

文章编号: 1000-8152(2001)04-0589-04

利用 Lyapunov 指数和容量维分析永磁同步电机仿真中的混沌现象*

张 波

(华南理工大学电力学院·广州, 510640)

李 忠 毛宗源 侯小梅 庞敏熙

(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640) (香港大学电机工程系·香港)

摘要: 给出了一种适合于一般混沌系统 Lyapunov 指数和容量维计算的数值算法, 并首次应用于永磁同步电机混沌现象的分析. 在给定的几种典型运行条件下, 计算了永磁同步电机混沌模型的 Lyapunov 指数和容量维, 结果表明永磁同步电机运行呈现混沌行为, 从而通过特征指数验证了永磁同步电机混沌现象的存在性.

关键词: 永磁同步电机; 混沌; Lyapunov 指数; 容量维

文献标识码: A

Analyzing Chaotic Phenomenon in Permanent-Magnet Synchronous Motors with Lyapunov Exponent and Capacity Dimension

ZHANG Bo

(Power Electric College, South China University of Technology·Guangzhou, 510640, P. R. China)

LI Zhong, MAO Zongyuan and HOU Xiaomei

(Department of Automation, South China University of Technology·Guangzhou, 510640, P. R. China)

M. H. Pong

(Department of Electrical and Electronic Engineering, the University of Hong Kong·Hong Kong)

Abstract: This paper proposed a numerical algorithm to compute the Lyapunov exponent and capacity dimension for non-linear chaotic system, and first applies it to analyse the chaotic phenomena of permanent-magnet synchronous motors (PMSM). Under several typical operation conditions, the Lyapunov exponents and capacity dimensions for PMSM are computed. The characteristic exponents state clearly and verify the existence of chaotic behaviors in PMSM.

Key words: PMSM; chaos; Lyapunov exponent; capacity dimension

1 引言(Introduction)

前期永磁同步电机混沌模型的建立和计算机仿真结果表明^[1], 在给定的几种典型运行条件下, 永磁同步电机运行将呈现混沌行为. 但由于计算机精度的限制, 所观察到的现象可能受到质疑^[2], 因此为证实永磁同步电机混沌现象的真实性, 还需要从理论上进一步确定永磁同步电机混沌现象的特征指数. 目前确定混沌系统特征指数的方法有: Lyapunov 指数、分数维、容量维、测度熵、功率谱、Poincare 截面等^[3-5]. 其中 Lyapunov 指数、分数维、容量维和测度熵是量化的特征指数, 可以直观地确定混沌系统. Lyapunov 指数又是这些量化指标最重要的一个, 利用其可严格判别混沌系统. 通过 Lyapunov 指数的计算还可以进一步确定混沌系统的容量维和测度维.

因而, 计算 Lyapunov 指数在混沌系统的研究中具有不可替代的意义.

Lyapunov 指数的计算对于不同的混沌系统难易程度均不相同, 尚无统一的计算方法, 而且永磁同步电机混沌模型是一个三阶以上的非线性系统^[1], Lyapunov 指数的计算难度较大. 为此本文在基本 Lyapunov 指数定义的基础上, 发展了一种分段积分修正求解的 Lyapunov 指数的数值算法, 并引申出一种容量维的数值算法. 从而解决了永磁同步电机混沌运动的 Lyapunov 指数和容量维的计算问题, 这为证实计算机仿真所观察到的永磁同步电机混沌运动提供了有力的理论依据. 也为一般的混沌系统提供了一种 Lyapunov 指数和容量维的数值算法.

* 基金项目: 国家自然科学基金(59777008)和广东省自然科学基金(980579)资助项目.

收稿日期: 1999-07-23; 收修改稿日期: 2001-01-09

2 Lyapunov 指数和容量维的数值计算方法

(A numerical algorithm to compute the Lyapunov exponent and capacity dimension)

2.1 Lyapunov 指数(Lyapunov exponent)

对于非线性方程: $\dot{x} = f(x)$, 初值为 $x(0) = x_0$. 设其解为 $\phi_t(x_0)$, 即满足:

$$\dot{\phi}_t(x_0) = f(\phi_t(x_0)), \quad \phi_0(x_0) = x_0. \quad (1)$$

对(1)式两边关于 x_0 求导得:

$$\begin{aligned} D_{x_0} \dot{\phi}_t(x_0) &= D_x f(\phi_t(x_0)) D_{x_0} \phi_t(x_0), \\ D_{x_0} \phi_t(x_0) &= I. \end{aligned} \quad (2)$$

记 $\Phi_t(x_0) = D_{x_0} \phi_t(x_0)$, 则(2)式变为:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_t(x_0) &= D_x f(\phi_t(x_0)) \Phi_t(x_0), \\ \Phi_0(x_0) &= I. \end{aligned} \quad (3)$$

这是一个变分方程, 其解为矩阵值, 它可以看作是向量场沿轨线 $\Phi_t(x_0)$ 的线性化. 如果轨线变化, 变分方程也随着变化.

$\Phi_t(x_0)$ 即为线性系统(3)的状态转移矩阵, 如给初值 x_0 一个扰动 δx_0 , 经过 t 时间后变为:

$$\delta x(t) = \Phi_t(x_0) \delta x_0. \quad (4)$$

对变分方程(3)积分, 初始条件为 $\Phi_0(x_0) = I$, 积分时间为 T ; 如果 T 足够长, 则 Lyapunov 指数定义为:

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln |m_i(T)|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

这里 m_i 为 $\Phi_T(x_0)$ 的特征值.

2.2 Lyapunov 指数的数值算法(A numerical algorithm of the Lyapunov exponent)

由于 Lyapunov 指数是表示相空间中邻近轨道的平均发散率的定量化指数, 而相空间是一个有限的空间. 因而 n ($n \geq 3$) 在维空间中的某一时刻, 两条相邻的轨线之间的距离可以分解在 n 个不同的方向上, 这 n 个不同的方向上距离的增长率是不同的, 每个增长率就是一个 Lyapunov 指数. 对于混沌系统, 至少有一个 Lyapunov 指数为正, 这意味着当 $T \rightarrow \infty$ 时 $\Phi_T(x)$ 无界. 由于系统是非线性的, 当 T 足够大时, 所求得的线性化系统的基解矩阵 $\Phi_T(x)$ 就会有较大的误差, 那么其特征值 m_i 也不能准确地求得, 因而也不能准确反应两条相邻相轨之间的发散率.

为此可以通过对变分方程(3)分段求积分来修正求解的方法, 选择适当的步长 $T > 0$, 初始状态为 x_0 (它必须在吸引域(basin of attraction)内), 整数 $K > 0$, 设 $x^{(0)} = x_0, x^{(k)} = \phi_T(x^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, K$, 则有:

$$\Phi_{KT}(x^{(0)}) = \Phi_T(x^{(K-1)}) \dots \Phi_T(x^{(0)}). \quad (6)$$

这里如果 T 不太大, 那么每一步 $\Phi_T(x^{(k)})$ 及积分都可以较精确地求得^[4]. 其求解过程可参见示意图.

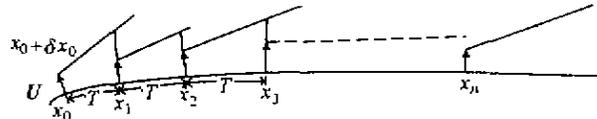


图1 计算 Lyapunov 指数的示意图

Fig 1 Iterative process for computing Lyapunov exponent

这里 x_0 表示轨线 T 的起始点, U 表示正交基向量, T 为积分步长.

求解的具体步骤如下:

1) 选择一初始条件 x_0 和初始扰动 δx_0 ; 设 $x^{(0)} = x_0, \delta x^{(0)} = \delta x_0$; 有一组线性独立的向量且 δx_0 在其上的分量为 $|\delta x_1^{(0)}, \dots, \delta x_n^{(0)}|$;

2) 将 Gram-Schmidt 正交化法^[4,6]用于 $|\delta x_1^{(0)}, \dots, \delta x_n^{(0)}|$ 而产生一组正交基向量 $\{u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}\}$, 且 δx_0 在其上的分量为 $\{v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}\}$, 它与 $|\delta x_1, \dots, \delta x_n|$ 张成相同的子空间:

$$\begin{cases} v_1^{(0)} = \delta x_1^{(0)}, \\ u_1^{(0)} = v_1^{(0)} / \|v_1^{(0)}\|, \\ v_2^{(0)} = \delta x_2^{(0)} - \langle \delta x_2^{(0)}, u_1^{(0)} \rangle u_1^{(0)}, \\ u_2^{(0)} = v_2^{(0)} / \|v_2^{(0)}\|, \\ \dots \\ v_n^{(0)} = \delta x_n^{(0)} - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \delta x_n^{(0)}, u_i^{(0)} \rangle u_i^{(0)}, \\ u_n^{(0)} = v_n^{(0)} / \|v_n^{(0)}\|. \end{cases} \quad (7)$$

3) $x^{(j)} = \phi_T(x^{(j-1)}), \delta x_i^j = \Phi_T(x^{(j-1)}) v_i^{(j-1)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, K$; 再利用 Gram-Schmidt 正交化法(如(7)式)得到 $\{u_i^j\}, \dots, \{u_n^j\}$, 且 δx^j 在其上的分量为 $\{v_1^j, \dots, v_n^j\}$; 由于 Lyapunov 指数是轨道各处指数发散率的统计平均, 统计的要求要具备足够的信息量, 因此 K 必需相当大.

这样 n 个 Lyapunov 指数可由下式求得:

$$\lambda_i \approx \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|v_i^{(k)}\|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

且 Lyapunov 指数要满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$.

2.3 容量维数值计算方法的引出(Deduction of a numerical algorithm of capacity dimension)

混沌吸引子具有无穷层次的自相似结构, 这种自相似的几何结构是一种离散的结构, 可以用维数来刻画它的离散程度. 容量维是一种分数维, 它又称

为 Hausdorff 维. 容量维的定义可以描述为^[2]: 用一边长为 ϵ 的 N 维立方体去测量给定的空间, 所测得的立方体的个数为 $L(\epsilon)$, 则容量维 D_c 为

$$D_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L(\epsilon)}{\ln 1/\epsilon}.$$

由于容量维与 Lyapunov 指数之间存在相互关系, 因而容量维的数值方法可容易推出:

$$D_c = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{-\lambda_i + 1}.$$

其中 j 要满足: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_j \geq 0 \geq \lambda_{j+1} \geq \dots \geq \lambda_N$. j 中包括等于零的 Lyapunov 指数的个数.

3 永磁同步电机的混沌模型及其 Lyapunov 指数和容量维 (Chaotic model of permanent-magnet synchronous motor and its Lyapunov exponent and capacity dimension)

根据文[1], 以 i_d, i_q 和 ω 为状态变量, 永磁同步电动机混沌模型可写为:

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = (u_d - R_1 i_d + \omega L_q i_q) / L_d, \\ \frac{di_q}{dt} = (u_q - R_1 i_q - \omega L_d i_d - \omega \Psi_r) / L_q, \\ \frac{d\omega}{dt} = [n_p \Psi_r i_q + n_p (L_d - L_q) i_d i_q - \bar{T}_L - \beta \omega] / J. \end{cases} \quad (9)$$

通过仿射变换和时间尺度变换, 将(9)变换成无量纲的状态方程.

选择仿射变换

$$x = \lambda \bar{x}$$

及时间尺度变换

$$t = \tau \bar{t}.$$

其中

$$x = [i_d \ i_q \ \omega]^T, \quad \bar{x} = [\bar{i}_d \ \bar{i}_q \ \bar{\omega}],$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_d & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_q & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bk & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$b = \frac{L_q}{L_d}, \quad k = \frac{\beta}{n_p \tau \Psi_r}, \quad \tau = \frac{L_q}{R_1}.$$

则无量纲状态方程为:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{i}_d}{d\bar{t}} = -\bar{i}_d + \bar{\omega} \bar{i}_q + \bar{u}_d, \\ \frac{d\bar{i}_q}{d\bar{t}} = -\bar{i}_q - \bar{\omega} \bar{i}_d + \gamma \bar{\omega} + \bar{u}_q, \\ \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} = \sigma (\bar{i}_q - \bar{\omega}) + \epsilon \bar{i}_d \bar{i}_q - \bar{T}_L. \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$r = \frac{\Psi_r}{KL_q}, \quad \sigma = \frac{\beta \tau}{J},$$

$$\epsilon = \frac{n_p b \tau^2 k^2 (L_d - L_q)}{J}, \quad \bar{u}_d = \frac{1}{R_1 k} u_d,$$

$$\bar{u}_q = \frac{1}{R_1 k} u_q, \quad \bar{T}_L = \frac{\tau^2}{J} T_L.$$

不失一般性, 研究气隙均匀的永磁同步电动机混沌模型, 即考虑 $L_d = L_q = L$ 的情形, 模型为:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{i}_d}{d\bar{t}} = -\bar{i}_d + \bar{\omega} \bar{i}_q + \bar{u}_d, \\ \frac{d\bar{i}_q}{d\bar{t}} = -\bar{i}_q - \bar{\omega} \bar{i}_d + \gamma \bar{\omega} + \bar{u}_q, \\ \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} = \sigma (\bar{i}_q - \bar{\omega}) - \bar{T}_L. \end{cases} \quad (11)$$

假定永磁同步电机参数设为: $L_d = L_q = L = 14.25 \text{ mH}$; $R_1 = 0.9 \Omega$; $\Psi_r = 0.031 \text{ Nm/A}$; $n_p = 1$; $J = 4.7 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$; $\beta = 0.0162 \text{ N/rad} \cdot \text{s}^{-1}$. 对于非线性系统, 如出现混沌行为, 其 Lyapunov 指数的形式应为 $(+, 0, -)$, 而对于永磁同步电机这样一个三维系统, 经分析表明^[6], 只需求其最大 Lyapunov 指数, 即可证实其混沌行为.

算例 I 如上给出的参数, 在运行参数 $\bar{u}_q = 0.0231$, $\bar{T}_L = 1.2$, $\bar{u}_d = -0.0462$ 条件下:

1) 设初值为 $x^{(0)} = x_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$, 线性独立基向量为 $\{\delta x_1^{(0)}, \dots, \delta x_n^{(0)}\} = I$, 初始扰动在其上的坐标为 $\delta x^0 = \delta x_0 = (1, \dots, 1)$;

2) 微分方程(11)可由数值积分求得 $\phi_i(x_0)$; 其相应变分方程(3)的状态转移矩阵可通过将(11)在 x_0 线性化求得: 设其线性化矩阵为 A , 则 $\Phi_i(x_0) = e^{Ai}$;

3) 设积分步长为 T ;

$$\delta x_i^{(1)} = \Phi_T(x_0) \delta x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$x^{(1)} = \phi_i(x^{(0)});$$

4) 计算 $\lambda_i^1 \approx \frac{1}{T} \ln \|\delta x_i^{(1)}\|$, $i = 1, 2, \dots, n$ (利用(7)式中的记号);

5) 利用(7)式对 $\delta x_i^{(1)} = \Phi_T(x_0) \delta x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 进行正交化;

6) 重复 2) - 5) 步骤, 并在每一次循环求 $\lambda_i \approx$

$$\frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\delta x_i^{(k)}\|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ 直到 } K = K_{\max} \text{ 步}$$

或当 $(\sum_{i=1}^n (\lambda_i^k - \lambda_i^{k-1})^2)^{1/2} < \alpha$, $0 < \alpha \ll 1$ 为常数;

计算结果为: $\lambda_+ = 0.4287$, 则 $D_c = 2.7504$; 算例 II, III, IV 可依照同样步骤计算, 在此略, 结果见表 1.

表 1 Lyapunov 指数和容量维

Table 1 The Lyapunov Exponent and Capacity Dimension for PMSM

参数选择	最大 Lyapunov	容量维
I: $\bar{u}_r = 0.0231, \bar{T}_L = 1.2, \bar{u}_d = -0.0462$	0.4287	2.7504
II: $\bar{u}_d = \bar{u}_q = \bar{T}_L = 0, \sigma = 5.46, \gamma = 20$	0.4417	2.7912
III: $\bar{u}_d = \bar{u}_q = \bar{T}_L = 0, \sigma = 5.46, \gamma = 14.93$	0.2172	2.2775
IV: $\bar{u}_q = \bar{T}_L = 0, \bar{u}_d = -0.2771$	0.3057	2.4403

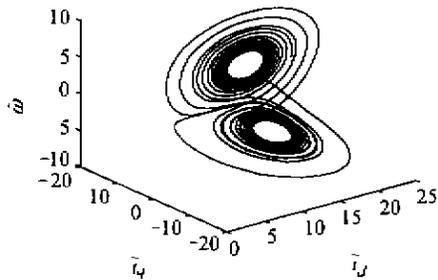


图 2 情形 I

Fig. 2 Status I

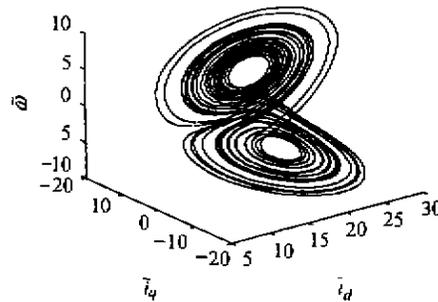


图 3 情形 II

Fig. 3 Status II

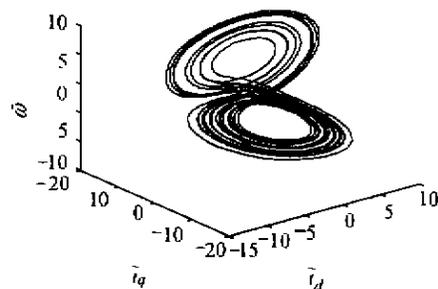


图 4 情形 III

Fig. 4 Status III

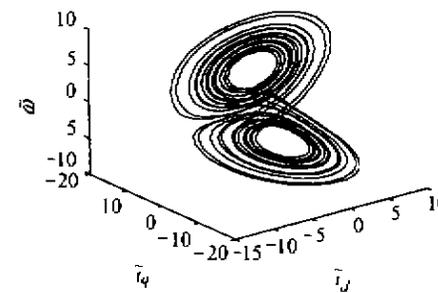


图 5 情形 IV

Fig. 5 Status IV

从表 1 中可见永磁同步电机在几种典型运行条件下,其相应 Lyapunov 指数为正,容量维为分数,与如图 2~5 所示仿真结果相对应^[1](图中坐标单位为无量纲值),从而说明永磁同步电动机在这些运行条件下必将呈现混沌行为.由于这几种典型运行条件是相应于永磁同步电动机空载断电制动和定子等效 q 轴绕组不通电的情形,因而完全符合永磁同步电动机实际运行情况.

4 结论(Conclusion)

本文给出了一种计算非线性系统 Lyapunov 指数和容量维的数值算法,该算法由于采用了分段积分修正求解的计算技术,理论上适用一般的混沌系统,并且具有概念明确、步骤清晰、计算量较小的优点,有较好的推广意义和使用价值.应用该算法,计算得出永磁同步电机在几种典型运行条件下的 Lyapunov 指数和容量维,验证了前期计算机仿真观察到的永磁同步电机混沌现象的存在性,这些研究

在永磁同步电机混沌分析中尚属首次,从而具有重要的理论和实际意义.

参考文献(References)

- [1] Li Z, Zhang B, Mao Z Y and Pong M H. Strange attractors in permanent-magnet synchronous motors[A]. IEEE Int. Conference on Power Electronics and Drive System'99, Hong Kong, 1999, 255 - 258
- [2] Silva C P. Shil'nikov theorem - A tutorial[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1993, 40 (10):675 - 682
- [3] Li Y T and Cai S D. Chaos and Lyapunov exponent[J]. Physics, 1996, 25(5):65 - 68(in Chinese)
- [4] Parker T S and Chua L O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems [M]. New York: Springer-Verlag, World Publishing Corp., 1989
- [5] Department of Mathematics and Mechanics of Peking University, ed.

约束条件为式(13).

只要此凸优化问题有解,便可以保证系统(1)的反馈增益足够小,而由初等变换易知式(13)等价于式(12),故定理2得证.

注3 定理2中的凸优化问题具有一组LMIs约束,可以应用MATLAB的LMI软件中的mincx命令求解,故求解方便易行.

注4 定理2提供了一种设计具有较小反馈增益的分散稳定化控制律的系统化方法,克服了现有方法中靠盲目试凑参数来寻找具有较小反馈增益的分散稳定化控制律的缺陷.

参考文献(References)

[1] Mahmoud M S. Stabilizing control for a class of uncertain interconnected systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1994, 39(12): 2484 - 2488

[2] Iwaski T, Skelton R E. All controllers for the general H_{∞} control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307 - 1317

[3] Liu Xinyu, Gao Liqun, Zhang Wenli. Decentralized robust control for linear uncertain interconnected systems [J]. Information and Control, 1998, 27(5): 342 - 350 (in Chinese)

[4] Wang Y Y, Xie L H, E de Souza. Robust control of uncertain nonlinear systems [J]. Systems & Control Letters, 1992, 19(1): 139 - 149

[5] Mehdi D, Hamid M A, Perrin F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems [J]. Automatica, 1996, 32(7): 1081 - 1083

本文作者简介

叶卓映 1974年生,硕士研究生.研究领域:时滞不确定系统的鲁棒控制.

孙继涛 1963年生,教授.研究领域:时滞不确定系统的鲁棒控制,容错控制.

余昭旭 1978年生,硕士研究生.研究领域:时滞不确定系统的鲁棒控制.

(上接第592页)

Advanced Algebraic [M]. Beijing: Advanced Education Press, 1992 (in Chinese)

[6] Li Z, Zhang B, Mao Z Y and M. H Pong. Analysis of the chaotic phenomena in permanent-magnet synchronous motors based on Poincaré map [A]. IEEE Proceeding of the 3rd Congress on Intelligent Control and Automation '2000 [C], Hefei, 2000, 3255 - 3258

本文作者简介

张波 1962年生,博士,教授,博士生导师.1982年毕业于浙江大学电机专业,1994年在南京航空航天大学电力电子技术专业获

博士学位.已发表论文60多篇.目前研究方向:交流传动和电力电子技术.

李忠 1970年生,博士,讲师.发表论文多篇.目前研究方向:现代控制理论及应用.

毛宗源 见本刊2001年第2期第165页.

侯晓梅 见本刊2001年第2期第284页.

庞敬熙 1961年生,博士,副教授.1983年毕业于英国伯明翰大学电机系,1987年在英国剑桥大学电力电子技术专业获博士学位.已发表论文数十篇.研究方向:电力电子技术