

低增益变结构模型参考自适应控制器设计*

林 岩 毛剑琴

(北京航空航天大学第七研究室·北京, 100083)

摘要: 就对象相对阶大于 1 时的变结构模型参考自适应控制(VS-MRAC)系统提出了一种低增益变结构控制方案, 主要特点是: 1) 系统变结构律在低增益状态下仍可保证所有辅助误差在有限时间内收敛到零, 从而提高了系统跟踪精度; 2) 进一步研究了平均值滤波器对系统稳定性的影响。

关键词: 变结构控制; 自适应控制

文献标识码: A

A VS-MRAC with a Lower Variable Structure Control Gain

LIN Yan and MAO Jianqin

(The Seventh Research Division (Systems & Control), Beijing University of Aeronautics and Astronautics · Beijing, 100083, P. R. China)

Abstract: In this paper, a new variable structure control law is proposed for a VS-MRAC system with relative degree $n^* > 1$. The main results are that 1) every auxiliary error can converge to zero in finite time with a lower variable structure control gain and therefore, the tracking performance can be improved, and 2) the influence of averaging filters on the stability of system has further been investigated.

Key words: variable structure control; adaptive control

1 引言(Introduction)

变结构模型参考自适应控制(VS-MRAC)理论近 10 年来取得了一系列重要的进展^[1~5], 其中, 具有代表性的是文献[4, 5]的工作. 本文将讨论文献[4, 5]中如下尚未解决的问题:

- 设计变结构律, 使系统相对阶 $n^* > 1$ 时所有辅助误差均能在有限时间内收敛到零, 从而提高跟踪误差精度;

- 进一步研究平均值滤波器对系统稳定性的影响。

就上述第一个问题, 文献[5]已证明, [4]关于所有辅助误差均会(甚至在有限时间内)收敛至零的猜测事实上并不成立. 另一方面, 高增益变结构控制(例如文献[6, 7])却可以保证系统辅助误差均可在有限时间收敛到零, 其缺点是控制增益可能变得很大. 关于上述第二个问题, 需要指出的是, 文献[4, 5]的稳定性分析是不完整的, 没有把平均值滤波器对系统的影响完全考虑在内. 本文中, 我们的工作:

- 提出了一种新的变结构控制方案, 可保证系统所有辅助误差均会在有限时间内收敛到零, 而在几乎所有的情形下都会导致“低增益^[4, 5]”控制。

- 进一步揭示了平均值滤波器对回归向量(regressor vector) $\omega(t)$ 及系统稳定性的影响。

2 问题描述(Problem formulation)

2.1 基本假设(Basic assumptions)

考虑如下严格正则的 SISO 系统:

$$y(t) = G_p(s)[u(t) + d(\gamma, t)] = [k_p n_p(s)/d_p(s)][u(t) + d(\gamma, t)]. \quad (2.1)$$

其中, $u(t)$ 和 $\gamma(t)$ 分别表示对象的输入和输出; $d(\gamma, t)$ 是一个关于输出 $\gamma(t)$ 和时间 t 的非线性函数, 反映输出干扰或不确定性等对系统的影响; $n_p(s)$ 和 $d_p(s)$ 分别为 m 阶和 n 阶的首一多项式; k_p 为高频增益. 希望跟踪的理想模型为

$$y_M(t) = M(s)r(t) := [k_M n_M(s)/d_M(s)]r(t). \quad (2.2)$$

这里, $r(t)$, $y_M(t)$ 表示参考输入和理想输出; $n_M(s)$, $d_M(s)$ 分别为 m 阶和 n 阶的首一 Hurwitz 多项式; $k_M (> 0)$ 为模型的高频增益. 就对象(2.1)和理想模型(2.2), 有如下基本假设^[3~5]:

* 基金项目: 国家自然科学基金重大课题(69896250)资助项目。

收稿日期: 1999-04-02; 收修改稿日期: 2000-09-18.

A1) 仅对象输入信号 $u(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 是可测量的;

A2) $G_p(s)$ 参数是未知的, 但其参数不确定性的界是已知的; 高频增益 k_p 的符号已知, 不失一般性, 假设 $k_p > 0$, 并且其下界 k_l , 上界 k_u 满足 $k_u > k_l$;

A3) $G_p(s)$ 是相对阶 $n^* > 1$ 的最小相位系统, 因此, 可定义一个 Hurwitz 多项式

$$\alpha(s) := \prod_{i=1}^{n^*-1} \alpha_i(s) = \prod_{i=1}^{n^*-1} (s + p_i), \quad p_i > 0, \quad (2.3)$$

使得 $M(s)\alpha(s)$ 之相对阶 $n^* = 1$ (但本文不要求 $M(s)\alpha(s)$ 是 SPR 函数);

A4) 干扰或不确定项 $d(y, t)$ 满足 $|d(y, t)| \leq \bar{d}(y, t)$, 这里, $\bar{d}(y, t)$ 是一个已知、分段连续且在 $[0, +\infty)$ 上有界的函数;

A5) $G_p(s)$ 和 $M(s)$ 均是完全能控和完全能观测的, 即 $(n_p(s), d_p(s)), (n_M(s), d_M(s))$ 互质的。

注 1 在 A2) 中仅假设 $k_u > k_l$, 这是因为若 $k_u = k_l$, 那么 k_p 是已知的, 此时使系统所有辅助误差均收敛至零的变结构律设计问题已经解决, 参见文 [5]。

2.2 控制结构(Control structure)

仍采用标准的 MRAC 控制结构^[9], 因此有跟踪误差:

$$e(t) = y(t) - y_M(t);$$

输入/输出滤波器:

$$\begin{aligned} v_1 &= \Lambda v_1(t) + g u(t), \quad v_2 = \Lambda v_2(t) + g y(t), \\ (\Lambda, g) &\text{可控}, g \in \mathbb{R}^{(n-1)}, \Lambda \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \\ \det(sI - \Lambda) &= n_M(s)\alpha(s); \end{aligned}$$

对象输入信号:

$$\begin{aligned} u(t) &:= \hat{\theta}^T \omega(t) + u_{vs}(t), \\ \omega(t) &:= [r(t), y(t), v_1^T(t), v_2^T(t)], \\ \hat{\theta} &:= [\hat{k}, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1^T, \hat{\theta}_2^T]^T. \end{aligned}$$

由文献[9]知, 在满足假设 A5) 时, 存在 $2n$ 阶常向量 $\theta^* := [k^*, \theta_0^*, (\theta_1^*)^T, (\theta_2^*)^T]^T$, 使得当对象的输入信号 $u(t) = (\theta^*)^T \omega(t)$, 干扰 $d(y, t) \equiv 0$ 时, 有 $y(t) = G_p(s)u(t) = G_p(s)[(\theta^*)^T \omega(t)] = M(s)r(t)$. 由于本文不考虑调参律, 故可根据所给名义对象 $\hat{G}_p(s) := \hat{k}_p \hat{\alpha}_p(s) / \hat{\alpha}_p(s)$ 求得一个 $2n$ 阶常向量 $\hat{\theta}$ 作为 θ^* 的估计值. 变结构律设计的目的是: 当对象 $n^* > 1$ 时, 系统所有辅助误差均会在相应变结构律为低增益情况下于有限时间内收敛到零, 其跟踪误差 $e(t)$ 能在有限时间收敛到一个残差

集内.

3 主要结果(Main results)

本节将介绍 $n^* > 1$ 时变结构律 $u_{vs}(t)$ 的新设计方案. 根据上一节所介绍的基本定义, 利用 Mason 公式, 容易得到 $n^* > 1$ 时系统跟踪误差表达式为

$$\begin{aligned} e(t) &= M(s)\alpha(s)\kappa^* \{ [\hat{\theta}^T \omega(t) + (1 - \\ &\quad d_1(s)/(n_M(s)\alpha(s))) \times \\ &\quad d(y, t)] / \alpha(s) + \varepsilon(t) + u_{vs}(t) / \alpha(s) \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &:= \hat{\theta} - \theta^* = [\hat{k} - k^*, \hat{\theta}_0 - \theta_0^*, \hat{\theta}_1^T - \\ &\quad (\theta_1^*)^T, \hat{\theta}_2^T - (\theta_2^*)^T]^T, \end{aligned}$$

$$d_1(s) := \hat{\theta}_1^T \text{adj}(Is - \Lambda)g, \quad \kappa^* = k_p/k_M = 1/k^*,$$

$\alpha(s)$ 由 (2.3) 定义; 此外, 在 (3.1) 中增加了一项 $\varepsilon(t)$, 为一有界、可微且依指数速度衰减的函数, 反映系统所有内部状态之初始条件的影响. 尽管此时 $M(s)\alpha(s)$ 之相对阶为 1, 但由于 (3.1) 式中 $1/\alpha(s)$ 的影响使得不可能按照通常处理相对阶为 1 的方法来设计变结构律 u_{vs} , 而要利用增广信号和辅助误差信号来得到 $u_{vs}(t)$ ^[4,10], 即

增广信号:

$$y_a(t) = M(s)\alpha(s)\hat{\kappa}[u_{vs}(t)/\alpha(s) - u_0(t)]. \quad (3.2)$$

辅助误差信号:

$$e_0(t) = e(t) - y_a(t), \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} e_i(t) = -[u_{i-1}(t)]_{av} + \alpha_i^{-1}(s)u_i(t), \\ i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \\ u_{n^*-1}(t) := u_{vs}(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

其中, $\hat{\kappa} := k_u/k_M$, k_u 的定义参见假设 A2), $\alpha_i^{-1}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n^* - 1$) 之定义参见 (2.3) 式, $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n^* - 1$) 是欲设计的变结构律 $[u_i(t)]_{av} = F^{-2}(s)u_i(t) = [1/(\tau s + 1)^2]u_i(t)$.

$F^{-2}(s) = [1/(\tau s + 1)^2]$ 即是“平均值”滤波器^[5], 这里, τ 是一个较小的正数, 其作用将在后面讨论.

下面讨论变结构律 $u_{vs}(t)$ 的设计. 首先将 (3.1)、(3.2) 式代入 (3.3) 式, 并注意到 $\hat{\kappa}(\kappa^*)^{-1} = k_u/k_p$ 及关系式^[10]

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(s)u_{vs}(t) &= \\ &\sum_{i=1}^{n^*-1} [\Omega_{i-1}^{-1}(s)F^{-2(n^*-1-i)}(s)e_i(t)] + \\ &F^{-2(n^*-1)}(s)u_0(t). \end{aligned}$$

利用文[7]的结果,经一定的代数运算后可得辅助误差 $e_0(t)$ 的如下—阶微分方程形式:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) = & -pe_0(t) + \{k_p[\bar{\theta}^T \omega(t) + (1-d_1(s)/n_M(s)\alpha(s)) \times \\ & d(y,t) - \rho(s)e_0(t)/k_p n_M(s)]/\alpha(s) + \\ & (k_p - k_u) \times \sum_{i=1}^{n^*-1} [\Omega_{i-1}^{-1}(s) F^{-2(n^*-i-1)}(s) e_i(t)] + \\ & (k_p - k_u) F^{-2(n^*-1)}(s) u_0(t) + k_p \varepsilon(t) + k_u u_0(t)\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

这里, $\rho(s)$ 是一个已知的多项式,满足, $\deg(\rho(s)) < \deg(n_M(s)\alpha(s))$, p 是一个已知实数, $\rho(s)$, p 的定义均见[7]. 进而,用与[10] 相同的方法,上式中 $\bar{\theta}^T \omega(t)/\alpha(s)$ 一项可分解为:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^T \omega(t)/\alpha(s) = & \bar{\theta}^T \omega_e(t)/\alpha(s) + \tau[\bar{G}(s)/\alpha(s)] u_0(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

这里

$$\begin{aligned} \bar{G}(s) &:= [\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1(Is - \Lambda)^{-1} g G_p^{-1}(s) + \\ & \quad \bar{\theta}_2(Is - \Lambda)^{-1} g] G(s), \\ G(s) &:= [\hat{\kappa} M(s) \alpha(s) (F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)/\tau], \\ \begin{cases} \omega_e(t) &:= [r(t), y_e(t), v_{1e}^T(t), v_{2e}^T(t)]^T, \\ y_e(t) &:= e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} \{\hat{\kappa} M(s) \alpha(s) [\Omega_{i-1}^{-1}(s) \times \\ & \quad F^{-2(n^*-i-1)}(s)] e_i(t)\} + y_M(t), \\ v_{1e}(t) &:= (Is - \Lambda)^{-1} g [G_p^{-1}(s) y_e(t) - d(y,t)], \\ v_{2e}(t) &:= (Is - \Lambda)^{-1} g y_e(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

注 2 因 $(Is - \Lambda)^{-1} g$ 的各分量严格正则,故容易验证 $\bar{G}(s)/\alpha(s)$ 是严格正则且稳定的.

以下引理在证明本文的主要定理时将用到,其证明被略去了.

引理 1 设 $P(s) := \bar{P}(s)(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)$, 其中 $\bar{P}(s)$ 是一个严格正则且稳定的传递函数, $F^{-2}(s)$ 是(3.5)式定义的滤波器,则必有与 τ 无关的正常数 c_p ,使得 $\|P(s)\|_1 \leq \tau c_p$.

为设计变结构律 $u_0(t)$, 对(3.6)式,考虑到 $e_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n^* - 1$) 及 $\omega(t)$ 中各信号皆可测量, $n_M, \bar{d}(y, t), d_1(s), \rho(s), p$ 已知,于是易于得到一个函数 $f_0(t)$ ($\bar{f}_0(t)$), 使得

$$\begin{aligned} & \{k_p \bar{\theta}^T \omega(t)/\alpha(s) + \\ & k_p[(1-d_1(s)/(\alpha(s)n_M(s)))/\alpha(s)] d(y, t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\rho(s)/(\alpha(s)n_M(s))] e_0(t) + \\ & (k_p - k_u) [\delta \lambda F^{-2(n^*-1)}(s) e_0(t) + \\ & \sum_{i=1}^{n^*-1} \Omega_{i-1}^{-1}(s) F^{-2(n^*-i-1)}(s) e_i(t)] \mid \leq \\ & k_u \mid \xi_r \mid \left| \frac{r(t)}{\alpha(s)} \right| + \xi_0 \left| \frac{y(t)}{\alpha(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{1i} \left| \frac{v_{1i}(t)}{\alpha(s)} \right| + \\ & \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{2i} \left| \frac{v_{2i}(t)}{\alpha(s)} \right| + \bar{d}(y, t) + \\ & \int_0^t c_d^T \exp[A_d(t - \xi)] b_d \mid \bar{d}(y, \xi) d\xi \mid + \\ & \mid \rho(s)/\alpha(s)n_M(s) e_0(t) \mid + \\ & (k_u - k_l) \mid [\delta \lambda F^{-2(n^*-1)}(s) e_0(t) + \\ & \sum_{i=1}^{n^*-1} \Omega_{i-1}^{-1}(s) F^{-2(n^*-i-1)}(s) e_i(t)] \mid = \\ & \begin{cases} \bar{f}_0(t), & \text{if } \delta = 1, \\ f_0(t), & \text{if } \delta = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

这里, (A_d, b_d, c_d) 为 $d_1(s)/(\alpha(s)n_M(s))$ 的一个最小实现, k_l 为 k_p 的下界, 参见假设 A2); 而根据假设 A2), $\xi_r (\geq \mid \bar{k} \mid)$, $\xi_0 (\geq \mid \bar{\theta}_0 \mid)$, $\xi_{1i} (\geq \mid \bar{\theta}_{1i} \mid)$, $\xi_{2i} (\geq \mid \bar{\theta}_{2i} \mid)$ 均为可求得的常数; 在 $\delta = 1$ 时还曾加了一项 $\lambda F^{-2(n^*-1)}(s) e_0(t)$, 其作用将在证明中讨论, 其中, 常数 λ 定义为: 若 $p > 0$, $\lambda = -1/2$; 若 $p \leq 0$, $\lambda = -(1/2 + \bar{p}/k_l)$. 这里, 选 $\bar{p} > \mid p \mid$, p 的定义参见(3.6)式. 进而, 我们有如下主要结论:

定理 1 设 $n^* > 1$ 时的 VS-MRAC 系统满足假设 A1) ~ 假设 A5). 若对辅助误差子系统 $e_0(t)$, $e_1(t), \dots, e_{n^*-1}$ (参见(3.3)、(3.4)式), 令其变结构律定义如下:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \begin{cases} \bar{u}_0(t), & \text{if } (k_u - k_l) \mid \sigma(t) \mid > c, \\ \underline{u}_0(t), & \text{if } (k_u - k_l) \mid \sigma(t) \mid \leq c, \end{cases} \\ \begin{cases} u_i(t) &= -[F^{-2}(s) \alpha_i(s) u_{i-1}(t) + \Delta_i] \text{sgn}(e_i(t)), \\ & i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \\ u_{n^*-1} &:= u_m(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中, c 均为预先给定的正常数, Δ_i ($i = 0, 1, \dots, n^* - 1$) 为任意正常数,

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(t) &:= \\ & \begin{cases} -e_0(t)/2 - [(\|\bar{f}_0(\xi)\|_\infty + \Delta_0)/k_l] \times \\ \text{sgn}(e_0(t)), & \text{if } p > 0, \\ -(1/2 + \bar{p}/k_l) e_0(t) - [(\|\bar{f}_0(\xi)\|_\infty + \Delta_0)/k_l] \times \\ \text{sgn}(e_0(t)), & \text{if } p \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(t) &:= \\ &\begin{cases} -e_0(t)/2 - [(f_0(t) + \Delta_0 + c)/k_u] \times \\ \quad \text{sgn}(e_0(t)), & \text{if } p > 0, \\ -(1/2 + \bar{p}/k_l)e_0(t) - [(f_0(t) + \Delta_0 + c)/k_u] \times \\ \quad \text{sgn}(e_0(t)), & \text{if } p \leq 0, \end{cases} \\ \sigma(t) &:= F^{-2(n^*-1)}(s)u_0(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

则存在一个 $\tau^* > 0$, 使得对每一个给定的 $\tau \in (0, \tau^*)$, 辅助误差 $e_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n^* - 1$) 均会在有限时间收敛到零; 同时, 存在一个有限时间 $T > 0$, 使系统跟踪误差 $e(t)$ 对所有 $t \geq T$ 收敛到如下残差集内:

$$D_\tau := \{e; |e(t)| \leq \tau\varphi \|u_0(\zeta)\|_\infty + \Psi(t), \forall t \geq T\}. \quad (3.12)$$

这里, φ 为一正常数, $\Psi(t)$ 为一依指数速度收敛到零的项, 范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ 的定义见文献[8] (证明参见附录).

注 3 在定理中, $\bar{u}_0(t), u_0(t)$ 分别为高增益^[6]和低增益^[4,5], 切换律就是建立在对 $\sigma(t)$ 的测量之上的, 只要 c 选择得合适, 则 $u_0(t)$ 将很快从高增益过渡到低增益或始终处于低增益状态. 特别, 定理证明中的(A7)式还表明, $u_0(t)$ 为低增益可使系统跟踪误差变小. 从定理的证明还可知, 系统稳定性分析中必须考虑到(3.7)式, 即平均值滤波器对 $\omega(t)$ 的影响.

注 4 (3.12)式表明, 为了提高跟踪精度, 似乎应选 τ 充分小, 但实际上设计者必须在较高的控制增益和跟踪精度之间进行折中. 这是因为从(3.10)可以看出, $F^{-2}(s)a_i(s)u_{i-1}(t) = F^{-2}(s)(s + p_i)u_{i-1}(t)$ ($a_i(s)$ 定义见(2.3)). 显然, 过小的 τ 将使得此环节具微分性质, 可导致控制增益过大.

4 数值仿真结果 (Simulation results)

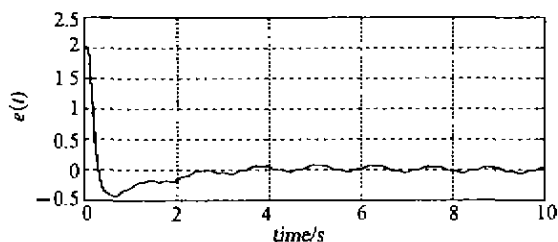
例 考虑如下相对阶 $n^* = 3$ 的被控对象:

$$G_p(s) = 1/(s^3 + 7s^2 + 10s - 8). \quad (4.1)$$

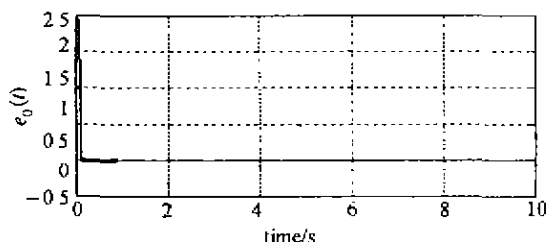
其一状态空间实现的初始条件为 $x(0) = [0.5, 0.25, 0]^T$. 因 $n^* = 3$, 故在(2.3)式中选 $\alpha(s) = (s + 2)^2$. 此外, 设理想模型: $M(s) = 1/(s^3 + 5s^2 + 5s + 4)$; 名义系统: $\hat{G}_p(s) = (5/3)/[s^3 + 5s + (8/3)s - 16/3]$, 由此可算出 θ^* 的估计值 $\hat{\theta}$; 平均值滤波器: $F^{-2}(s) = 1/(0.05s + 1)^2$; 输入信号 $r(t)$: 幅值为 1、频率 3Hz 的方波; 干扰信号 $d(y, t)$: 幅值为 1、频率 0.5Hz 的方波; 控制律(3.10)中, 取 $c = 1$.

根据定理 1 设计变结构律, 在 Matlab/Simulink

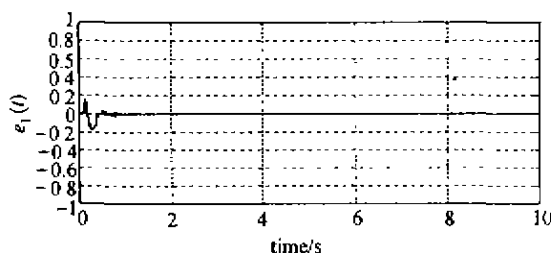
环境下所得系统跟踪误差, 辅助误差 $e_0(t), e_1(t), e_2(t)$ 以及 $u_0(t)$ 的波形图如图 1 所示. 从图中可以看出, $u_0(t)$ 很快从高增益状态切换到低增益状态, $e_0(t), e_1(t), e_2(t)$ 均在有限时间内收敛到零.



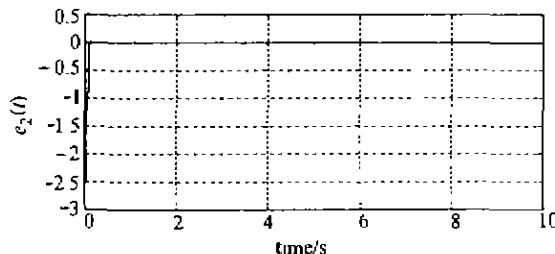
(a) 跟踪误差 $e(t)$



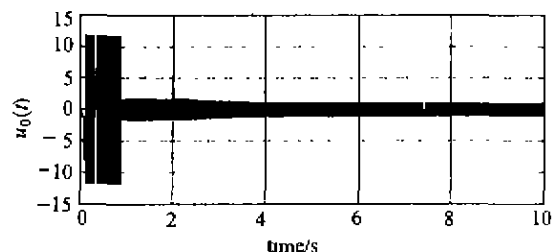
(b) 辅助误差 $e_0(t)$



(c) 辅助误差 $e_1(t)$



(d) 辅助误差 $e_2(t)$



(e) 变结构律 $u_0(t)$

5 结论 (Conclusion)

我们提出了一种新的 VS-MRAC 方案来克服对象相对阶 $n^* > 1$ 时文献[4,5]所提方案不能使所有辅助误差收敛到零的缺点, 从而提高了系统的跟踪

精度.此外,在系统的稳定性分析时还考虑到了平均值滤波器对 $\omega(t)$ 的影响.本文所提方案的主要缺点是:(3.10) 中常数 c 的选择仍然具有某种试凑的性质,需要进一步研究.此外,如何将以上结果推广到含未建模动态的情形也需要进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Narendra K S and Boskovic J D. A combined direct, indirect, and variable structure method for robust adaptive control [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(2): 262-268
- [2] Hsu L and Costa R R. Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement: Part I [J]. Int. J. Control, 1989, 49(2): 399-416
- [3] Hsu L. Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement: General case [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, 35(11): 1238-1243
- [4] Hsu L, Araujo A D and Costa R R. Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(1): 4-21
- [5] Hsu L, Lizaralde F and Araujo A D. New results on output-feedback variable structure model-reference adaptive control: Design and stability analysis [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997, 42(3): 386-393
- [6] Chien C J, Sun K C, Wu A C and Fu L C. A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants [J]. Automatica, 1996, 32(6): 833-848
- [7] Lin Yan, Zhang Jie and Mao Jianqin. Variable structure robust adaptive control with unmodelled dynamics [A]. In 36th IEEE Conference on Decision and Control [C], San Diego, 1997, 3243-3249
- [8] Desoer C A and Vidyasagar M. Feedback Systems: Input-Output Properties [M]. New York: Academic Press, 1975
- [9] Narendra K S and Valavani S. Stable adaptive controller design-direct control [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1978, 23(4): 570-583
- [10] Lin Yan and Mao Jianqin. Analysis and design of robust VS-MRAC: Part II [J]. Control Theory and Applications, 2001, 18(2): 217-223 (in Chinese)

附录(Appendix)

定理 1 的证明 分如下步骤证明:

1) 证明在控制律(3.10)的作用下,辅助误差 $e_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n^* - 1$) 必有界.首先,对 $e_0(t)$, 定义 Lyapunov 函数 $V_0 = e_0^2(t)/2$, 我们将证明,无论 $u_0(t)$ 取 $\bar{u}_0(t)$ 还是 $\underline{u}_0(t)$, $e_0(t)$ 均将有界,并且将在有限时间内收敛到零(在此仅考虑 $p > 0$ 时的情形, $p \leq 0$ 时完全类似).事实上,若在某一时刻 t , 有 $u_0(t) = \bar{u}_0(t)$, 令

$$\bar{u}_0(t) = \bar{u}_{01}(t) + \bar{u}_{02}(t), \quad \bar{u}_{01}(t) := -e_0(t)/2,$$

$$\bar{u}_{02}(t) = -[(\|\bar{f}_0(\xi)\|_\infty + \Delta_0)/k_f] \text{sgn}(e_0(t)),$$

(A1)

并注意到 $k_u \bar{u}_{02}(t) = (k_u - k_f) \bar{u}_{02}(t) + k_f \bar{u}_{02}(t)$ 及

$$|k_p[\bar{\theta}^T \omega(t) + (1 - d_1(s)/(n_M(s)\alpha(s)))d(\gamma, t) - \rho(s)e_0(t)/k_p\beta_M(s)]/\alpha(s) +$$

$$(k_p - k_u) \sum_{i=1}^{n^*-1} [\Omega_{i-1}^{-1}(s) F^{-2(n^*-i+1)}(s) e_i(t)] + (k_p -$$

$$k_u) F^{-2(n^*-1)}(s) \bar{u}_{01}(t) | \leq$$

$$\|\bar{f}_0(\xi)\|_\infty.$$

则将(3.11)之 $u_0(t) = \bar{u}_0(t)$ 代入(3.6)后易于得到

$$\dot{V}_0 = e_0(t)\dot{e}_0(t) \leq$$

$$-pe_0^2(t) - k_u e_0^2(t)/2 +$$

$$e_0(t)[(k_p - k_u) F^{-2(n^*-1)}(s) \bar{u}_{02}(t) +$$

$$(k_u - k_f) \bar{u}_{02}(t)] + k_u \varepsilon(t) e_0(t) -$$

$$\Delta_0 e_0(t) \text{sgn}(e_0(t)). \quad (\text{A2})$$

由 $\bar{u}_{02}(t)$ 的定义可知它是单调递增的,故 $\|\bar{u}_{02}(\xi)\|_\infty = \|\bar{u}_{02}(t)\|$; 此外,容易验证, $\|F^{-2(n^*-1)}(s)\|_1 = 1$, 于是在上式中

$$|(k_p - k_u) F^{-2(n^*-1)}(s) \bar{u}_{02}(t)| \leq$$

$$(k_u - k_p) \|F^{-2(n^*-1)}(s)\|_1 \|\bar{u}_{02}(t)\|_\infty \leq$$

$$(k_u - k_f) \|\bar{u}_{02}(t)\|.$$

这说明存在一个函数 $\xi(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, 使得

$$(k_p - k_u) F^{-2(n^*-1)}(s) \bar{u}_{02}(t) + (k_u - k_f) \bar{u}_{02}(t) = -\xi(t) \text{sgn}(e_0(t)),$$

将其代入(A2)式,再注意 $k_p e_0(t) \varepsilon(t) \leq k_u(e_0^2(t) + \varepsilon^2(t))/2$, 立即可得

$$\dot{V}_0 = e_0(t)\dot{e}_0(t) \leq$$

$$-pe_0^2(t) + k_p \varepsilon(t) e_0(t) - k_u e_0^2(t)/2 -$$

$$\Delta_0 e_0(t) \text{sgn}(e_0(t)) \leq$$

$$-pe_0^2(t) + k_u \varepsilon^2(t)/2. \quad (\text{A3})$$

我们再来考虑 $u_0(t) = \underline{u}_0(t)$ 时的情形.因为此时在(3.6)式中,有

$$|(k_p - k_u) F^{-2(n^*-1)}(s) \underline{u}_0(t)| \leq$$

$$(k_u - k_f) \|F^{-2(n^*-1)}(s)\|_1 \|\underline{u}_0(t)\| =$$

$$(k_u - k_f) \|\sigma(t)\| \leq c. \quad (\text{A4})$$

则仿照以上分析,仍然可得(A3)式.最后,因 $\varepsilon(t)$ 依指数速度衰减至零,令 $\bar{\varepsilon} = \sup_{t \geq 0} |\varepsilon(t)|$, 并定义 $D := \{e_0 : |e_0(t)| \leq \bar{\varepsilon} \sqrt{k_u/2p}\}$, 那么,从(A3)式可知 $\dot{V}_0 < 0, \forall e_0 \in D^c$, 这里, D^c 为 D 之补.这说明 $e_0(t)$ 是全局有界的.另一方面,由于 $\Delta_0 > 0, \varepsilon(t)$ 依指数速度衰减至零,再根据 $e_0(t)$ 的有界性,从(A3)式还不难看出必有常数 $T_0 \geq 0$ 和 $a > 0$, 使得

$$\begin{cases} |e_0(t)| > a > 0, \\ \dot{V}_0 = e_0(t)\dot{e}_0(t) \leq \\ e_0(t)(k_p \varepsilon(t) - \Delta_0 \text{sgn}(e_0(t))) < 0, (e_0(t) \neq 0) \\ \forall t \geq T_0, \end{cases}$$

(A5)

故 $e_0(t)$ 将在有限时间内收敛到零. 类似地, 对于辅助误差 $e_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$, 若定义 Lyapunov 函数 $V_i = e_i^2(t)/2$ 并考虑到 (3.4) 中 e_i 为一阶微分方程, 那么, 当把 (3.10) 式的控制律 $u_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$ 代入 $\dot{V}_i$, 则易见 $e_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$ 全局有界并将在有限时间内收敛到零.

2) 证明 $u_i(t) (i = 0, 1, \dots, n^* - 1)$ 是有界的. 事实上, 从 (3.4) 可知若 $u_0(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是有界的, 则 $u_1(t)$ 必将有界, 依此类推, $u_i(t) (i = 2, \dots, n^* - 1)$ 亦必将有界, 因此, 我们只要证明存在一个 $\tau^* > 0$, 使得对每一个 $\tau \in (0, \tau^*)$, $u_0(t)$ 有界就可以了. 但由 (3.7)、(3.8) 式, 并利用引理 1 的结果, 可证明 (3.9) 式中

$$\begin{aligned} & \xi_0 \left| \frac{y_c(t)}{a(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{1i} \left| \frac{v_{1i}(t)}{a(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{2i} \left| \frac{v_{2i}(t)}{a(s)} \right| \leq \\ & \xi_0 \left| \frac{y_c(t)}{a(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{1i} \left| \frac{v_{1i}(t)}{a(s)} \right| + \\ & \sum_{i=1}^{n^*-1} \xi_{2i} \left| \frac{v_{2i}(t)}{a(s)} \right| + \tau c_u \|u_0\|_\infty. \end{aligned} \quad (A6)$$

这里, c_u 为某个正常数. 已证明 $e_i(t) (i = 0, 1, \dots, n^* - 1)$ 有界, 因此, 无论是取 $\bar{u}_0(t)$ 还是 $u_0(t)$, 根据 (3.11)、(A6) 式以及 (3.8) 式中关于 $y_c(t)$, v_{1i} 和 $v_{2i}(t)$ 的定义, 从 (3.9) 容易看出, 一定存在正常数 c_{u1} , 有 $\|u_0(\zeta)_t\|_\infty \leq c_{u1} +$

$\tau c_u \|u_0(\zeta)_t\|_\infty$. 取 $\tau^* > 0$, 使得对所有 $\tau \in (0, \tau^*)$, $1 - \tau c_u > 0$, 那么, 从此式立即可知 $u_0(t)$ 有界.

3) 下面讨论跟踪误差 $e(t)$ 及闭环系统其它各处信号的上有界性. 因每一个 $e_i(t)$ 均在有限时间收敛到零, 令 $T_i = \max\{t_{a_i} : e_i(t) = 0, \forall(t) \geq t_{a_i}, i = 0, 1, \dots, n^* - 1\}$, 则对所有 $t \geq T$, 由关系式^[10]

$$\begin{aligned} e(t) = & e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} \kappa [M(s)\alpha(s)\Omega_{(i-1)}^{-1}(s)F^{-2(n^*-i-1)}(s)e_i(t)] + \\ & \kappa M(s)\alpha(s)[(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)u_0(t)] \end{aligned} \quad (A7)$$

可知与 $e_i(t)$ 有关的部分将只剩下一些以指数速度收敛的项, 可将它们归入 (3.12) 式之 $\Psi(t)$ 中; 而对 (A7) 式中与 $u_0(t)$ 有关的项应用引理 1, 有正常数 φ , 使得 $|M(s)\alpha(s)\kappa[(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)u_0(t)]| \leq \tau\varphi \|u_0(\zeta)_t\|_\infty$ (φ 与 τ 无关), 再考虑到该项的初始条件, 并将其也归入到 $\Psi(t)$ 中, 就得到了 (3.12) 式. 最后, 在 $e_i(t)$, $u_i(t) (i = 0, 1, \dots, n^* - 1)$ 有界的基础上, 从系统结构中各信号间的关系不难得出其余信号的上有界性.

本文作者简介

林 岩 见本刊 2001 年第 2 期第 223 页.

毛剑琴 见本刊 2001 年第 2 期第 223 页.

(上接第 690 页)

(LMI) 方法, 得到了闭环系统稳定性的条件并提出了设计步骤.

参考文献 (References)

- [1] Choi H H and Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls [J]. Automatica, 1995, 31(9): 1349 - 1351
- [2] Lee J H, Kim S W and Kwon W H. Memoryless H_∞ controllers for state delayed system [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1994, 39(2): 158 - 162
- [3] Shen J C, Chen B S and Kung F C. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1987, 32(2): 427 - 429
- [4] Jiang X F, Fei S M and Feng C B. H_∞ control for linear delay systems with input delay [J]. Acta Automatic Sinica, 2001, 27(1): 108 - 114

- [5] Shaked U, Yaesh I and de Souza C E. Bounded real criteria for linear time-delay systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(8): 1016 - 1022
- [6] Cao Y Y, Sun Y X and Cheng C. Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delay [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(10): 1608 - 1612
- [7] Tzafarakis T and Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence condition and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307 - 1317

本文作者简介

费树岷 见本刊 2001 年第 3 期第 379 页.

姜信富 1963 年生, 1999 年 3 月获工学硕士学位, 现在东南大学自动化研究所攻读博士学位. 主要研究兴趣: 时滞系统的控制与综合, 鲁棒控制以及 H_∞ 控制等.

冯纯伯 见本刊 2001 年第 3 期第 368 页.