TN}$. 根据优化问题(11)的对偶部分,可有

$$\mu_{T_s} = \sup_{g \in BM} \langle g, r \rangle = \sup_{\substack{g \in M \\ \| g \|_1 \leqslant 1+\delta}} \frac{\langle g, r \rangle}{1 + \delta} \geqslant \frac{\langle g^*, r \rangle}{1 + \delta} = \frac{\mu_{TN}}{1 + \delta},$$

即 $\mu_{TN} \leqslant (1 + \delta)\mu_{T_s}$. 证毕.

注 1 按式(14)选取的 N 有可能使得截断问题(9) 无解,但总能通过增大 N 使(9)存在最优解,并且不影响定理 2 的结论.

注 2 对任意给定的 $\delta > 0$,按(14) 式选取 N,结合式(10)可有

$$\frac{\mu_{TN}}{1 + \delta} \leqslant \mu_T \leqslant \mu_{TN}. \tag{15}$$

式(15)表明,可以通过解 N 维截断问题(9) 求解跟踪问题(5) 的次最优解,并且由于 δ 的任意性, $\lim_{N \to \infty} \mu_{TN} = \mu_T$,即(9) 随着 N 的增大能以任意精度逼近(5) 的最优解. 更进一步,对于一个给定的精度控制量 δ,总能用式(14) 确定截断维数 N,使得次优目标函数值与次优目标函数值的偏差限制在一个预定的精度范围内,具体地, $| \mu_{TN} - \mu_T | \leqslant \left| \mu_{TN} - \frac{\mu_{TN}}{1+\delta} \right| = \frac{\delta}{1+\delta} \mu_{TN}$.

下面讨论 N 维截断问题(9)的求解方法.

定理 3 优化问题(9)等价于如下线性规划问题:

$$\min \mu \tag{16}$$

$$\text{s.t.} -\mu \leqslant \varphi(j) \leqslant \mu,\ j = 0, 1, \cdots, N-1,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi(j) z_i^j = r(z_i),\ i = 1, 2, \cdots, l,$$

$$\mu \geqslant 0.$$

证 式(9)可写成:

$$\mu_{TN} = \min\{ \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} | \varphi(j) | \}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(j) z_i^j = r(z_i),\ i = 1, 2, \cdots, l.$$

令 $\mu = \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} | \varphi(j) |$,即 $| \varphi(j) | \leqslant \mu, 0 \leqslant j \leqslant$

$N-1$. 故式(9)等价于式(16).

设式(16)的最优解为 φ^*,由此可确定次优解 q_1^*.

由最优跟踪问题的定义可知,其最优目标函数值是线性控制器可能达到的跟踪误差的最小幅值,由于最优跟踪问题十分困难并且可能根本不存在最优解,因此只能求其次优解,本节所提出的截断方法不仅给出了次优解的求解方法,而且次优解逼近最优解的精度可以预先得到估计,工程意义十分明确.

4 求解最优鲁棒性设计问题(Solving optimal robustness design problem)

由第3节确定的 q_1 使 n_{c1} 稳定,因此图1所示系统鲁棒 l_∞ 稳定的充分必要条件为[3]: $\left\|\dfrac{n_{c2}P_0}{d_c+n_{c2}P_0}\right\|_1 \leqslant \gamma^{-1}$. 把式(1)代入此式,可得闭环系统鲁棒 l_∞ 稳定约束条件:

$$\|n(x+dq_2)\|_1 \leqslant \gamma^{-1}. \tag{17}$$

为了统一处理对象的不确定性,将对象的模型不确定性的输出视为系统的干扰,记为 d_3,由图1,有 $d_3=\Delta(u+d_1)$,又 $\|\Delta\|_1<\gamma$,所以 $\|d_3\|_\infty \leqslant \gamma\|u+d_1\|_\infty \leqslant \gamma(\|u\|_\infty+\|d_1\|_\infty)$,若系统鲁棒 l_∞ 稳定,则图1所示系统中 u 幅值有界,即 $\|u\|_\infty<\infty$,可见只要保证系统鲁棒 l_∞ 稳定,这时 $\|d_3\|<\infty$. 由图1和式(1)容易得到

$$z=m(y-nq_2)(d_1+d_3)+d(y-nq_2)d_2, \tag{18}$$

$$u=-n(x+dq_2)(d_1+d_3)-d(x+dq_2)d_2. \tag{19}$$

我们的目标是在保证系统闭环鲁棒 l_∞ 稳定的条件下,使 d_1,d_2,d_3 引起的 $\|z\|_\infty$ 最小,但 $d_1,d_2,d_3\in l_\infty$ 为未知信号,直接极小化 $\|z\|_\infty$ 十分困难. 由于 $\sup\limits_{\|(d_1+d_3\ d_2)^{\mathrm T}\|_\infty\leqslant 1}\|z\|_\infty=\|n(y-nq_2)\quad d(y-nq_2))\|_1$,因此可以通过最小化 $\|(n(y-nq_2)\quad d(y-nq_2))\|_1$ 使最坏情况下的 $\|z\|_\infty$ 达到最小,但这有可能导致 $\|u\|_\infty$ 无限增大从而使得 $\|d_3\|_\infty$ 无限增大,使优化失去意义,因此必须同时考虑 u 的影响. 为此,我们将最优鲁棒设计问题归结为如下优化问题:

$$\begin{aligned}\mu_R=\inf\{&c_1\|ny-n^2q_2\quad dy-ndq_2\|_1+\\&c_2\|nx+ndq_2\quad dx+d^2q_2\|_1\}\end{aligned} \tag{20}$$

$$\text{s.t.}\ q_2\in l_1,\ \|nx+ndq_2\|_1\leqslant\gamma^{-1},$$

其中,$c_1,c_2>0$ 为加权常数.

不计约束 $\|nx+ndq_2\|_1\leqslant\gamma^{-1}$,(20)是一个模型匹配问题,对于该问题目前已有多种求解方法,如FMV(有限变量),FME(有限约束方程),DA(延迟增量)等[1,2],但这些方法不仅需要做相当复杂的插值运算而且难以增加新的约束条件. 为此下面给出一种新的求解方法.

为便于叙述,记 $\phi_1=ny-n^2q_2,\phi_2=dy-dnq_2,\phi_3=nx+ndq_2,\phi_4=dx+d^2q_2$.(上述各项相乘的意义是: 若各项表为多项式,则为普通乘法; 若各项表为相应的序列则为卷积). 注意到多项式在 A 中稠密,并且 $q_2\in l_1$,因此在 l_1 空间中能用 q_2 的有限维截断序列以任意精度逼近 q_2. 取 q_2 的 T 维截断,(20)可由如下有限维优化问题作近似描述:

$$\begin{aligned}\mu_{RT}=\min\sum_{k=0}^{N-1}\{&c_1|\phi_1(k)|+c_1|\phi_2(k)|+\\&c_2|\phi_3(k)|+c_2|\phi_4(k)|\}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ &\phi_1(k)=(ny-n^2q_2)(k),\\&\phi_2(k)=(dy-dnq_2)(k),\\&\phi_3(k)=(nx+ndq_2)(k),\\&\phi_4(k)=(dx+d^2q_2)(k),\\&\sum_{k=0}^{N-1}|\phi_3(k)|\leqslant\gamma^{-1},\ k=0,1,\cdots,N-1,\\&\phi_1(k)=\phi_2(k)=0,\ k\geqslant N.\end{aligned}$$

上式中 N 由 q_2 的截断维数 T 确定. 显然,(21)是由(20)增加约束条件后得到的,所以 $\mu_{RT}\geqslant\mu_R$,并且,$\lim\limits_{T\to\infty}\mu_{RT}=\mu_R$.(21)为非线性优化问题,下面引入附加变量化为线性规划问题.

令 $\phi_i=\phi_i^+-\phi_i^-$,其中 $\phi_i^+\geqslant 0,\phi_i^-\geqslant 0$,则 $\|\phi_i\|_1=\sum\limits_k[\phi_i^+(k)+\phi_i^-(k)]$[9],于是(21)等价为如下线性规划问题:

$$\mu_{RT}=\min\mu \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ &\sum_{k=0}^{N-1}[c_1(\phi_1^+(k)+\phi_1^-(k))+c_1(\phi_2^+(k)+\\&\quad\phi_2^-(k))+c_2(\phi_3^+(k)+\phi_3^-(k))+\\&\quad c_2(\phi_4^+(k)+\phi_4^-(k))]\leqslant\mu,\\&\phi_1^+(k)-\phi_1^-(k)+(n^2q_2)(k)=(ny)(k),\\&\phi_2^+(k)-\phi_2^-(k)+(dnq_2)(k)=(dy)(k),\\&\phi_3^+(k)-\phi_3^-(k)-(ndq_2)(k)=(nx)(k),\\&\phi_4^+(k)-\phi_4^-(k)-(d^2q_2)(k)=(dx)(k),\\&k=0,1,\cdots,N-1,\\&\sum_{k=0}^{N-1}[\phi_3^+(k)+\phi_3^-(k)]\leqslant\gamma^{-1},\end{aligned}$$

$\phi_i^+ \geq 0,\ \phi_i^- \geq 0,$

$\phi_i^+(k) = \phi_i^-(k) = 0,\ k \geq N,\ i = 1,2,3,4.$

解上述线性规划问题得 q_2^*,将 q_1^*,q_2^* 代入(1)式便得到二自由度鲁棒跟踪控制器.

5 仿真结果(Simulation results)

考虑非最小相位名义系统模型 $P_0 = \frac{4z-1}{3z-1}$,该模型含有不稳定极点和不稳定零点. 取参考信号 $r = \frac{1}{1-z}$,取 $N = 5$,采样周期 $T = 2$ 控制器设计结果为:$q_1 = 0.0019 + 0.0187z + 0.0391z^2 + 0.0792z^3 + 0.2176z^4$,$q_2 = 1.001 + 0.1016z$. 仿真过程中取模型摄动为如下时变算子:

$$\Delta_0 = \begin{cases} \frac{-0.1}{1-0.4z}, & 20k \leq t \leq 20k+10, \\ \frac{0.08z}{1+0.2z}, & 20k+10 \leq t \leq 20k+20, \end{cases} \quad k = 0,1,2,\cdots.$$

输入输出通道干扰取 $d_1 = d_2 = 0.05(1 - 0.1z + 0.01z^2 - 0.02z^3 + 0.06z^4 - 0.008z^5)/(1-z)$. 仿真结果如图 2 所示.

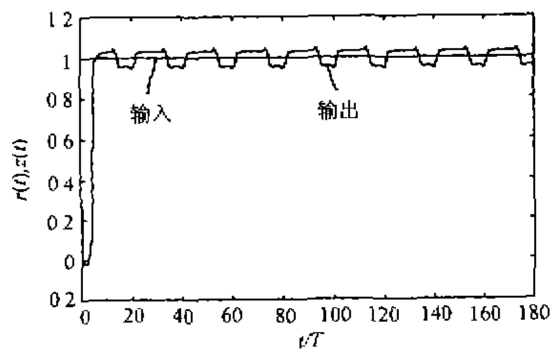

图 2(a) 输出信号和输入信号

Fig. 2(a) Input signal and output signal

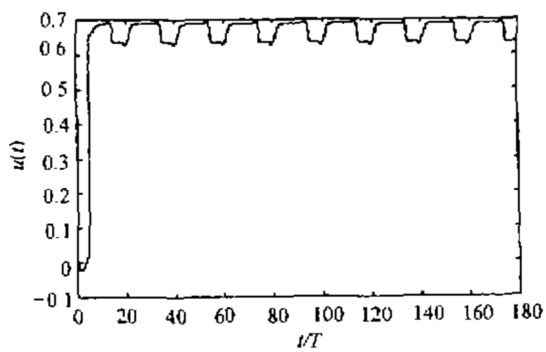

图 2(b) 控制信号

Fig. 2(b) Control signal

6 结论(Conclusion)

本文研究了鲁棒跟踪控制器的优化设计方法. 在跟踪问题中关心的是跟踪误差,本文用 l_∞ 范数描述跟踪误差的大小,用灵敏度函数的 l_1 范数描述未知干扰(将模型不确定性也转化为外界干扰)对跟踪误差影响的强弱,具有明确的工程意义. 在此基础上利用二自由控制结构将最优鲁棒跟踪问题化为二个相互独立的优化问题了:最优跟踪问题和最优鲁棒性设计问题. 由于最优跟踪问题的复杂性,提出了一种截断方法化为次优问题,最后化为线性规划问题进行求解;次优解随截断维数的增加不仅能以任意精度逼近最优解,而且次优指标与最优指标的偏差跟截断维数的关系能以一种简单而明确的关系加以确定. 在最优鲁棒性设计问题中由于模型不确定性引起的稳定性约束,使得这里的优化问题不同于 l_1 框架下的模型匹配问题,本文提出了一种截断处理方法化为线性规划问题. 本文提出的方法不仅具有工程意义而且具有重要的理论意义,即给出了线性控制器所能达到的最好的跟踪性能.

参考文献(References)

[1] Staffans O J. The four-block model matching problem in l_1 and infinite dimensional linear programming [J]. SIAM J. Control Optimal, 1993, 31(3): 747 – 779

[2] Diaz-Bobillo I J and Dahleh M A. Minimization of the maximum peak-to-peak gain: the general multiblock problem [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1993, 38(10): 1459 – 1482

[3] Dahleh M A and Ohta Y A. Necessary and sufficient condition for robust BIBO stability [J]. Systems & Control Letters, 1988, 11(3): 271 – 275

[4] Khammash M and Pearson J B. Performance robustness of discrete time systems with structured uncertainty [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1991, 36(3): 398 – 412

[5] Spillman M and Ridgely D B. Flight control applications of l_1 optimization [J]. J. Guidance, Control and Dynamics, 1997, 20(1): 49 – 56

[6] Scott C N and Wood L A. Optimal robust tracking subject to disturbances, noise, plant uncertainty [J]. J. Guidance, Control and Dynamics, 1998, 21(10): 774 – 779

[7] Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Fatorization Approach [M]. Cambridge, MA: The MIT Press, 1985

[8] Lueberger D G. Optimization by Vector Space Methods [M]. New York: Wiley, 1969

[9] Mendlovitz M A. A simple solution to the l^1 optimization problem [J]. Systems & Control Letters, 1989, 12(5): 461 – 463

本文作者简介

李昇平 1966 年生. 1995 年毕业于华中理工大学自动控制工程系,获得工学博士学位, 1997 年在东北大学自动化研究中心完成博士后研究工作. 现为汕头大学机械电子工程系副教授. 感兴趣的研究领域为鲁棒控制,鲁棒辨识、自适应控制,智能控制及其工程应用.