第 18 卷第 5 期
2001 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.18, No 5
Oct., 2001

文章编号：1000-8152(2001)05-0669-03

资产优化中价值函数的一些基本性质*

许世蒙　刘俊红
（装甲兵工程学院数学室·北京,100072）

摘要：针对有交易费多种风险资产并存的市场情形，通过考察常系数投资消费模型中资产优化问题，利用随机分析方法和二阶椭圆变分方法，讨论了价值函数的一些基本性质，即价值函数的凹性、连续性和正则性，以及变分不等式的粘性解的存在性和唯一性.

关键词：价值函数；资产优化；粘性解；交易费
文献标识码：A

Basic Properties of Value Function on Asset Optimization

XU Shimeng　and　LIU Junhong
(Mathematics Section, Armored Force Engineering Institute · Beijing, 100072, P. R. China)

Abstract: Under transaction costs and risk assets, the constant coefficient investment-consumption model was given, and using stochastic analysis and variational method, some basic properties of value function were discussed, such as concavity, continuity, regularity of the value function, existence and uniqueness of viscosity solution about the variational inequality.

Key words: value function; asset optimization; viscosity solution; transaction costs

1　引言(Introduction)

资产优化是数理金融学研究的重要组成部分，在其模型分析及应用计算方面，已取得了实质性的进步，尤以统计分析和随机分析方法的表现最为出色.金融理论和应用领域中不断增加的需求，也极大地刺激了资产优化理论的研究：从孤立地考察单一风险资产的模型到转而研究多种风险资产并存的模型，从完全化市场模型到转而研究非完全化市场，从无摩擦市场模型到转而研究有摩擦市场等等；结合着风险和资产评估分析，形成了目前资产优化理论研究中的热点.文献[1~4]等讨论了有交易费投资消费模型的资产优化问题，但基本上不适用于多种股票波动相关的情形.

本文试图在多种股票波动相关的有交易费市场模型上，利用随机分析方法和二阶椭圆变分方法，讨论最优投资消费模型中价值函数的某些性质，并给出了价值函数的凹性、连续性、正则性和变分不等式粘性解的存在性和唯一性等结果.

2　资产模型和折算函数(Asset model and discount function)[1]

记 (Ω, F, P) 为一个完备化的概率空间，$F = \{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 为 σ- 域流，其市场模型为：

$$ds_0(t) = (rs_0(t) - c(t))dt - \sum_{i=1}^{d}(1+\lambda_i)dL_i(t) + \sum_{i=1}^{d}(1-\mu_i)dM_i(t), \tag{1}$$

$$ds_i(t) = a_i s_i(t) + s_i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dW_j(t) + dL_i(t) - dM_i(t),\ i = 1,2,\cdots,d,\ t\geqslant 0. \tag{2}$$

上两式中，$s_0(t), s_i(t)$ 分别为在 t 时刻债券的价值量和第 i 种股票的价值量，$s_0(0^-) = y_0, s_i(0^-) = y_i$. 记右连左极的适应过程 $s(t) = (s_1(t),\cdots,s_d(t))$. 诸右连左极的适应过程 $L_i(\cdot), M_i(\cdot)$ 是到 t 时刻的累积交易量，$L_i(0^-) = M_i(0^-) = 0$. $W_i(\cdot)$ 是相互独立的 d 维标准布朗运动. $0 < \lambda_i < 1, 0 < \mu_i < 1$ 分别为交易费率. 记 $\sigma = (\sigma_{ij})_{d\times d}$，假定 $\Sigma = \sigma\sigma^{\mathrm{T}} \triangleq (a_{ij})$ 是正定的. 投资消费策略是形如 $(c(t), (L_i(t), M_i(t))_{i=1}^{d})$ 的过程，$0 \leqslant t < \infty$，其中适应过程 $c(t) = c(t,\bar{\omega}) \geqslant 0, \int_0^t c(s,\bar{\omega})ds < \infty$, a.s..

定义 1　资产折算函数[5,6]为：

$$f(x) = x_0 + \sum_{i=1}^{d}\min\{(1-\mu_i)y_i, (1+\lambda_i)y_i\},$$

* 基金项目：国家自然科学基金(19871049)资助项目.
收稿日期：1999-11-11；收修改稿日期：2000-11-09.

$$x = (x_0, y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^{d+1}. \tag{3}$$

记 $S = \{x = (x_0, y_1, y_2, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^{d+1}, f(x) \geqslant 0\}$. 可容许投资策略为, 对 $x \in S$, 有 $(c(t), (L_i(t), M_i(t)), i = 1,2,\cdots,d)$,使得破产时间 $\bar{\tau} = \inf\{t \geqslant 0, s(t) \in S\}$ 是无穷大. $U(x)$ 表示可容许投资策略全体,即 $p \in U(x)$. 投资者的目标是 $V(x) = \sup_{p\in U(x)} J_x(p)$. 效用函数 $u(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}, 0 < \gamma < 1$. $J_x(p) = \mathrm{E}_x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t}u(c(t))\mathrm{d}t$ 为消费的折现期望效用函数, E_x 表示关于给定初始资本 $x = (x_0, y_1, y_2, \cdots, y_d) \in S$ 时的期望, δ 为折现因子.

定义 2 价值函数定义为 $V(x) = \sup_{p\in U(x)} J_x(p)$.

当过程 $s(t)$ 在某一时刻 t 达到边界 ∂S 时,亦即 $s(t^-) \in \partial S$ 时,唯一的可容许策略是立即达到并保持在原点 $(0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^{d+1}$,这时消费为0. 所以, $x \in \partial S$ 时, $V(x) = 0$. 再记 $\tau = \inf\{t \geqslant 0, s(t) \in \mathring{S}\}$, $\mathring{S}$ 表示 S 的内部.

定义 3 变分不等式 (非线性椭圆方程变分和粘性解见文献[7~9]):

$$\max\{AV + u^*(\frac{\partial V}{\partial x_0}), \max_{1\leqslant i\leqslant d} L_i V, \max_{1\leqslant i\leqslant d} M_i V\} = 0, \tag{4}$$
$$x \in \mathring{S};\ V = 0,\ x \in \partial S.$$

其中

$$AV = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}x_i x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} a_i x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + rx_0\frac{\partial V}{\partial x_0} - \delta V,\ (a_{ij}) = \Sigma,$$

以及

$$\begin{aligned} L_i V &= -(1+\lambda_i)\frac{\partial V}{\partial x_0} + \frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ M_i V &= (1-\mu_i)\frac{\partial V}{\partial x_0} + \frac{\partial V}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{5}$$

记 u^* 为效用函数 u 的 Legendre 变换[10], $u^*(p) = \max_{c\geqslant 0}(-cp + u(c)) = (\frac{1}{\gamma} - 1)p^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. 为了进行讨论,假定(其中 θ 为适当的正数,与 Σ 的正定性有关):

$$\delta > \gamma\left(r + \frac{1}{2(1-\gamma)}\sum_{i=1}^{d}\frac{(a_i - r)^2}{\theta a_{ii}}\right). \tag{6}$$

3 价值函数的一些性质(Some properties of value function)

性质 1 V 在 S 凹局部 Lipschitz 连续,且关于 x_i 是非减的, $i = 1,\cdots,d$ (证明见文献[11]).

定理 1 若(6)成立,有 $a > 0$,使得 $\varphi_v(x) = a(x_0 + \sum_{i=1}^{d}(1-v_i)x_i)^\gamma$ 是 (4) 的经典上解, $v = (v_1, \cdots, v_d), v_i = -\lambda_i$ 或 μ_i; $\varphi(x) = a(f(x))^\gamma$ 是(4) 的粘性上解;在 ∂S 上, $\varphi = 0$.

证 记 $f_v(x) = x_0 + \sum_{i=1}^{d}(1-v_i)x_i$, 则 $\varphi_v = a(f_v(x))^\gamma$. 考察 $A\varphi(x)$, 因 Σ 是正定的,由式(6) 可得 a,使在 $\mathring{S}$ 有 $A\varphi_v(x) + u^*\left(\frac{\partial\varphi_v}{\partial x_0}\right) \leqslant 0$. 而在 ∂S 上, $\varphi_v \geqslant 0$. 于是, φ_v 是式(4) 的一个经典上解(在 S 连续,在 $\mathring{S}$ 二次可微). 由于 $\varphi = \min\varphi_v$, φ 恰是式(4)的一个粘性上解. 而且,在 ∂S 上,显然有 $\varphi = 0$.

推论 1(V 的连续性) 若(6) 成立,则有 $0 \leqslant V(x) \leqslant \varphi(x), \forall x \in S$,即 V 在 S 连续,且

$$M_t^v = \mathrm{e}^{-\delta(t\wedge T)} + \int_0^{t\wedge T}\mathrm{e}^{-\delta\theta}u(c(\theta))\mathrm{d}\theta$$

是一个上鞅[12,13]. $\min_v M_t^v$ 亦然.

4 存在性和唯一性(Existence and uniqueness)

定理 2(V的正则性) 若(6)成立,则 V 在 S 一致 γ-Holder 连续,即存在常数 $C > 0$,使得 $|V(x) - V(x')| \leqslant C\|x - x'\|^\gamma, \forall x, x' \in S$.

证 见文献[11]或[6].

推论 2 若(6)成立,则 $V(x)$ 满足弱规划原理[8,9],亦即对任何停时 θ, 有

$$(x) = \sup_{p\in u} E(\int_0^{\theta\wedge T}\mathrm{e}^{-\delta t}u(c(t))\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\delta(\theta\wedge T)}V(s((\theta\wedge T)^-))),\ \forall x \in S.$$

推论 3(存在性) 价值函数 $V(x)$ 是变分不等式(4)的一个粘性解.

定理 3(唯一性) 若(6)成立, $V(x)$ 是(4) 的唯一粘性解,且 $|V(x)| \leqslant C(1 + \|x\|^\gamma), \forall x \in S$.

证 由定理 2 中的不等式和 $V(x)$ 是粘性解(推论 3),只需证明:如果 v 是一个粘性下解,是 v' 一个粘性上解,都满足(4),且在 $\mathring{S}$ 上, $V \leqslant v'$, 那么,在 S 中, $v \leqslant v'$.

定义 $S \times S$ 中函数列 $w_k(x, y) = v(x) - v'(y) - \frac{k}{2}|x - y|^2 - \epsilon(f_v(x)^{\gamma'} + f_v(y)^{\gamma'})$,其中 ϵ, γ' 是待定的参数. 而 f_v 的取法见定理1的证明,故存在正常数 C_1, C_2,使得 $C_1|x| \leqslant f_v(x) \leqslant C_2|x|$. 记 $m_k = \sup_{(x,y)\in S\times S} w_k(x, y)$, 存在 $(x_k, y_k) \in S$, 使得 $m_k = w_k(x_k, y_k)$, 且当 $k \to \infty$ 时, 有 $m_k \to \bar{m}$ 和 $k|x_k - y_k| \to 0$. $m_k \geqslant \bar{m} > 0$, 对 $\forall k$ 成立. 由于 $\bar{m} > 0$, 而且, 在 ∂S 上, $v \leqslant v'$, x_k, y_k 的极限 $\hat{x}$ 在 $\mathring{S}$ 中. 那么,存在 (x_k, y_k) 的收敛子列,对充分大的 k 以后,不妨仍记 $(x_k, y_k) \in \mathring{S} \times \mathring{S}$, 于是, 存在点 $(x_k, y_k) \in \mathring{S}$

$\times \hat{S}$ 和 $X_{ij}, Y_{ij} \in \mathbb{R}$, 使得

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}[x_i x_j X_{ij} - y_i y_j Y_{ij}] + k(\sum_{i=1}^{d}(a_i(x_k)_i - (y_k)_i)^2 + r((x_k)_0 - (y_k)_0)^2) - \delta(v(x_k) - v'(y_k)) - \varepsilon(f_v(x_k)^{\gamma} + f_v(y_k)^{\gamma'}) + \varepsilon(f(x_k) + f(y_k) + L). \tag{7}$$

式(7)中第二、四项小于 $|x_k - y_k|^2$ 的正有界倍数. 第一项引入 Hadamard 乘积,由文献[14]知

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma \\ \Sigma & \Sigma \end{bmatrix} \leqslant 3k\begin{bmatrix} \Sigma & -\Sigma \\ -\Sigma & \Sigma \end{bmatrix}. \tag{8}$$

其中 $X, Y \in S^{d+1}$, X_{ij}, Y_{ij} 的取法与其相关. 由 (8) 可知 (7) 中第一项也小于 $|x_k - y_k|^2$ 的某一个正倍数. 故前一、二、四项可记为小于 $C|x_k - y_k|^2$. 第五项中 L 是一个有界量, 由 w_k 的定义可知第三项绝对值大于 $\delta\bar{m}$. 但 ε 可充分小,令 $k \to \infty$, 从式(7)得

$$0 \leqslant C|x_k - y_k|^2 + \varepsilon L - \delta\bar{m} \to \varepsilon L - \delta\bar{m} < 0,$$

故矛盾,本定理成立.

5　结语(Conclusion)

结合随机分析方法和二阶椭圆变分方法,可讨论价值函数的唯一粘性解性质,使有交易费的资产优化的研究达到一个新的层次,而应用计算和金融实践还有待于开发.

参考文献(References)

[1] Shreve S E, Soner H M and Xu G L. Optimal investment and consumption with two bonds and transaction costs [J]. Mathematics Finance, 1994, 1(3):53 – 84

[2] Zariphopoulou T. Investment-consumption methods with constrains [J] SIAM J. Control and Optimization, 1994, 32(1):59 – 85

[3] Shreve S E and Soner H M. Optimal investment and consumption with transaction costs [J]. The Ann. of App. Probability, 1994, 4 (3):609 – 692

[4] Akian M, Menaldi J L and Sulem A. On an investment-consumption model with transaction costs [J]. SIAM J. Control and Optimization, 1996, 34(1):320 – 364

[5] Xu Shimeng, Zhang Yuzhong and Lin Junchang. The pricing of preferred hedging contingent claims under transaction costs [J]. Applied Mathematics a Journal of Chinese Universities, 1998, 13(4):414 – 420

[6] Xu Shimeng. A practice of asset discount function in the constant coeffcient investment-consumption model [J]. Journal of Armored Force Engineering Institute, 2000, 14(1):96 – 99

[7] Cheng Yazhe and Wu Lancheng. Elliptic Equation of Second Order and Elliptic Equations [M]. Beijing:Science Press, 1997, 203 – 210

[8] Yong Jiongmin. Methods of Dynamic Programming and Equations of Hamiltion-Jacobi-Bellman [M]. Shanghai:Scientific and Technological Publication of Shanghai, 1992, 91 – 132

[9] Wang Kangning. Mathematical Theory of Optimal Control [M]. Beijing: The Press of National Defence Industry, 1995, 143 – 167

[10] Shi Shuzhong. Convex Analysis [M]. Shanghai: Scientific and Technological Publication of Shanghai, 1991, 148 – 165

[11] Xu Shimeng. Hedging price of contingent claims and optimization of asset under transaction costs [D]. Beijing: Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, 1997

[12] Protter D E. Stochastic Integration and Differential Equation [M]. New York: Speringer-Verlag, 1989, 188 – 201

[13] He S W, Wang J G and Yan J A. Semimartingale Theory and Stochastic Calculus [M]. Beijing: Science Press, 1995, 298 – 340

[14] Wang Songgui and Jia Zhongzhen. Matrix Inequalities [M]. Hefei: Education Publication of Anhui, 1994, 218 – 221

本文作者简介

许世蒙　1958 年生. 副教授. 1981 年获吉林大学数学专业学士学位, 1989 年获黑龙江大学自动控制理论及应用专业硕士学位, 1997 年获中国科学院应用数学所概率统计专业博士学位 主要研究兴趣为数理金融, 统计分析与计算, 系统辨识与自适应控制, 军事运筹与仿真模型计算.

刘俊红　1976 年生. 助教. 1998 年获北京科技大学应用数学专业学士学位. 主要研究兴趣为统计计算与计算机应用.