

文章编号: 1000-8152(2001)05-0709-05

## 质点弹簧系统稳定性的量化分析\*

檀斌 薛禹胜

(国家电力公司电力自动化研究院·南京, 210003)

**摘要:** 近年来发展起来的互补群际能量壁垒准则 (CCEBC), 是普适于非自治非线性运动系统稳定性分析的量化方法, 已经在国内外电力系统的工程中得到了广泛应用. 本文应用 CCEBC 对质点弹簧系统在大扰动下动态行为的稳定性进行了定性和定量分析, 给出在不同的扰动清除时间下的轨迹稳定裕度和参数的稳定极限, 分析了系统失稳模式随参数 (例如扰动清除时间) 而变的机理. 研究结果证明 CCEBC 稳定性量化理论不但适用于电力系统, 也适用于任何多刚体运动系统.

**关键词:** 质点弹簧系统; 运动稳定性; 结构稳定性; 定量分析

**文献标识码:** A

## Stability Analysis of Particle-Spring Systems

TAN Bin and XUE Yusheng

(Nanjing Automation Research Institute·Nanjing, 210003, P. R. China)

**Abstract:** The CCEBC (complementary cluster energy barrier criterion) theory, recently developed for transient stability assessments of power systems, is rigorous and quantitative. It has been widely used in power system engineering projects at home and abroad. In this paper, CCEBC is applied to particle-spring systems to study their motion stability under large disturbances. The stability margins of disturbed trajectories are investigated and the nature of that the unstable mode varies with the disturbance clearing time is also uncovered. Study clearly shows that quantitative stability analysis is much more advanced than qualitative analysis, and CCEBC is valid not only for power systems, but also for other motion systems.

**Key words:** particle-spring system; motion stability; structure stability; quantitative stability analysis

### 1 引言 (Introduction)

弹簧系统是非线性科学中广泛讨论的对象, 并且具有广阔的工程背景. 虽然已有大量的文献讨论了单质点弹簧系统在有耗散和周期激励下的动力学行为<sup>[1]</sup>, 但未见关于其稳定性的定量分析和多质点弹簧系统的研究报告.

扩展等面积准则 (EEAC, extended equal-area criterion) 已成为研究电力系统稳定性的有力理论武器, 并且在国内外电力工程中得到了广泛应用. 互补群际能量壁垒准则 (CCEBC, complementary cluster energy barrier criterion) 是在 EEAC 的基础上抽去电力系统的个性而发展完善的, 普遍适用于非自治非线性多刚体运动系统的稳定性理论<sup>[2]</sup>. 它有机地结合了数值积分法与控制理论, 用前者来保证对模型的广泛适用性, 用后者量化轨迹的稳定度并指导对稳定极限值的搜索. 它用 CCCOI-RM (complementary

cluster center of inertia-relative motion) 保稳降阶变换联系两者, 将多自由度有界稳定性问题严格转化为一组非自治单自由度的稳定性量化问题, 创造了根据受扰轨迹中的信息来研究非线性稳定性理论的新思路. 在由广义位置和广义外力组成的扩展相平面上, 可以对映象的稳定性进行严格的量化. 如果某个映象的外力/位置平面上的恢复力减小到零, 则原系统失稳, 该点即为动态鞍点 (DSP, dynamic saddle point); 可以用该点的动能反映其不稳定的程度. 如果所有映象的外力/位置平面上的速率先后都减小到零, 则该次摆动稳定, 对应点即为最远点 (FEP, far-end point); 可以用使其演变为临界失稳而必须在 FEP 处额外注入的动能作为其稳定裕度. 所有映象中最临界的那个映象决定了多刚体运动系统的失稳模式和稳定裕度. 根据最小值聚合原则, 多刚体系统的轨迹稳定裕度 (或参数稳定裕度) 等于其所有映象

\* 基金项目: 国家重点基础研究专项经费 (G1998020301) 及国家自然科学基金 (59920037) 重点资助项目.

收稿日期: 1999-11-01; 收修改稿日期: 2000-06-09.

的轨迹稳定裕度(或参数稳定裕度)中的最小值。CCEBC理论突破了李雅普诺夫直接法在研究耗散运动系统、非自治运动系统和多刚体运动系统稳定性方面的局限性,它可以应用于任何详细模型、复杂场景以及多摆稳定性的定量分析,且只需要极少的计算量,它能可靠辨识临界刚体群、临界摆次及其对应的时间段,能辨识出所有的潜在危险方向,提供驱动力空间中的稳定域、各种灵敏度信息和稳定极限。CCEBC理论还揭示了非线性多刚体运动系统中许多特殊现象的机理。

本文运用CCEBC理论,对单质点和多质点弹簧系统进行了稳定性的量化分析,讨论系统在受到大扰动后的轨迹稳定性和参数稳定性。

## 2 单质点弹簧系统的稳定分析 (Stability analysis of single particle-spring system)

### 2.1 系统的描述及其相轨迹 (Description and phase trajectory of single particle-spring system)

考察下列带有参数的非线性哈密顿系统:

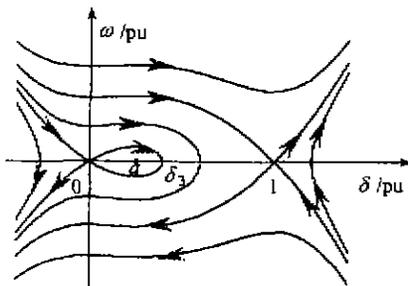
$$\ddot{\delta} + \delta(1 - \delta)(\delta - a) = 0. \quad (1)$$

其中  $0 < a \leq 1$ . 可以将式(1)等效地表示为:

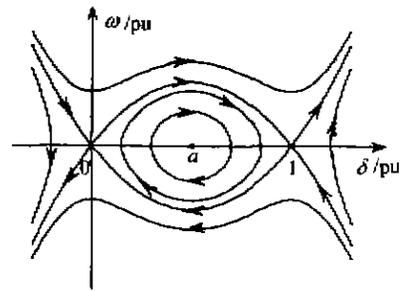
$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega, \\ \dot{\omega} = P_m - P_c, \\ P_m = 0, \\ P_c = -\delta^3 + (a+1)\delta^2 - a\delta. \end{cases} \quad (2)$$

它描述了一个惯量为1的质点,在驱动力  $P_m$  和制动力  $P_c(\delta)$  相互作用下的运动<sup>[3]</sup>.

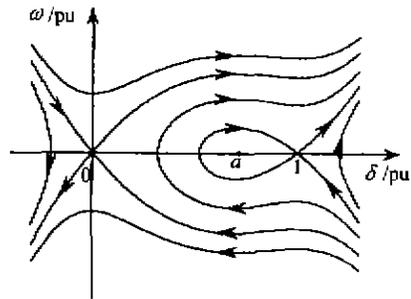
图1给出系统在不同  $a$  值下的相轨迹,其中有3个奇点,它们分别为鞍点(0,0)、鞍点(1,0)和中心点( $a,0$ ).当  $0 < a < 0.5$  时(见图1(a)),有一条同宿轨道通过鞍点(0,0),该同宿轨道上的哈密顿量为  $H(\delta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{4}\delta^4 + \frac{1+a}{3}\delta^3 - \frac{a}{2}\delta^2$ ,在其内部的相轨迹是周期闭轨,既不会正向失稳,也不会反向失稳.同宿轨道外面的区域是不稳定域.当  $a$  增加时,相图的结构将随之而变(见图1(b)及1(c)).



(a)  $a=0.25$



(b)  $a=0.5$



(c)  $a=0.70$

图1 相图的结构随  $a$  而变的情况

Fig. 1 Phase portraits change with parameter  $a$

### 2.2 大扰动下的系统稳定性 (System stability under large disturbances)

设系统(2)在稳定平衡点( $a,0$ )处,  $a = 0.25$ ; 参数  $a$  受到幅度为0.45,宽度为  $\tau$  的阶跃扰动.以下研究系统在不同的  $\tau$  值下的动力学行为.首先对式(2)进行积分求解,然后根据CCEBC理论对轨迹稳定性进行定量分析.图2给出摆动模式和稳定裕度  $\eta$  随着  $\tau$  值而变的情况,从中可见失稳模式沿  $\tau$  轴的分布,其中CCT1和CCT2分别为使首摆临界稳定和第2摆临界稳定的临界扰动清除时间,  $N_u$  为失稳摆次,  $N_u = \infty$  表示系统稳定.

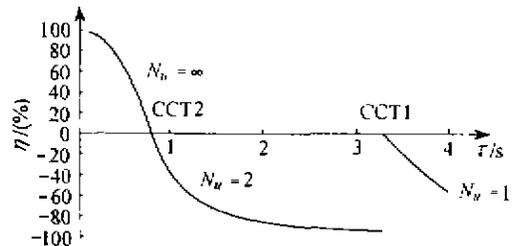


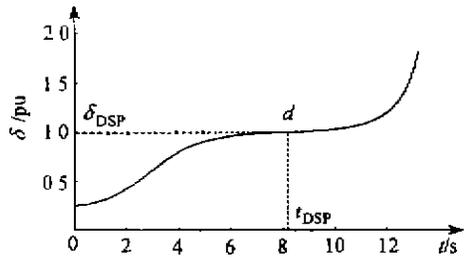
图2 稳定裕度  $\eta$  与清除时间  $\tau$  的关系图

Fig. 2 Swing mode and stability margin change with the disturbance clearing time

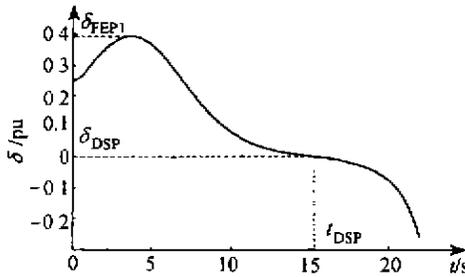
图3和图4分别给出了系统的运动图及在外力/位置( $P-\delta$ )平面上的扩展相轨迹图.扰动中,质点在加速力的作用下正向运动,加速力也随之变化.扰动被清除后,不平衡力的符号改变,质点在已有正向速度的基础上开始减速.若  $\tau = 3.28s$ ,当减速度在  $d$  点降为零时,由于速度仍为很小的正值,因此  $\delta$

将进入新的加速过程而在正向运动中失去稳定.用 CCEBC 得到的稳定裕度为  $-6 \times 10^{-5}$ ,很好地反映了系统首摆临界失稳的形态.若  $\tau = 0.79\text{s}$  时,  $\delta$  在正向运动中达到一定值  $\delta_{\text{FEP1}}$  后,质点在减速力下开始反向的第 2 摆.此后随着  $\delta$  的减小,不平衡力逐渐从减速力变为加速力.但当加速力在  $d$  点降为零时,速度仍为负值,因此质点将继续向左运动,离开  $d$  点而进入新的减速力作用域而失去稳定.

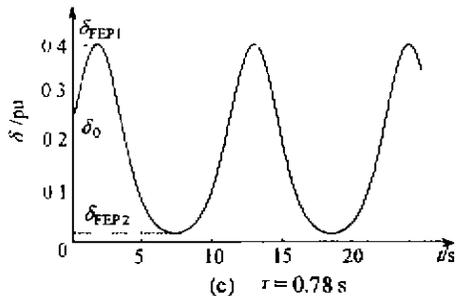
用 CCEBC 计算稳定裕度,即  $P$ - $\delta$  平面上各摆的动能减少面积(包括潜在的动能减少面积在内)与动能增加面积之差,当  $\tau = 0.79\text{s}$  时,首摆稳定裕度



(a)  $\tau = 3.28\text{s}$

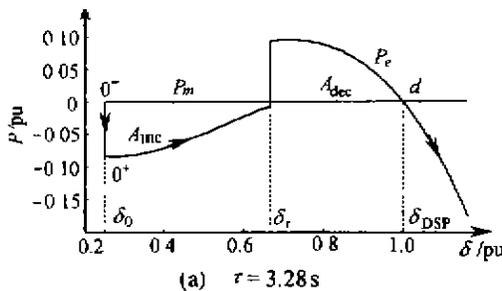


(b)  $\tau = 0.79\text{s}$

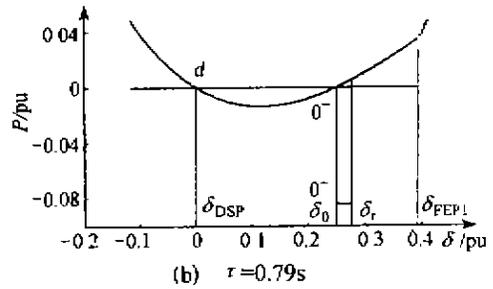


(c)  $\tau = 0.78\text{s}$

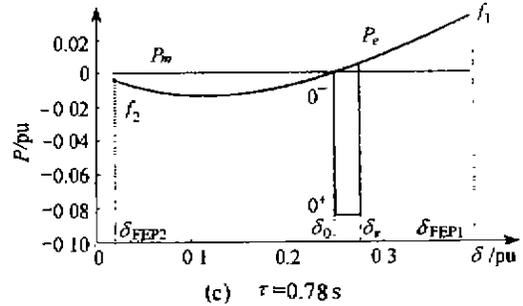
图 3 在不同的扰动清除时间下系统(2)的运动图  
Fig. 3 Time-evolving trajectories with different clearing times



(a)  $\tau = 3.28\text{s}$



(b)  $\tau = 0.79\text{s}$



(c)  $\tau = 0.78\text{s}$

图 4 不同的扰动清除时间下的外力/位置轨迹图  
Fig. 4 Orbits on the force-position plane with different clearing time

为  $4 \times 10^{-2}$ ,而第 2 摆的稳定裕度为  $-2 \times 10^{-5}$ .当  $\tau = 0.78\text{s}$  时,虽然从系统的运动图(图 3(c))可以看出系统是稳定的,但却无法计算正向摆动和反向摆动的稳定度.由于系统(2)是单质点无耗散自治系统,所以  $P$ - $\delta$  平面上的轨迹是往返重叠的(图 4(c)).仿真结果表明:系统各个摆次在  $P$ - $\delta$  扩展相平面上所围面积的代数和都为零.由于是定常哈密顿系统,FEP 到 DSP 之间的  $P$ - $\delta$  曲线和所围面积有解析解,可用 CCEBC 算出正向摆动的稳定裕度为  $4 \times 10^{-2}$ ,而反向摆动的稳定裕度为  $4 \times 10^{-5}$ .

### 3 多质点耦联系统的稳定性分析 (Stability analysis of multi-particle-spring system)

#### 3.1 多质点弹簧系统的数学模型及其在大扰动下的稳定性 (Model of multi-particle-spring system and stability under large disturbances)

考虑如下形式的 3 质点弹簧系统:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = \omega_1, \\ \dot{\omega}_1 = -\delta_1(1-\delta_1)(\delta_1-a_1) + (\delta_2-\delta_1)[1-(\delta_2-\delta_1)][(\delta_2-\delta_1)-a_2], \\ \dot{\delta}_2 = \omega_2, \\ \dot{\omega}_2 = -(\delta_2-\delta_1)[1-(\delta_2-\delta_1)][(\delta_2-\delta_1)-a_2] + (\delta_3-\delta_2)[1-(\delta_3-\delta_2)][(\delta_3-\delta_2)-a_3], \\ \dot{\delta}_3 = \omega_3, \\ \dot{\omega}_3 = -(\delta_3-\delta_2)[1-(\delta_3-\delta_2)][(\delta_3-\delta_2)-a_3]. \end{cases} \quad (3)$$

其中下标表示质点号,不失一般性,取  $a_1 = 0.1, a_2$

$= 0.4, a_3 = 0.8$ .

设系统参数  $a_1$  遭受了一个幅度为 0.3, 宽度为  $\tau$  的扰动. 用 CCEBC 理论对这个振动系统进行轨迹稳定性分析. 首先对系统积分, 得到受扰轨迹, 然后用 CCCOI-RM 变换将上述受扰轨迹映射为 3 个等值单质点弹簧系统的运动轨迹, 并对后者的稳定性进行量化分析, 求出其失稳模式和稳定裕度, 并且利用灵敏度分析得到临界参数值. 最后根据最小值聚合规则得到原系统的稳定极限值和失稳模式.

$\tau$  的变化使受扰轨迹发生变化, 系统的失稳模式也可能因之而改变. 图 5 给出系统的两个主要失稳模式的稳定裕度  $\eta$  随着  $\tau$  值而变的部分情况, 而图 6 定性给出了图 5 中未能表达的部分细节, 其中, 字母  $a, b, c$  表示主导群分别为质点 1, 2, 3; 随后的数字表示失稳摆次;  $\eta = -100\%$  对应于主导映象中没有经历动能减少阶段的情况. 当  $\tau$  处于图 6 中标有 \* 号的区间 (1.095, 1.169) 时, 极其微小的  $\Delta\tau$ , 例如 0.0001s, 将会改变系统的失稳模式.

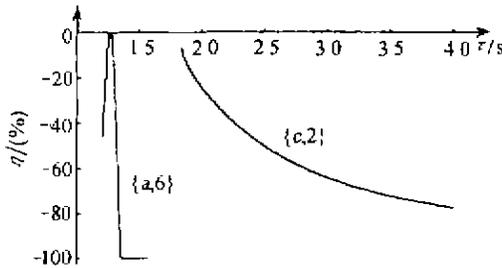


图 5 UM:  $\{S_i, N_i\}$  及  $\eta$  与  $\tau$  的关系

Fig 5 Both UM:  $\{S_i, N_i\}$  and  $\eta$  change with  $\tau$

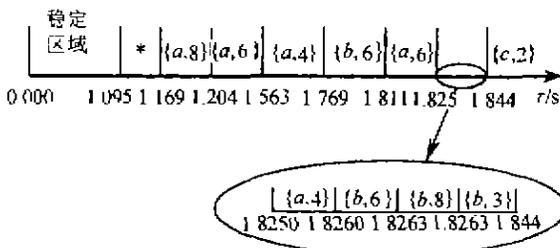
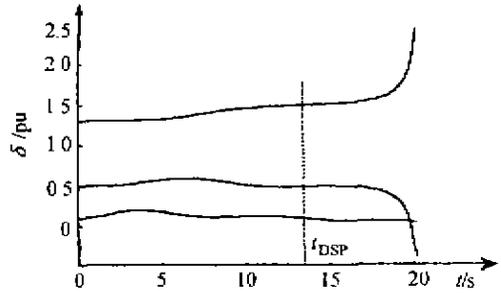


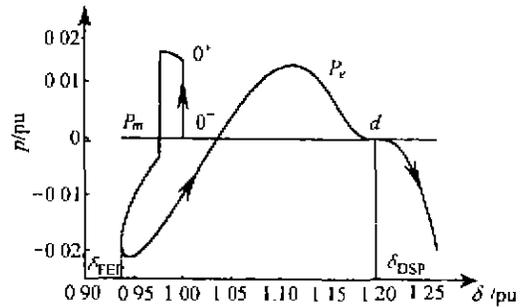
图 6 失稳模式在  $\tau$  轴上的分布情况

Fig. 6 Distribution of unstable modes on  $\tau$  axis

在  $\tau = 1.845$ s 的条件下, 至少要将数值积分进行到 18s 才能在  $\delta$ - $t$  平面上观察到失稳的迹象(见图 7(a)). 相反地, 从 CCEBC 给出的主导映象  $P$ - $\delta$  的轨迹(见图 7(b))可以看出: 系统在正向的第 2 摆中遇到 DSP(图 7(b)中的  $d$  点), 失稳的机理在经过 DSP 时已经形成, 而此时  $t_{DSP} = 13.25$ s. 因此在  $P$ - $\delta$  平面上只需 13.25s 的轨迹就可判定系统失稳. 这仅仅是稳定性定量分析方法优于定性分析方法的一方面.



(a) 在  $\delta$ - $t$  平面上至少需要 18s 才能发现失稳



(b) 在  $P$ - $\delta$  平面上只需用 13.25s 即可判定系统失稳

图 7 在  $\delta$ - $t$  和  $P$ - $\delta$  平面上判定失稳系统失稳

Fig. 7 Comparison between two methods

### 3.2 CCT 精度的评估 (Evaluation of CCT accuracy)

根据任意给定的初值, 可以利用 CCEBC 的灵敏度分析技术来求取各参数的稳定极限值, 例如扰动的临界切除时间 CCT. 在评估 CCEBC 的估计值(记为  $t_{c,j}^E$ ) 的精度时, 采用了精确的数值仿真试探结果(记为  $t_{c,j}^S$ ) 为标准. 用相对误差  $\Delta$  来评价每个算例(用下标  $j$  表示)的精度:

$$\Delta_j = (t_{c,j}^E - t_{c,j}^S) / t_{c,j}^S \times 100\%. \quad (4)$$

在失稳域内按等间隔选取初值, 从表 1 所列的统计结果可以看出 CCEBC 的精度相当令人满意.

表 1 CCT 估计值的精度评估

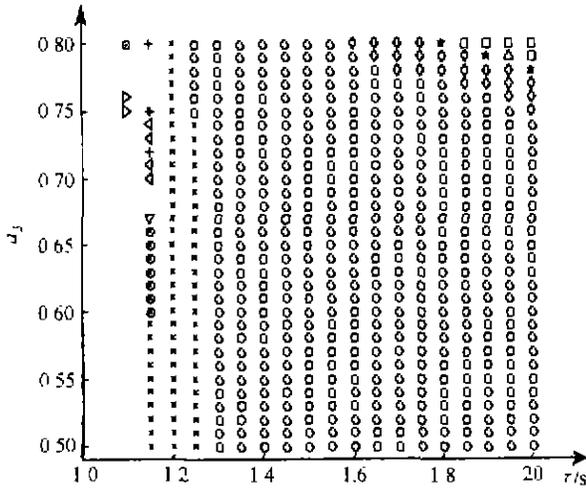
Table 1 The accuracy evaluation of stability limits given by CCEBC

失稳模式	算例总数	$ \Delta  \leq 5\%$ 的算例数	$5\% <  \Delta  < 70\%$ 的算例数
{c,2}	175	174	1
{b,6}	133	133	0

### 3.3 参数空间的失稳域 (Unstable domain in parameter space)

图 8 说明了当参数  $a_1$  发生幅度为 0.3, 宽度为  $\tau$  的阶跃扰动后, 系统(3)的失稳模式(临界群的组成和摆次)随扰动切除时间  $\tau$  和参数  $a_3$  而变化的情况. 可以看出, 即使是只有 3 个质点的直线运动, 其动态模式变化的复杂性已经出乎人们的意料. 位于

不同模式边界两侧任意相互接近的两个点将有截然不同的动态. 特别是在稳定域边界附近, 不但动态模式表现出对参数的极其敏感, 并且在两个参数轴上都可以观察到稳定域中的空洞和失稳域中的稳定孤岛.



□ {c,2}, △ {b,3}, ☆ {b,6}, ◇ {a,4}, ○ {a,6}, × {a,8}, ⊗ {a,10}, ∇ {a,12}, + {a,16}, < {a,18}, \* {a,26}, ▷ {a,32}, ⊙ {a,40}.

图 8 失稳模式在参数空间中的分布  
Fig.8 Distribution of unstable modes on a two-parameter plane

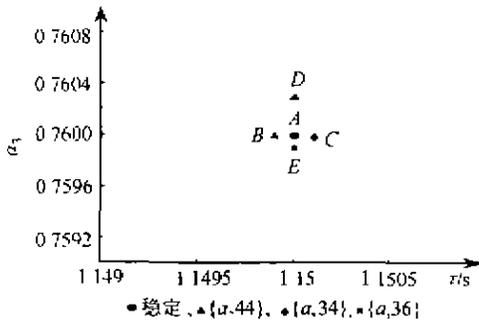


图 9 失稳模式对于参数的极其敏感性

Fig.9 The mode may be very sensitive to parameters  
用极高的积分精度 ( $10^{-10}$ ), 对  $a_3 = 0.7600, \tau = 1.15s$  下的 1000s 物理过程进行数值仿真, 系统仍然稳定 (对应于图 9 中的 A 点). 如果将  $\tau$  减少 0.0001s (对应于图 9 中的 B 点), 质点 1 在 291s 时遇

到第 44 摆的 DSP 而失稳; 如果将  $\tau$  增加 0.0001s (对应于图 9 中的 C 点), 质点 1 在 229s 时遇到第 34 摆的 DSP 而失稳. 如果以 A 点为参考, 将  $a_3$  增加 0.0003 (对应于图 9 中的 D 点), 质点 1 在 291s 时遇到第 44 摆的 DSP 而失稳; 如果将  $a_3$  减少 0.0001 (对应于图 9 中的 E 点), 质点 1 在 237s 时遇到第 36 摆的 DSP 而失稳. 也就是说, 稳定的 A 点在图 9 的两个坐标方向上都被失稳域所包围, 成为一个孤立稳定域 (ISD, isolated stable domain).

#### 4 结论 (Conclusion)

本文运用 CCEBC 理论, 对单质点和多质点弹簧系统进行了稳定性的量化分析, 讨论系统在受到大扰动后的轨迹稳定性和参数稳定性. 可以看到, 即使只有 3 质点, 并且是定常系统, 但在扰动作用下所呈现的动态行为也是极其复杂的. 如果没有 CCEBC 理论和定量算法的支持, 不但难以对系统进行深入的理解, 也难以发现和解释一些独特的现象 (例如孤立稳定域现象). 本文的研究结果也说明, 仅仅依靠数值积分的定性分析不一定能正确地作出定论; 全局的定量分析和机理研究对理论和工程应用都非常重要.

#### 参考文献 (References)

- [1] Lu Zengrong. Perturbation Criteria for Chaos [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Press, 1994 (in Chinese)
- [2] Xue Yusheng. Quantitative Study of General Motion Stability and an Example on Power System Stability [M]. Nanjing: Jiangsu Science and Technology Press, 1999 (in Chinese)
- [3] Li Genguo and Zhu Zhengyou. Controlling orbit and controlling chaos in a dynamic system [J]. Journal of Nonlinear Dynamics in Science and Technology, 1998, 5(4): 346-355 (in Chinese)

#### 本文作者简介

檀 斌 1973 年生. 分别于 1994 和 1997 年在东北大学自动控制系获得学士和硕士学位. 现为电力自动化研究院博士研究生. 主要从事非线性系统稳定性分析方面的研究.

薛禹胜 1941 年生. 中国工程院院士, 博士生导师, 电力自动化研究院总工程师. 主要从事非线性稳定性和电力系统自动化方面的研究.