

具有闭环极点和方差约束的不确定离散系统鲁棒控制*

俞 立

(浙江工业大学工业控制技术国家重点实验室·杭州, 310027)

摘要: 对一类具有范数有界不确定性的离散时间系统, 研究了使得闭环系统的所有极点位于一给定圆盘, 且稳态状态方差不超过给定上界的状态反馈鲁棒方差控制律设计问题. 基于线性矩阵不等式的处理方法, 导出了鲁棒方差控制律的存在条件, 并用一组线性矩阵不等式的可行解给出了鲁棒方差控制律的一个参数化表示. 进而, 通过建立和求解一个凸优化问题, 给出了具有最小控制能量的鲁棒方差控制律设计方法.

关键词: 离散时间系统; 极点配置; 方差; 线性矩阵不等式; 鲁棒控制

文献标识码: A

Robust Control of Uncertain Discrete-Time Systems with Closed-Loop Pole and Variance Constraints

YU Li

(National Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, P.R. China)

Abstract: The problem of designing the state feedback controllers is studied which guarantee the closed-loop poles within a specified disc and steady-state variances to be less than given upper bounds for linear discrete-time systems with norm-bounded parameter uncertainties. Based on the linear matrix inequality approach, existence conditions of robust variance controllers are derived. A parameterized representation of robust variance controllers is provided in terms of the feasible solutions to a certain linear matrix inequality system. Furthermore, the design problem of the minimum-effect robust variance controller is formulated as a convex optimization problem.

Key words: discrete-time systems; pole assignment; variance; linear matrix inequality; robust control

1 引言(Introduction)

由于许多控制系统的性能要求可以用系统的稳态状态方差来描述, 因此, 通过适当配置闭环系统的稳态状态协方差矩阵的方差控制理论已引起了人们的广泛注意, 并取得了许多研究成果^[1~4]. 由于系统模型中不可避免地存在一定程度的参数不确定性, 因此, 严格配置闭环系统稳态状态协方差矩阵的方法往往难以在实践中应用. 随着参数不确定系统鲁棒控制问题研究的深入, 提出了使得闭环系统稳态状态方差不超过给定上界的鲁棒方差控制方法^[5~6]. 进而, 结合闭环系统过渡过程特性的考虑, 同时具有方差和闭环极点约束的鲁棒方差控制问题也得到了研究^[7], 但所得到的结果仅适用于不确定连续系统, 对不确定离散系统的类似问题还未见报道. 本文对一类具有范数有界参数不确定离散系统, 提出了使得闭环系统的所有极点位于一个给

定的圆盘, 且闭环系统的稳态状态方差不超过给定上界的状态反馈鲁棒方差控制律的一种设计方法.

2 问题的描述(Problem statement)

考虑由以下状态方程描述的不确定离散系统:

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k) + Dw(k), \quad (1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w(k) \in \mathbb{R}^p$ 是一个具有单位协方差矩阵的零均值白噪声过程, A, B, D 是描述名义系统模型的已知常数矩阵, ΔA 和 ΔB 是反映系统模型中参数不确定性的未知实矩阵, $w(k)$ 和初始状态 $x(0)$ 是不相关的. 本文考虑的参数不确定性假定是范数有界的, 且具有以下形式:

$$[\Delta A \quad \Delta B] = HF[E_1 \quad E_2], \quad (2)$$

上式中的 $F \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 是一个满足 $F^T F \leq I$ 的不确定矩阵, H, E_1 和 E_2 是已知的常数矩阵.

* 基金项目: 国家自然科学基金(69974036)和浙江省自然科学基金重点项目(zd99005)资助项目.

收稿日期: 1999-09-27; 收修改稿日期: 2000-03-13.

本文假定系统的状态是可以直接测量得到的, 则应用状态反馈控制律 $u(k) = Kx(k)$, 得到的闭环系统是

$$x(k+1) = (A_c + \Delta A_c)x(k) + Dw(k), \quad (3)$$

其中 $A_c = A + BK$, $\Delta A_c = HF(E_1 + E_2K)$. 如果闭环系统(3)是渐近稳定的, 则它的稳态状态协方差矩阵 $X = \lim_{k \rightarrow \infty} \{E[x(k)x^T(k)]\}$ 存在, 且满足以下的矩阵方程:

$$(A_c + \Delta A_c)X(A_c + \Delta A_c)^T - X + DD^T = 0, \quad (4)$$

其中 $E(\cdot)$ 表示期望算子.

记 $D(q, r)$ 为复平面中单位圆内中心在 $q + j0$, 半径为 r 的圆盘. 本文研究的问题是: 对不确定离散系统(1), 给定的常数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 和一个圆盘 $D(q, r)$, 设计一个控制律 $u(k) = Kx(k)$, 使得对所有允许的参数不确定性, 闭环系统(3)满足以下要求:

a) 所有的闭环极点均位于圆盘 $D(q, r)$ 中, 即 $\sigma(A_c + \Delta A_c) \subset D(q, r)$;

b) 闭环系统的稳态状态协方差矩阵 X 满足条件 $[X]_{ii} < \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $[X]_{ii}$ 表示矩阵 X 的第 i 个对角线上的元, 即第 i 个状态分量的稳态方差.

满足以上条件的控制律称为是不确定离散系统(1)的鲁棒方差控制律.

$$\begin{bmatrix} -P & P(A_c - qI)^T & P(E_1 + E_2K)^T \\ (A_c - qI)P & -r^2P + DD^T + \epsilon HH^T & 0 \\ (E_1 + E_2K)P & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

证 对(5)式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 可得矩阵不等式(5)等价于

$$\begin{bmatrix} -P & P(A_c + \Delta A_c - qI)^T \\ (A_c + \Delta A_c - qI)P & -r^2P + DD^T \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

记 $Y = \begin{bmatrix} -P & P(A_c - qI)^T \\ (A_c - qI)P & -r^2P + DD^T \end{bmatrix}$ 并利用矩阵 ΔA_c 的表达式 $\Delta A_c = HF(E_1 + E_2K)$, (7)式可写成

$$Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} F [E_1 + E_2K] P \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + [(E_1 + E_2K)P \ 0]^T F^T \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} < 0.$$

$$\begin{bmatrix} -P & (AP + BW - qP)^T & (E_1P + E_2W)^T \\ AP + BW - qP & -r^2P + DD^T + \epsilon HH^T & 0 \\ E_1P + E_2W & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

3 鲁棒方差控制律的设计 (Design of robust variance controllers)

本节将导出鲁棒方差控制律存在的条件及设计方法. 为此, 首先引进以下一个引理.

引理^[8] 给定适当维数的矩阵 Y, U 和 V , 其中 Y 是对称的, 则 $Y + UVV^T + V^T F^T U^T < 0$, 对所有满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在一个标量 $\epsilon > 0$, 使得 $Y + \epsilon UU^T + \epsilon^{-1} V^T V < 0$.

定理 1 对闭环系统(3)和给定的圆盘 $D(q, r)$, 如果存在对称正定矩阵 P , 使得

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (A_c + \Delta A_c - qI)^T \\ A_c + \Delta A_c - qI & -r^2P + DD^T \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

则对所有允许的参数不确定性, $\sigma(A_c + \Delta A_c) \subset D(q, r)$, 系统(3)的稳态状态协方差矩阵 X 存在, 且满足 $X < P$.

证 类似于文献[9]中定理1的部分证明可得本定理的结论.

矩阵不等式(5)包含参数不确定矩阵, 因此难以有效地检验其是否对所有允许的不确定矩阵成立. 为克服这一困难, 以下定理给出了定理1条件的一个容易检验的等价刻画.

定理 2 存在对称正定矩阵 P , 使得矩阵不等式(5)对所有允许的不确定矩阵 F 成立当且仅当矩阵 P 满足

根据引理, 上式对所有满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在一个标量 $\epsilon > 0$, 使得

$$Y + \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix}^T + \epsilon^{-1} [(E_1 + E_2K)P \ 0]^T [(E_1 + E_2K)P \ 0] < 0.$$

利用矩阵的 Schur 补性质, 并代入矩阵 Y 的表达式, 即可得到(6)式. 定理得证.

以下定理是本节的主要结论, 给出了鲁棒方差控制律的存在条件和设计方法.

定理 3 给定常数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 和一个圆盘 $D(q, r)$, 如果存在常数 $\epsilon > 0$, 对称正定矩阵 P 和矩阵 W , 使得以下的矩阵不等式

$$[P]_{ii} \leq \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

成立,则系统(1)存在满足要求 a) 和 b) 的鲁棒方差控制律. 特别的, $u(k) = WP^{-1}x(k)$ 是系统(1)的一个鲁棒方差控制律.

证 根据定理 1 和 2, 在(6)式中定义 $W = KP$, 即可得证定理.

(8)、(9)是一组线性矩阵不等式, 因此可以用求解线性矩阵不等式的方法来判断鲁棒方差控制律的存在性. 进而, 用线性矩阵不等式组(8)、(9)的可行解给出了一组鲁棒方差控制律的一个参数化表示. 这一参数化表示可进一步用来设计具有其它附加要求的鲁棒方差控制律.

4 最小能量鲁棒方差控制律的设计 (Design of the minimum-effort robust variance controller)

上一节用一组线性矩阵不等式的可解性给出了鲁棒方差控制律的存在条件, 进而, 用这组线性矩阵不等式的可行解给出了一组鲁棒方差控制律的参数化表示. 本节将利用这一结果来设计使得控制能量最小化的鲁棒方差控制律. 最小能量鲁棒方差控制律的设计问题就是设计一个状态反馈控制律 $u(k) = Kx(k)$, 使得闭环系统满足条件 a), b), 且

$$\min \|u\|_R = \lim_{k \rightarrow \infty} \{E[u^T(k)Ru(k)]\}^{1/2},$$

其中 R 是一个给定的对称正定加权矩阵. 文[4]研究了这个问题, 但他们并没有考虑系统模型中的参数不确定性.

由定理 3 提供的控制律具有形式 $u(k) = WP^{-1}x(k)$, 且 $X < P$. 因此

$$\|u\|_R^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} E[x^T(k)P^{-1}Y^TRYP^{-1}x(k)] =$$

$$\text{tr}[YP^{-1}XP^{-1}Y^TR] \leq$$

$$\text{tr}[SYP^{-1}(SY)^T],$$

其中 $R = S^TS$, $\text{tr}(\cdot)$ 表示一个矩阵的迹. 据此, 我们可以通过使得 $\text{tr}[SYP^{-1}(SY)^T]$ 的最小化来设计具有最小能量的鲁棒方差控制律.

定理 4 对给定常数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 和一个圆盘 $D(q, r)$, 如果优化问题

$$\begin{aligned} & \min_{\epsilon, N, P, W} \text{tr}(N) \\ \text{s.t.} & \quad \text{i) (8);} \\ & \quad \text{ii) (9);} \\ & \quad \text{iii) } \begin{bmatrix} -N & SY \\ (SY)^T & -P \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

有一个解 $\epsilon^*, N^*, P^*, W^*$, 则 $u(k) = W^*(P^*)^{-1}x(k)$ 是系统(1)的一个最小能量鲁棒方差控制律.

证 由于 $\epsilon^*, N^*, P^*, W^*$ 满足问题(10)的约束条件 i) 和 ii), 故从定理 3 可得控制律 $u(k) = W^*(P^*)^{-1}x(k)$ 是系统(1)的一个鲁棒方差控制律. 进而, 应用矩阵的 Schur 补性质, 从问题(10)的约束条件 iii) 可推出 $SYP^{-1}(SY)^T < N$, 因此 $\text{tr}(N)$ 的最小化将保证 $\text{tr}[SYP^{-1}(SY)^T]$ 的最小化. 约束条件和目标函数的凸性保证了如果问题(10)有解, 则一定是一个全局最小解. 定理得证.

问题(10)是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用有关 LMI 的现成软件来有效地求解该问题.

参考文献 (References)

- [1] Collins E G and Skelton R E. A theory of state covariance assignment for discrete systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1987, 32(1):35-41
- [2] Hotz A and Skelton R E. Covariance control theory [J]. Int. J. Control, 1987, 46(1):13-32
- [3] Skelton R E and Iwasaki T. Lyapunov and covariance controllers [J]. Int. J. Control, 1993, 57(3):519-536
- [4] Grigoriadis K M and Skelton R E. Minimum-energy covariance controllers [J]. Automatica, 1997, 33(4):569-578
- [5] Chang W J and Chung H Y. Upper bound covariance control of discrete perturbed systems [J]. Systems & Control Letters, 1992, 19(5):493-498
- [6] Wang Z, Chen X and Guo Z. Controller design for continuous systems with variance and circular pole constraints [J]. Int. J. Systems Sci., 1995, 26(10):1249-1256
- [7] Yu Li. Robust control of linear uncertain systems with regional pole and variance constraints [J]. Int. J. Systems Sci., 2000, 31(3):367-371
- [8] Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. Int. J. Control, 1996, 63(4):741-750
- [9] Garcia G. Quadratic guaranteed cost and disc pole location control for discrete-time uncertain systems [J]. IEE Proceedings - Control Theory and Applications, 1997, 144(6):545-548

本文作者简介

俞立 1961年生, 1982年毕业于南开大学控制理论专业, 后在浙江大学获硕士和博士学位, 1993年至1995年获瑞士联邦政府奖学金留学瑞士联邦高工, 2000年在香港科技大学做访问研究. 现为浙江工业大学信息工程学院教授, 副院长. 主要研究领域包括鲁棒控制, 时滞系统的分析和控制, 分散控制等.