

线性时滞系统对时滞参数的自适应控制*

费树岷 姜偕富 冯纯伯

(东南大学自动化研究所·南京, 210096)

摘要: 针对实际中线性时滞系统的时滞常数往往不能精确已知的缺点, 对具有状态滞后的线性时滞系统提出一种对时滞常数的自适应控制方案, 其控制器存在的充分条件由一个线性矩阵不等式(LMI)的形式给出, 并对整个闭环系统的稳定性进行了分析。

关键词: 时滞系统; LMI; 渐近稳定; 时滞状态反馈

文献标识码: A

Adaptive Control for Linear Delay Systems to Aim Directly at Delay Parameter

FEI Shumin, JIANG Xiefu and FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University · Nanjing, 210096, P. R. China)

Abstract: To aim directly at shortcoming of the delay constant which are not precisely known for linear delay systems in practice, an adaptive control strategy for delay parameter is proposed in this paper. The dynamic linear systems having a delayed state with the input that comprises a linear combination of the state with delay as well as the estimation of delay are considered. The delay-dependent controller is derived which the sufficient condition is given in terms of LMI. The stability of the closed-loop system is analyzed.

Key words: delay system; LMI; adaptive control; delayed state feedback

1 引言(Introduction)

在许多实际系统中, 由于测量的不灵敏性、元件的老化、机械传输等原因, 系统中出现时滞现象极为普遍, 特别是一些机械系统和化工过程。时滞还往往是造成系统不稳定和性能变坏的原因。时滞系统的稳定性和可镇定性问题的研究已越来越深受广大实际工程和理论工作者的重视。

对时滞系统(带或不带有参数不确定性), 无记忆状态反馈的镇定控制问题和 H_∞ 控制问题已被很多学者所研究(如, [1~3] 及其参考文献)。最近, 基于线性矩阵不等式(LMI)方法, 独立于时滞大小的静、动态控制器已经出现, 如对输入带滞后的线性系统^[4], 相依赖于时滞大小的状态反馈控制器^[5]以及对多状态时滞不确定系统的无记忆状态反馈鲁棒控制器^[6]。然而, 这些文章中对问题的讨论是在时滞参数为精确已知的假定下进行的。

一般而言, 时滞常数并不精确已知, 但其上下界可知。本文将在已知时滞参数的上下界情况下, 基于

LMI 方法提出一种针对时滞参数 τ 的自适应控制策略并对整个闭环系统的渐近稳定性进行分析。

2 问题的提出(Problem statement)

考虑如下线性时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + Bu(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统控制输入, $\phi(t) \in C[-\tau, 0]$ 为区间 $[-\tau, 0]$ 上的连续向量值函数, 是系统的初始状态函数。 A, A_1, B 为具有相应维数的已知实常数矩阵, $\tau > 0$ 为确定的未知时滞常数, 假定已知 $\tau^* > 0$ 使 $\tau \leq \tau^*$ 。

本文以下假定系统的状态 x 是可测的, 我们采用如下状态反馈律

$$u = Kx(t - \hat{\tau}(t)), \quad (2)$$

其中 $\hat{\tau}$ 为 τ 的估计值, 满足 $\hat{\tau}(t) \geq \tau$ 。

我们采用形如(2)的控制器是基于如下考虑的: 通常带记忆的状态反馈形式可为

$$u = K_1x(t) + K_2x(t - \hat{\tau}(t)). \quad (3)$$

* 基金项目: 国家攀登计划(970211017)和国家自然科学基金(69604003, 69934010)资助项目。

收稿日期: 1999-04-13; 收修改稿日期: 2000-11-22。

从以下的推导可以看到,从思想上说用(2)或(3)没有本质上的区别,只是推导过程中用(2)比用(3)要简单一些,因而本文为了突出对时滞参数的自适应控制思想而用形式(2).

3 对时滞参数的自适应控制 (Adaptive control for delay parameter)

显然,当 τ 未知时,若采用控制器(2)且 $\hat{\tau}(t) \geq \tau$, 则闭环系统(1)为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & Ax(t) + A_1 x(t-\tau) + BKx(t-\hat{\tau}(t)) = \\ & (A + A_1 + BK)x(t) - (A_1 + BK)(x(t) - \\ & x(t-\tau)) - BK(x(t-\tau) - x(t-\hat{\tau}(t))). \end{aligned} \quad (4)$$

由

$$\begin{aligned} x(t) - x(t-\tau) = & \int_{t-\tau}^t [Ax(s) + A_1 x(s-\tau) + \\ & BKx(s-\hat{\tau}(s))] ds \triangleq \\ & \int_{t-\tau}^t \eta(s) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

$$x(t-\tau) - x(t-\hat{\tau}(t)) = \int_{t-\hat{\tau}(t)}^{t-\tau} \eta(s) ds, \quad (6)$$

得

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A + A_1 + BK)x(t) - \\ & (A_1 + BK) \int_{t-\tau}^t \eta(s) ds - \\ & BK \int_{t-\hat{\tau}}^{t-\tau} \eta(s) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

若取 $V_1 = x^T P x$, $P > 0$, 作为系统的 Lyapunov 函数,其中“ T ”表示向量或矩阵的转置,则

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & x^T(t) [(A + A_1 + BK)^T P + \\ & P(A + A_1 + BK)] x(t) - \\ & 2 \int_{t-\tau}^t x^T(t) P(A_1 + BK) \eta(s) ds - \\ & 2 \int_{t-\hat{\tau}}^{t-\tau} x^T(t) PBK \eta(s) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

由于 $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ 以及正定矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 有

$$2X^T Y \leq X^T M^{-1} Y + Y^T M Y,$$

故

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & x^T(t) [(A + A_1 + BK)^T P + \\ & P(A + A_1 + BK) + \\ & \tau P(A_1 + BK) \Gamma_1 (A_1 + BK)^T P + \\ & (\hat{\tau} - \tau) PBK \Gamma_2 (BK)^T P] x(t) + \\ & \int_{t-\tau}^t \alpha(s) ds + \int_{t-\hat{\tau}}^{t-\tau} \beta(s) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\Gamma_1 = \sum_{i=1}^3 P_i^{-1}, \quad \Gamma_2 = \sum_{i=4}^6 P_i^{-1}, \quad P_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

$$\alpha(t) =$$

$$x^T(t) A^T P_1 A x(t) + x^T(t-\tau) A_1^T P_2 A_1 x(t-\tau) +$$

$$x^T(t-\hat{\tau}) K^T B^T P_3 B K,$$

$$\beta(t) =$$

$$x^T(t) A^T P_4 A x(t) + x^T(t-\tau) A_1^T P_5 A_1 x(t-\tau) +$$

$$x^T(t-\hat{\tau}) K^T B^T P_3 B K x(t-\hat{\tau}).$$

令

$$S(\tau) = (A + A_1 + BK)^T P + P(A + A_1 + BK) +$$

$$\tau [P(A_1 + BK)^T \Gamma_1 (A_1 + BK) P + S_1],$$

$$S_1 = A^T P_1 A + A_1^T P_2 A_1 + K^T B^T P_3 B K,$$

$$S_2 = PBK \Gamma_2 (BK)^T P + S_3,$$

$$S_3 = A^T P_4 A + A_1^T P_5 A_1 + (BK)^T P_6 B K.$$

如果对某常数 $h > 0$, $-\dot{h} \leq \dot{\hat{\tau}} \leq 0$, 那么 $\forall N > 0$, 当 $\hat{\tau}(0) > \tau^*$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$, $\xi(t) = 0, t \leq -\tau$ 时, 有

$$\begin{cases} \int_0^N dt \int_{t-\tau}^t \xi^T(s) \xi(s) ds \leq \\ \tau \int_0^N \xi^T(t) \xi(t) dt + \int_{-\tau}^0 (t+\tau) \xi^T(t) \xi(t) dt, \\ \int_0^N dt \int_{t-\tau}^t \xi^T(s-\tau) \xi(s-\tau) ds = \\ \int_0^N dt \int_{t-2\tau}^{t-\tau} \xi^T(s) \xi(s) ds \leq \\ \tau \int_0^N \xi^T(t) \xi(t) dt + 2\tau \int_{-\tau}^0 \xi^T(t) \xi(t) dt, \\ \int_0^N dt \int_{t-\tau}^t \xi^T(s-\hat{\tau}) \xi(s-\hat{\tau}) ds = \\ \int_0^N dt \int_{t-\tau-\hat{\tau}(t-\tau)}^{t-\hat{\tau}} \frac{1}{1-\dot{\hat{\tau}}} \xi^T(s) \xi(s) ds \leq \\ \tau \int_0^N \xi^T(t) \xi(t) dt + \int_{-\tau}^0 \xi^T(t) \xi(t) dt. \end{cases} \quad (10)$$

因假设 $\dot{\tau}(t) \geq \tau$, $\dot{\hat{\tau}} \leq 0$, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^N dt \int_{t-\tau}^{t-\hat{\tau}} \xi^T(s) \xi(s) ds \leq \\ & \int_0^N (\pi(t) - t - \tau) \xi^T(t) \xi(t) dt + \\ & \int_{-\tau}^0 \pi(t) \xi^T(t) \xi(t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\pi(s)$ 为 $\hat{\tau}(t) - t = s$ 的反函数. 由于 $\pi(t) - t - \tau = \hat{\tau}(\pi(t)) - \tau$ 且 $\dot{\hat{\tau}}(t) \leq 0, \pi(t) \geq t$, 所以

$\hat{\tau}(\pi(t)) \leq \hat{\tau}(t), \hat{\tau}(\pi(t)) - \tau \leq \hat{\tau}(t) - \tau$, 因而由(11)得

$$\begin{aligned} & \int_0^N dt \int_{t-\tau}^{t-\hat{\tau}} \xi^T(s) \xi(s) ds \leq \\ & \int_{-\tau}^0 \pi(t) \xi^T(t) \xi(t) dt + \\ & \int_0^N (\hat{\tau}(t) - \tau) \xi^T(t) \xi(t) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

同理有

$$\begin{aligned} & \int_0^N dt \int_{t-\tau}^{t-\hat{\tau}} \xi^T(s - \tau) \xi(s - \tau) ds \leq \\ & \int_{-\tau}^N ds \int_{s+2\tau}^{\pi_1(s)+\tau} \xi^T(t) \xi(t) dt \leq \\ & \int_0^N (\hat{\tau}(t) - \tau) \xi^T(t) \xi(t) dt + \\ & \int_{-\tau}^0 (t + \tau) \xi^T(t) \xi(t) dt \end{aligned} \quad (13)$$

和

$$\begin{aligned} & \int_0^N dt \int_{t-\tau}^{t-\hat{\tau}} \xi^T(s - \hat{\tau}) \xi(s - \hat{\tau}) ds \leq \\ & \int_{-\tau}^N ds \int_{\pi_1(s)+\tau}^{\pi_1(s)} \xi^T(t) \xi(t) dt \leq \\ & \int_0^N (\hat{\tau}(t) - \tau) \xi^T(t) \xi(t) dt + \\ & \int_{-\tau}^0 (t + \tau) \xi^T(t) \xi(t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\pi_1(s)$ 为 $t - \tau - \hat{\tau}(t - \tau) = s$ 的反函数. 由上述推导知, $\forall \phi \in C[-\tau, 0], \forall N > 0, x(t) = 0, t < -\tau$ 有

$$\begin{aligned} & \int_0^N \left[\int_{t-\tau}^t \alpha(s) ds - \tau x^T(t) S_1 x(t) \right] dt \leq \\ & H_1(\tau) \|\dot{\phi}\|^2, \\ & \int_0^N \left[\int_{t-\tau}^{t-\hat{\tau}} \beta(s) ds - (\tau - \hat{\tau}) x^T(t) S_3 x(t) \right] dt \leq \\ & H_2(\tau) \|\phi\|^2, \end{aligned}$$

其中 $H_1(\tau), H_2(\tau) > 0$ 为仅与时滞常数 τ 有关的常量, 具有性质

$$H_1(0) = H_2(0) = 0, \|\phi\| = \max_{-\tau \leq s \leq 0} |\phi(s)|,$$

故若取

$$V(t) \triangleq V(x(t), \hat{\tau}) = V_1(x(t)) + \frac{\gamma}{2} (\tau - \hat{\tau})^2,$$

$\gamma > 0$ 为待选常数, 则 $\forall N > 0$, 有

$$\begin{aligned} V(N) - V(0) &= \\ \int_0^N \dot{V} dt &= \int_0^N [\dot{V}_1 + \gamma(\tau - \hat{\tau})(-\dot{\hat{\tau}})] dt \leq \\ \int_0^N x^T(t) S x(t) dt &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^N \left[\int_{t-\tau}^t \alpha(s) ds - \tau x^T(t) S_1 x(t) \right] dt + \\ & \int_0^N \left[\int_{t-\tau}^{t-\hat{\tau}} \beta(s) ds - (\tau - \hat{\tau}) x^T(t) S_3 x(t) \right] dt + \\ & \int_0^N [(\hat{\tau} - \tau) x^T(t) S_2 x(t) - \gamma(\tau - \hat{\tau}) \dot{\hat{\tau}}] dt \leq \\ & \int_0^N x^T(t) S x(t) dt + H(\tau) \|\phi\|^2 + \\ & \int_0^N [(\hat{\tau} - \tau) x^T(t) S_3 x(t) - \gamma(\tau - \hat{\tau}) \dot{\hat{\tau}}] dt. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $H(\tau) = H_1(\tau) + H_2(\tau)$. 于是, 若取 τ 的估计值 $\hat{\tau}$ 的自适应律为

$$\dot{\hat{\tau}} = -\frac{1}{\gamma} x^T(t) S_3 x(t), \quad (16)$$

则由(10)~(15)知, $\forall N > 0$, 有

$$\begin{aligned} V(N) - V(0) &= \int_0^N \dot{V}(t) dt \leq \\ \int_0^N x^T(t) S x(t) dt &+ H(\tau) \|\phi\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

4 稳定性分析(Stability analysis)

显然, 如果(17)式中 $S < 0$, 则对任意有界的 ϕ , 闭环系统(1)从 ϕ 出发的解 $x(t)$ 使 $V(t)$ 关于 t 是有界的, 从而由 V 的定义知, $x(t)$ 是有界的. 可见当初始值取自某有界的连续函数域时, 解 $x(t)$ 是属于有界闭集的. 显然, $\forall \gamma > 0$ 均有 $\dot{\hat{\tau}}(t) \leq 0$, 然而当 $x(t)$ 较大时 γ 愈小则 $|\dot{\hat{\tau}}(t)|$ 愈大, 这对得到 $x(t - \hat{\tau})$ 的值是不利的. 因此, 对给定的常数 $h > 0$, 如果取 γ 充分大, 那么由(16)式可知, 便有 $-h \leq \dot{\hat{\tau}} \leq 0$ 成立.

由此我们得到如下结论:

定理 1 对时滞系统(1), 若存在相应维数的矩阵 K 和对称矩阵 $P > 0$ 及 $P_i > 0, i = 1, \dots, 6$ 使 $S < 0$, 则 $\forall k_0 > 0, h > 0$, 当初始值 $\phi \in C_{k_0} = \{\phi \in C[-\tau, 0], \|\phi\| \leq k_0\}, \tau(0) > \tau^*$ 时, 存在 $\gamma > 0$ 使 τ 的估计值 $\hat{\tau}(t)$ 满足(16)且 $-h \leq \dot{\hat{\tau}}(t) \leq 0, \hat{\tau}(t) \geq \tau, \forall t \geq 0$. 从而取状态反馈律(2)时, 整个闭环系统(1)的解是一致渐近稳定的.

证 上述推导过程即说明了, 当 $S < 0$ 时取自适应律(16)是可行的且闭环系统(1)的任何解都是有界的, 余下只要证明闭环系统是一致渐近稳定的, 且 $\forall \hat{\tau}(0) > \tau^*$, 存在 $\gamma > 0$ 使 $-h \leq \dot{\hat{\tau}}(t) \leq 0, \hat{\tau}(t) \geq \tau, \forall t \geq 0$ 即可.

因为 $\forall \phi \in C_{k_0}$ 闭环系统(1)从 ϕ 出发的解 $x(t)$ 是一致有界的. 由时滞系统的解对初值的连续依赖性知, 闭环系统(1)的零解是一致稳定的. 因此

$\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $\phi \in C_\delta$, $|x(t)| \leq \varepsilon$, $\forall t \geq 0$. 所以 $\forall \varepsilon > 0$. 如果存在 $T(\delta) > 0$ 使得 $\forall \phi \in C_{k_0}$, $\|x(t)\| < \delta$, $\forall t \geq T$, 则有 $\|x(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \geq T + \tau$, 其中 $x_t \in C$ 定义为 $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

以下我们先证明闭环系统(1)的零解是一致渐近稳定的. 反证, 若闭环系统(1)不是一致渐近稳定的, 则存在 $\phi \in C_{k_0}$, $\delta_0 > 0$ 使从初始值 ϕ 出发的解 $x(t)$ 具有 $\|x_t\| \geq \delta_0$, $\forall t \geq 0$. 因为 $\|x_t\| = \max_{-\tau \leq \theta \leq 0} |x(t + \theta)|$, 故至少存在一列 $t_k, k=1, 2, \dots, t_k \in [(k-1)\tau, k\tau]$, 使 $|x(t_k)| \geq \delta_0$. 由 $x(t)$ 的有界性知, 存在常数 $M_1 > 0$ 有 $|x(t)| \leq M_1$, $\forall t \geq -\tau$ 以及由闭环系统(1)的表达式知, 存在常数 $M_0 > 0$ 有 $|x(t)| \leq M_0$, 于是

$$\begin{aligned} |x(t_k)| - |x(t)| &\leq |x(t) - x(t_k)| = \\ &= \left| \int_{t_k}^t \dot{x}(s) ds \right| \leq \left| \int_{t_k}^t M_0 dt \right| = M_0 |t - t_k|, \end{aligned} \quad (18)$$

继而得到, 如果 $|t - t_k| \leq \frac{\delta_0}{2M_0} \triangleq r$, 则

$$|x(t)| \geq |x(t_k)| - M_0 |t - t_k| \geq \frac{\delta_0}{2}. \quad (19)$$

不失一般性, 假定 $t_k - t_{k-1} \geq r$. 又由于 $S < 0$, 故存在 $\gamma_0 > 0$ 使 $x^T(t) S x(t) \leq -\gamma_0 |x(t)|^2$, 所以

$$\begin{aligned} V(x(t_k)) &= \\ V(0) + \int_0^{t_k} \dot{V}(t) dt &\leq V(0) + H \|\phi\|^2 + \\ \int_0^{t_k} x^T(t) S x(t) dt &\leq \\ V(0) + H k_0^2 - \gamma_0 \int_0^{t_k} |x(t)|^2 dt &\leq \\ V(0) + H k_0^2 - \gamma_0 \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i+r} |x(t)|^2 dt &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma & \sqrt{\tau^*} P(A_1 + BK) & \sqrt{\tau^*} P(BK)^T \\ \sqrt{\tau^*} (A_1 + BK)^T P & -\Gamma_1^{-1} & 0 \\ \sqrt{\tau^*} BK & 0 & -P_3^{-1} \end{pmatrix} \triangleq Q < 0. \quad (21)$$

其中

$$\Sigma \triangleq (A + A_1)^T P + P(A + A_1) + (BK)^T P + PBK + \tau^* (A^T P_1 A + A_1^T P_2 A_1).$$

如果记

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (A + A_1)^T P + P(A + A_1) + \\ &\quad \tau^* (A^T P_1 A + A_1^T P_2 A_1), \end{aligned}$$

则(21)式可重写为

$$\begin{aligned} V(0) + H k_0^2 - \gamma_0 \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i+r} \frac{\delta_0^2}{4} dt &= \\ V(0) + H k_0^2 - \frac{\delta_0^2 \gamma_0}{4} (k-1). \end{aligned} \quad (20)$$

显然, 如果 $k \geq \frac{4(V(0) + H k_0^2)}{\gamma_0 \delta_0^2} + 2$, 则 $V(x(t_k)) < 0$, 这与 V 的正定性矛盾. 上述推导表明参数 M_1 , M_0 , $V(0)$ 仅仅与 k_0 有关, γ_0 仅仅与 k_0 和 δ_0 有关. 因此 $\forall \phi \in C_{k_0}$, $\forall \varepsilon > 0$, 只要 $t \geq t_k$, $k \geq \frac{2(V(0) + H k_0^2)}{\gamma_0 \delta(\varepsilon)} + 2$, 便有 $|x(t)| \leq \delta(\varepsilon)$, 从而 $\|x_t\| < \varepsilon$, $t \geq t_k$. 这便证明了闭环系统(1)是一致渐近稳定的.

由于 $x(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$, 从(16)式可知 $\hat{\tau}(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$. 显然 $S_2 \geq 0$, $\dot{\tau} \leq 0$ 且由 $V(t)$ 的有界性知 $\hat{\tau}(t)$ 是有界的. 再由 $\hat{\tau}(t)$ 的单调性知极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\tau}(t) = \tau_\infty$ 是存在的. 因此当 $\hat{\tau}(0) \geq \tau^*$ 时 $\tau_\infty = \hat{\tau}(0) - \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} x^T(t) S_2 x(t) dt \triangleq \hat{\tau}(0) - \frac{1}{\gamma} N(\phi)$, 其中 $N(\phi)$ 是仅仅依赖 k_0 的一个常数, $\phi \in C_{k_0}$. 如果取 γ 满足

$$\gamma^{-1} \leq \min_{\phi \in C_{k_0}} \left\{ \frac{\hat{\tau}(0) - \tau}{N(\phi)}, \frac{h}{M_1^2 \lambda_{\max} S_2} \right\}$$

则有 $|\dot{\tau}| \leq h$, $\hat{\tau}(t) \geq \tau_\infty \geq \hat{\tau}(0) - (\hat{\tau}(0) - \tau) = \tau$, 即证明了 $\forall k_0$, 存在 $\gamma > 0$ 使 $\forall \hat{\tau}(0) > \tau^*$, $\hat{\tau}(t) \geq \tau$, $t \geq 0$ 且 $-h \leq \dot{\tau} \leq 0$, $t \geq 0$. 证毕.

由定理 1 可知, 问题的解决取决于如何确定矩阵 K 使 $S(\tau) < 0$. 显然 $\forall \tau, \tau_* \leq \tau \leq \tau^*$ 有 $S(\tau) \leq S(\tau^*)$. 然而根据 $S(\tau)$ 的定义我们可以得到 $S(\tau^*) < 0$ 等价于

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} \bar{A} & \sqrt{\tau^*} P A_1 & 0 \\ \sqrt{\tau^*} A_1^T P & -\Gamma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -P_3^{-1} \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} PBK & \sqrt{\tau^*} PBK & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\tau^*} BK & 0 & 0 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} (BK)^T P & 0 & \sqrt{\tau^*} (BK)^T \\ \sqrt{\tau^*} (BK)^T P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Phi + \bar{P} \Pi \bar{K} \theta + \theta^T \bar{K}^T \Pi^T \bar{P} < 0, \quad (22)$$

其中

$$\bar{P} = \text{diag}(P, I, I), \quad \Pi = \begin{pmatrix} B & \sqrt{\tau^*} B \\ 0 & 0 \\ \sqrt{\tau^*} B & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Pi^\perp & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi & \sqrt{\tau^*} A_1 & 0 \\ \sqrt{\tau^*} A_1^T & -\Gamma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -P_3^{-1} \\ \sqrt{\tau^*} A X & 0 & 0 \\ \sqrt{\tau^*} A_1 X & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\tau^*} X A^T & \sqrt{\tau^*} X A_1^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_1^{-1} & 0 \\ 0 & -P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi^\perp & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^T < 0, \quad (23)$$

其中 $\Psi = (A + A_1)X + X(A + A_1)^T$, $X = P^{-1}$. 可见求解 LMI(23) 便可得到矩阵 $P^{-1} > 0$, 继而得到 $P > 0$. 将 P 代入(22)(或(21))并求解便可得控制器增益矩阵 K . 然后对给定的适当矩阵 $P_4, P_5, P_6 > 0$ 而得到 S_2 . 最后由(16)式得到 τ 的估计 $\hat{\tau}(t)$. 这样我们提出如下关于 τ 的自适应控制策略:

1) 对给定的适当对称矩阵 $P_1, P_2, P_3 > 0$ 以及 τ 的上界 τ^* 求解 LMI(23), 继而求解(22)或(21);

2) 如果(23)(或(21))有解 K , 选择适当的对称矩阵 $P_4, P_5, P_6 > 0$, 得到 S_2 , 继而由(16)式得到 τ 的估计 $\hat{\tau}(t)$;

3) 用记忆的状态 $x(t - \hat{\tau}(t))$ 构成带记忆的状态反馈律 $u(t) = Kx(t - \hat{\tau}(t))$.

5 仿真示例(Simulation example)

考虑如下二维线性时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu, \\ x(t) = \phi(t), \quad -\tau^* \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ -15 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\tau^* = 2\text{s}$. 取 $P_1 = I_2$, 先根据线性矩阵不等式(23)求解 P , 然后根据(22)求得 $K = (-0.6179, 0.4089)$,

$S_2 = \begin{pmatrix} 0.0536 & -0.0061 \\ -0.0061 & 0.045 \end{pmatrix}$. 取实际时滞常

数 $\tau = 1.6\text{s}$, 初始函数为 $\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2\sin(4\pi(t - \tau^*)/\tau^*) \\ -3\cos(4\pi(t - \tau^*)/\tau^*) \end{pmatrix}$, $\hat{\tau}(0) = \tau^* = 2\text{s}$, 参数

$$\theta = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{pmatrix} K \\ K \end{pmatrix}.$$

根据[7]的结论, $Q < 0$ 等价于 $\theta^T \Pi^\perp \Phi \theta^\perp < 0$ 和 $\Pi^\perp \bar{P}^{-1} \Phi \bar{P}^{-1} \Pi^{\perp T} < 0$ 同时成立, 其中 $\theta^\perp, \Pi^\perp$ 分别为 θ, Π 的正交补, 而 $\theta^T \Pi^\perp \Phi \theta^\perp = -P_3 < 0$ 是显然成立的. 由 Schur 补定理可知 $\Pi^\perp \bar{P}^{-1} \Phi \bar{P}^{-1} \Pi^{\perp T} < 0$ 等价于以下(23)式

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\tau^*} X A^T & \sqrt{\tau^*} X A_1^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_1^{-1} & 0 \\ 0 & -P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi^\perp & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^T < 0, \quad (23)$$

$\gamma = 5000$, 则仿真结果如图 1.

从图中可清晰看出系统状态大约经过 2 个时滞周期即 3.2s 后便进入了稳态区域, τ 的估计值 $\hat{\tau}(t)$ 从 τ^* 单调下降, 由于 γ 较大, 最终 $\hat{\tau}(t)$ 并不趋于 τ . 仿真中我们发现, 如果 γ 太小便有可能出现 $\hat{\tau}(t) < \tau$ (τ 充分大后)的情况, 系统状态便有可能发散.

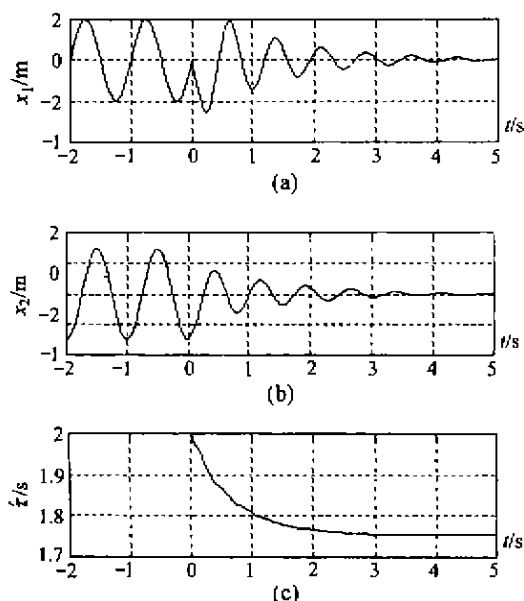


图 1 (a)和(b)为系统状态轨线, (c)为时滞实时估计值曲线

Fig. 1 (a) and (b) are state curve of the systems, (c) is real-time estimate value of delay curve

6 结束语(Conclusion)

本文的主要目的是针对线性时滞系统未知但是有界的不确定时滞参数 τ 提出一种自适应控制律. 用 Lyapunov 函数和时滞相依的线性矩阵不等式

(下转第 696 页)

故 $e_0(t)$ 将在有限时间内收敛到零. 类似地, 对于辅助误差 $e_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$, 若定义 Lyapunov 函数 $V_i = e_i^2(t)/2$ 并考虑到 (3.4) 中 e_i 为一阶微分方程, 那么, 当把 (3.10) 式的控制律 $u_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$ 代入 $\dot{V}_i$, 则易见 $e_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$ 全局有界并将在有限时间内收敛到零.

2) 证明 $u_i(t) (i = 0, 1, \dots, n^* - 1)$ 是有界的. 事实上, 从 (3.4) 可知若 $u_0(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是有界的, 则 $u_1(t)$ 必将有界, 依此类推, $u_i(t) (i = 2, \dots, n^* - 1)$ 亦必将有界, 因此, 我们只要证明存在一个 $\tau^* > 0$, 使得对每一个 $\tau \in (0, \tau^*)$, $u_0(t)$ 有界就可以了. 但由 (3.7)、(3.8) 式, 并利用引理 1 的结果, 可证明 (3.9) 式中

$$\begin{aligned} & \xi_0 \left| \frac{y_c(t)}{a(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{1i} \left| \frac{v_{1i}(t)}{a(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{2i} \left| \frac{v_{2i}(t)}{a(s)} \right| \leq \\ & \xi_0 \left| \frac{y_c(t)}{a(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{1i} \left| \frac{v_{1i}(t)}{a(s)} \right| + \\ & \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{2i} \left| \frac{v_{2i}(t)}{a(s)} \right| + \tau c_u \|u_0\|_\infty. \end{aligned} \quad (A6)$$

这里, c_u 为某个正常数. 已证明 $e_i(t) (i = 0, 1, \dots, n^* - 1)$ 有界, 因此, 无论是取 $\bar{u}_0(t)$ 还是 $u_0(t)$, 根据 (3.11)、(A6) 式以及 (3.8) 式中关于 $y_c(t)$, v_{1i} 和 $v_{2i}(t)$ 的定义, 从 (3.9) 容易看出, 一定存在正常数 c_{u1} , 有 $\|u_0(\xi)\|_\infty \leq c_{u1} +$

$\tau c_u \|u_0(\xi)\|_\infty$. 取 $\tau^* > 0$, 使得对所有 $\tau \in (0, \tau^*)$, $1 - \tau c_u > 0$, 那么, 从此式立即可知 $u_0(t)$ 有界.

3) 下面讨论跟踪误差 $e(t)$ 及闭环系统其它各处信号的上有界性. 因每一个 $e_i(t)$ 均在有限时间收敛到零, 令 $T_i = \max\{t_{a_i} : e_i(t) = 0, \forall(t) \geq t_{a_i}, i = 0, 1, \dots, n^* - 1\}$, 则对所有 $t \geq T$, 由关系式^[10]

$$\begin{aligned} e(t) = & e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} \kappa [M(s)\alpha(s)\Omega_{(i-1)}^{-1}(s)F^{-2(n^*-i-1)}(s)e_i(t)] + \\ & \kappa M(s)\alpha(s)[(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)u_0(t)] \end{aligned} \quad (A7)$$

可知与 $e_i(t)$ 有关的部分将只剩下一些以指数速度收敛的项, 可将它们归入 (3.12) 式之 $\Psi(t)$ 中; 而对 (A7) 式中与 $u_0(t)$ 有关的项应用引理 1, 有正常数 φ , 使得 $|M(s)\alpha(s)\kappa[(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)u_0(t)]| \leq \tau\varphi \|u_0(\xi)\|_\infty$ (φ 与 τ 无关), 再考虑到该项的初始条件, 并将其也归入到 $\Psi(t)$ 中, 就得到了 (3.12) 式. 最后, 在 $e_i(t)$, $u_i(t) (i = 0, 1, \dots, n^* - 1)$ 有界的基础上, 从系统结构中各信号间的关系不难得出其余信号的上有界性.

本文作者简介

林 岩 见本刊 2001 年第 2 期第 223 页.

毛剑琴 见本刊 2001 年第 2 期第 223 页.

(上接第 690 页)

(LMI) 方法, 得到了闭环系统稳定性的条件并提出了设计步骤.

参考文献(References)

- [1] Choi H H and Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls[J]. Automatica, 1995, 31(9):1349 - 1351
- [2] Lee J H, Kim S W and Kwon W H. Memoryless H_∞ controllers for state delayed system [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1994, 39(2):158 - 162
- [3] Shen J C, Chen B S and Kung F C. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1987, 32(2):427 - 429
- [4] Jiang X F, Fei S M and Feng C B. H_∞ control for linear delay systems with input delay [J]. Acta Automatic Sinica, 2001, 27(1):108 - 114

- [5] Shaked U, Yaesh I and de Souza C E. Bounded real criteria for linear time-delay systems[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(8):1016 - 1022
- [6] Cao Y Y, Sun Y X and Cheng C. Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delay [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(10):1608 - 1612
- [7] Tzafarakis T and Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence condition and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30(8):1307 - 1317

本文作者简介

费树岷 见本刊 2001 年第 3 期第 379 页.

姜信富 1963 年生, 1999 年 3 月获工学硕士学位, 现在东南大学自动化研究所攻读博士学位. 主要研究兴趣: 时滞系统的控制与综合, 鲁棒控制以及 H_∞ 控制等.

冯纯伯 见本刊 2001 年第 3 期第 368 页.