

文章编号: 1000-8152(2001)05-0732-05

Delta 算子系统的状态反馈鲁棒镇定与鲁棒 H_∞ 控制*

张端金

(华南理工大学电力学院·广州, 510640; 郑州大学信息工程学院·郑州, 450052)

吴捷

杨成梧

(华南理工大学电力学院·广州, 510640) (南京理工大学动力学院·南京, 210094)

摘要: 研究 Delta 算子描述的线性不确定离散系统的鲁棒镇定与 H_∞ 控制问题. 提出了“Delta 算子系统二次稳定与二次可镇定”的概念, 推导出 Delta 算子不确定系统鲁棒二次可镇定的充要条件及其状态反馈控制律. 基于 Delta 算子界实引理, 给出闭环不确定系统具有 H_∞ 范数界的充分条件和状态反馈设计. 所得结论将连续与离散系统的有关结果统一于 Delta 算子框架.

关键词: 离散系统; Delta 算子; 鲁棒镇定; H_∞ 控制

文献标识码: A

Robust Stabilization and Robust H_∞ Control for the Delta Operator Systems via State Feedback

ZHANG Duanjin

(Electric Power College, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P. R. China)

(College of Information Engineering, Zhengzhou University · Zhengzhou, 450052, P. R. China)

WU Jie

(Electric Power College, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P. R. China)

YANG Chengwu

(School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing, 210094, P. R. China)

Abstract: Robust stabilization and robust H_∞ control of the Delta operator formulated linear uncertain systems are considered in this paper. The definitions of “quadratic stability and quadratic stabilization for Delta operator systems” are introduced, then a sufficient and necessary condition and the corresponding state feedback control law for robust quadratic stabilization are developed. Based on the Delta operator bounded real lemma, sufficient condition with H_∞ norm bound on closed loop uncertain systems and state feedback design are presented. The proposed results can bring previous related conclusions of continuous time and discrete time systems into the unified Delta framework.

Key words: discrete time system; Delta operator; robust stabilization; H_∞ control

1 引言(Introduction)

连续系统的鲁棒控制与 H_∞ 控制理论现已发展得比较完善, 有关离散系统鲁棒控制与 H_∞ 控制的研究相对较少, 主要有基于双线性变换的间接法和直接离散化设计方法. 现有方法均为传统的移位算子模型描述的控制算法, 在采样周期很小时, 将引起病态条件问题. 为此采用 Delta 算子模型方法能够有效克服上述问题.

Delta 算子是一种新的离散化方法, 在控制和

信号处理领域获得许多成果^[1]. 近期在 Delta 算子 H_∞ 控制、特征结构配置以及系统性能分析等方面取得一些新的进展. 文[2, 3]分别采用对策论方法和 Riccati 方程方法研究 Delta 算子系统的 H_∞ 控制; Piu^[4]主要研究 Delta 算子系统的特征结构配置和鲁棒性分析; 本文作者在[5]中给出 Delta 算子系统具有性能鲁棒性的判别条件. 但现有结果均未考虑 Delta 算子不确定系统的鲁棒性能设计问题.

本文研究 Delta 算子系统的鲁棒镇定与鲁棒 H_∞

* 基金项目: 国家自然科学基金(69474021, 60174025)项目; 中国博士后科学基金(2000-31)项目; 河南省教育厅科研计划(1999510005)项目; 高校博士点基金和国家重点基础研究专项经费(G1998020308)资助项目.

收稿日期: 1999-06-07; 收修改稿日期: 2000-09-26.

控制, 提出了 Delta 算子不确定系统鲁棒二次可镇定的充要条件. 基于 Delta 算子界实引理, 给出闭环不确定系统具有 H_∞ 范数界的充分条件和状态反馈设计方法. 文中 $X > 0$ 和 $X < 0$ 分别表示矩阵 X 为正定和负定矩阵.

2 Delta 算子模型描述 (Model representation using the Delta operator)

Delta (δ) 算子定义为^[6,7]

$$\delta = \frac{q - 1}{T}. \quad (1)$$

其中 T 为采样周期, q 为前向移位算子, 即 $qx(t) = x(t + T)$.

现考虑如下的线性连续系统

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t). \quad (2)$$

上式中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入, $w(t) \in \mathbb{R}^l$ 为干扰信号, A, B 和 G 为适当维数的常值矩阵.

若采用带零阶保持器的离散化方法对连续系统进行采样, 则(2)式的 q 算子离散化模型为

$$qx(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + G_q w(t). \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} A_q = e^{AT}, & B_q = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau, \\ G_q = \int_0^T e^{A(T-\tau)} G d\tau, \end{cases} \quad (4)$$

而(2)式的 Delta 算子离散化模型为

$$\delta x(t) = A_\delta x(t) + B_\delta u(t) + G_\delta w(t). \quad (5)$$

这里

$$\begin{cases} A_\delta = (A_q - I)/T = \Psi(A, T)A, \\ B_\delta = B_q/T = \Psi(A, T)B, \\ G_\delta = G_q/T = \Psi(A, T)G, \\ \Psi(A, T) = I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2T^2}{3!} + \dots \end{cases} \quad (6)$$

根据式(4)和(6)可知, 当采样周期 $T \rightarrow 0$ 时得到

$$\lim_{T \rightarrow 0} A_q = I, \lim_{T \rightarrow 0} B_q = 0, \lim_{T \rightarrow 0} G_q = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} A_\delta = A, \lim_{T \rightarrow 0} B_\delta = B, \lim_{T \rightarrow 0} G_\delta = G. \quad (8)$$

由此可见, 在采样周期很小时传统的 q 移位算子模型将出现矩阵奇异现象, 引起病态条件问题. Delta 算子方法避免了高速采样时传统的移位算子方法引起的数值不稳定问题, 又使得当采样周期趋近于零时 Delta 算子离散模型趋近于原来的连续模型, 从而基于 Delta 算子可以统一处理连续和离散系统的鲁棒镇定和 H_∞ 控制问题.

3 Delta 算子系统的鲁棒镇定 (Robust stabilization for the Delta operator systems)

考虑基于 Delta 算子描述的不确定系统

$$\rho x(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t), \quad (9)$$

其中 ρ 称为广义微分算子, 分别表示 d/dt (连续情形) 或 δ (离散情形), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为如下结构的摄动矩阵.

$$\Delta A = DFE. \quad (10)$$

这里 D 和 E 为已知矩阵, 不确定参数矩阵 F 满足下式:

$$F^T F \leq I. \quad (11)$$

在此我们引入 Delta 算子系统二次稳定和二次可镇定的概念:

定义 1 如果存在对称正定阵 P , 使得对于所有容许的不确定性 ΔA 满足

$$(A + \Delta A)^T P + P(A + \Delta A) + T(A + \Delta A)^T P(A + \Delta A) < 0. \quad (12)$$

则称 Delta 算子不确定系统(9)是二次稳定的.

定义 2 Delta 算子系统(9)称为状态反馈二次可镇定的, 当且仅当存在对称正定阵 P , 使得

$$(A + BK + \Delta A)^T P + P(A + BK + \Delta A) + T(A + BK + \Delta A)^T P(A + BK + \Delta A) < 0.$$

其中状态反馈

$$u(t) = Kx(t).$$

注 在(12)式中若令 $T = 0$ 即为连续系统二次稳定^[8], 令 $T = 1$, $A = TA + I$ 即得离散系统二次稳定^[9]的定义. 有关二次稳定的具体含义参见文[10].

定理 1 设 Q 和 R 均为对称正定阵, Delta 算子不确定系统(9)可状态反馈二次镇定的充要条件是存在 $\epsilon > 0$, 使得 Delta 算子 Riccati 方程

$$(I + TA)^T [P^{-1} + T(BR^{-1}B^T - \epsilon DD^T)]^{-1} (I + TA) - P + \epsilon^{-1} TE^T E + TQ = 0 \quad (13)$$

有对称正定解 P , 并满足

$$\epsilon^{-1} I - TD^T PD > 0. \quad (14)$$

此时状态反馈增益矩阵为

$$K = -R^{-1}B^T [P^{-1} + T(BR^{-1}B^T - \epsilon DD^T)]^{-1} (I + TA). \quad (15)$$

为了证明上述定理的结论, 还需要以下引理.

引理 1^[11] 设 X, Y, Z 均为 $k \times k$ 的对称矩阵, 且有 $X \geq 0, Y < 0$ 和 $Z \geq 0$, 如果对于所有非零的 $\xi \in \mathbb{R}^k$,

$$(\xi^T Y \xi)^2 - 4(\xi^T X \xi)(\xi^T Z \xi) > 0,$$

则存在常数 $\lambda > 0$, 使得矩阵 $\lambda^2 X + \lambda Y + Z < 0$.

引理 2^[12] 设 X 为 $k \times k$ 对称阵, $S \in \mathbb{R}^{k \times m}$, 如

果对所有满足 $S^T \xi = 0$ 的非零向量 $\xi \in \mathbb{R}^k$, 有 $\xi^T X \xi < 0$, 则存在正定对称阵 $Y \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 使得矩阵 $X - SYS^T < 0$.

引理 3^[11] 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$, 有 $\max\{(x^T DFEy)^2 : F^T F \leq I\} = x^T D D^T x y^T E^T E y$.

引理 4^[12] 设 D, A 和 E 为适当维数的矩阵, F 满足(11)式, P 是满足下式的正定对称阵

$$\varepsilon^{-1}I - D^T P D > 0, \varepsilon > 0,$$

则有

$$A^T P D F E + E^T F^T D^T P A + E^T F^T D^T P D F E \leq$$

$$A^T P D (\varepsilon^{-1}I - D^T P D)^{-1} D^T P A + \varepsilon^{-1} E^T E.$$

定理 1 的证明:

1) 充分性. 令 $P_1 = P/T, B_1 = TB, A_c = I + TA + TBK, D_1 = TD$, 由引理 4 和矩阵求逆公式有 $V = (A + BK + \Delta A)^T P + P(A + BK + \Delta A) + T(A + BK + \Delta A)^T P(A + BK + \Delta A) =$

$$[I + T(A + BK + \Delta A)]^T \frac{P}{T} [I + T(A + BK + \Delta A)] - \frac{P}{T} =$$

$$(A_c + T\Delta A)^T P_1 (A_c + T\Delta A) - P_1 =$$

$$A_c^T P_1 A_c + A_c^T P_1 D_1 F E + E^T F^T D_1^T P_1 A_c +$$

$$E^T F^T D_1^T P_1 D_1 F E - P_1 \leq$$

$$A_c^T P_1 A_c + A_c^T P_1 D_1 (\varepsilon^{-1}I -$$

$$D_1^T P_1 D_1)^{-1} D_1^T P_1 A_c + \varepsilon^{-1} E^T E - P_1 =$$

$$A_c^T (P_1^{-1} - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} A_c + \varepsilon^{-1} E^T E - P_1. \quad (16)$$

由定理 1 的条件(13)式可知

$$P_1 = (I + TA)^T (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA) + \varepsilon^{-1} E^T E + Q. \quad (17)$$

将上式代入(16)得

$$V \leq A_c^T (P_1^{-1} - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} A_c - (I + TA)^T (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA) - Q. \quad (18)$$

记

$$N = (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA),$$

则有

$$(I + TA)^T (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA) = N^T B_1 R^{-1} B_1^T N + N^T (P_1^{-1} - \varepsilon D_1 D_1^T) N.$$

于是由(18)式有

$$V \leq A_c^T (P_1^{-1} - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} A_c - Q - N^T B_1 R^{-1} B_1^T N - N^T (P_1^{-1} - \varepsilon D_1 D_1^T) N. \quad (19)$$

若取状态反馈增益矩阵

$$K = -R^{-1} B_1^T (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA), \quad (20)$$

则有

$$A_c^T (P_1^{-1} - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} A_c = N^T (P_1^{-1} - \varepsilon D_1 D_1^T) N,$$

$$V \leq - (Q + K^T R K) \leq -Q < 0. \quad (21)$$

因此式(15)或(20)确定的状态反馈控制律, 可二次镇定(9)式的不确定系统.

2) 必要性. 设系统(9)是状态反馈二次可镇定的, 则由定义 2 可知, 存在正定对称阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$(A + BK + \Delta A)^T P + P(A + BK + \Delta A) +$$

$$T(A + BK + \Delta A)^T P(A + BK + \Delta A) < 0.$$

即

$$[I + T(A + BK + \Delta A)]^T \frac{P}{T} [I + T(A + BK + \Delta A)] - \frac{P}{T} < 0, \quad (22)$$

$$(A_c + T\Delta A)^T P_1 (A_c + T\Delta A) - P_1 < 0. \quad (23)$$

(23)式等价于

$$\begin{bmatrix} -P_1^{-1} & (A_c + T\Delta A) \\ (A_c + T\Delta A)^T & -P_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (24)$$

上式展开后有

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_1 K \\ K^T B_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_1 F E \\ E^T F^T D_1^T & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

对于所有满足 $[B_1^T \ 0]x = 0$ 的非零向量 $x \in \mathbb{R}^{2n}$, 有

$$x^T \begin{bmatrix} -P^{-1} & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 \end{bmatrix} x + x^T Q \begin{bmatrix} 0 & D_1 F E \\ E^T F^T D_1^T & 0 \end{bmatrix} x < 0. \quad (26)$$

从而

$$x^T \begin{bmatrix} -P_1^{-1} & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 \end{bmatrix} x < - \left\{ \max x^T \begin{bmatrix} 0 & D_1 F E \\ E^T F^T D_1^T & 0 \end{bmatrix} x : F^T F \leq I \right\} \leq 0.$$

于是得到

$$\left(x^T \begin{bmatrix} -P_1^{-1} & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 \end{bmatrix} x \right)^2 > \left\{ \max x^T \begin{bmatrix} 0 & D_1 F E \\ E^T F^T D_1^T & 0 \end{bmatrix} x : F^T F \leq I \right\}^2. \quad (27)$$

根据引理 3 得

$$\left(x^T \begin{bmatrix} -P_1^{-1} & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 \end{bmatrix} x \right)^2 > 4x^T \begin{bmatrix} D_1 D_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^T E \end{bmatrix} x. \quad (28)$$

由引理 1 知存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\varepsilon x^T \begin{bmatrix} D_1 D_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + x^T \begin{bmatrix} -P_1^{-1} & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 \end{bmatrix} x +$$

$$\frac{1}{\epsilon} x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^T E \end{bmatrix} x < 0. \quad (29)$$

又由引理 2 知存在正定对称阵 $Y = R^{-1}$ 使得

$$\epsilon \begin{bmatrix} D_1 D_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_1^{-1} & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^T E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} [B_1^T \ 0] < 0, \quad (30)$$

即

$$\begin{bmatrix} -P_1^{-1} + \epsilon D_1 D_1^T - B_1 R^{-1} B_1^T & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 + \frac{1}{\epsilon} E^T E \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

则有

$$(I + TA)^T (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \epsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA) - P_1 + \epsilon^{-1} E^T E < 0. \quad (32)$$

从而存在正定对称矩阵 Q 使得

$$(I + TA)^T (P_1^{-1} + B_1 R^{-1} B_1^T - \epsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA) - P_1 + \epsilon^{-1} E^T E + Q = 0. \quad (33)$$

经变量代换即得(13)式。

下面证明 P 满足(14)式。类似于(29)式的推导可知, 对所有满足 $[0 \ B_1 K]x = 0$ 的非零向量 x , 有

$$\epsilon x^T \begin{bmatrix} D_1 D_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + x^T \begin{bmatrix} -P^{-1} & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{\epsilon} x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^T E \end{bmatrix} x < 0, \quad (34)$$

根据引理 2 的结果整理得到

$$\begin{bmatrix} -P_1^{-1} + \epsilon D_1 D_1^T & (I + TA) \\ (I + TA)^T & -P_1 + \frac{1}{\epsilon} E^T E - K^T B_1^T W B_1 K \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

所以

$$P_1^{-1} - \epsilon D_1 D_1^T > 0. \quad (36)$$

即 $\epsilon^{-1} I - D_1^T P_1 D_1 > 0$, 等价地有 $\epsilon^{-1} I - TD^T P D > 0$, 必要性得证。

4 Delta 算子系统的鲁棒 H_∞ 控制 (Robust H_∞ control for the Delta operator systems)

考虑不确定线性系统状态空间描述

$$\rho x(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) + Gw(t), \quad x(0) = 0, \quad (37a)$$

$$z(t) = Cx(t). \quad (37b)$$

其中 $x(t)$, $u(t)$, $w(t)$ 的含义同前, $z(t)$ 为控制输出, A, B, C 和 G 为适当维数常值矩阵, $\Delta A = DFE$ 为(10)式的结构摄动。假定 $[A \ B]$ 能稳定, $[C \ A]$

能检测。

在此设计状态反馈 $u(t) = Kx(t)$, 使得闭环系统(37)稳定, 且干扰输入 $w(t)$ 到控制输出 $z(t)$ 的传递函数 $T_{wz}(\gamma)$ 的 H_∞ 范数满足 $\|T_{wz}(\gamma)\|_\infty \leq \alpha$ 。 $T_{wz}(\gamma)$ 的 H_∞ 范数定义为

$$\|T_{wz}(\gamma)\|_\infty = \sup_{\gamma \in \mathcal{D}^{n-1}/T} \sigma_{\max}(T_{wz}(\gamma)) = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}. \quad (38)$$

其中 $\sigma_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵的最大奇异值, $v \in L_2$ 的定义为 $\|v(t)\|_2 = [S_{t=0}^\infty v(t)^T v(t) dt]^{1/2} < \infty$ 。这里 S_t^∞ 表示连续情形的积分或离散情形的求和运算。

引理 5^[13] 考虑线性系统 $T_{wz}(\gamma)$ 的 $[C \ A]$ 能检测实现

$$\rho x = Ax + Gw, \quad z = Cx, \quad x(0) = 0.$$

如果存在实对称矩阵 $P \geq 0$ 和实数 $\alpha > 0$ 使得

$$\text{i) } A^T P L^{-1} + P L^{-1} A + T A^T P L^{-1} A + \alpha^{-2} P G G^T P L^{-1} + C^T C \leq 0;$$

$$\text{ii) } \alpha^2 I - T G^T P G > 0.$$

其中 $L = I - \alpha^{-2} T G G^T P$, 则有

a) A 是稳定的;

$$\text{b) } \|T_{wz}(\gamma)\|_\infty = \|C(\gamma I - A)^{-1} G\|_\infty \leq \alpha.$$

定理 2 对于 Delta 算子系统(37), 通过状态反馈 $u(t) = Kx(t)$ 使得闭环不确定系统稳定, 且满足 $\|T_{wz}(\gamma)\|_\infty \leq \alpha$ 的充分条件为

$$K = -B^T P [I + T(BB^T - \alpha^{-2} G G^T - \epsilon D D^T) P]^{-1} (I + TA). \quad (39)$$

其中 $P \geq 0$ 并满足下列条件:

$$1) (I + TA)^T [P^{-1} + T(BB^T - \alpha^{-2} G G^T - \epsilon D D^T)]^{-1} (I + TA) - P + \epsilon^{-1} T E^T E + T C^T C \leq 0;$$

$$2) \alpha^2 I - T G^T P G > 0; \quad \epsilon^{-1} I - T D^T (P^{-1} - T \alpha^{-2} G G^T)^{-1} D > 0, \quad \epsilon > 0.$$

证 令 $P_1 = P/T$, $B_1 = TB$, $A_c = I + TA + TBK$, $D_1 = TD$, $G_1 = TG$, 考虑下式:

$$V = (A + BK + \Delta A)^T P L^{-1} + P L^{-1} (A + BK + \Delta A) + T(A + BK + \Delta A)^T P L^{-1} (A + BK + \Delta A) + \alpha^{-2} P G G^T P L^{-1} + C^T C. \quad (40)$$

其中 $L = I - \alpha^{-2} T G G^T P$, 由引理 5 知, 若 $V \leq 0$, 则定理结论成立。

根据定理 2 的条件 2) 和引理 4 有

$$\begin{aligned} V &= (A + BK + \Delta A)^T P + P(A + BK + \Delta A) + T(A + BK + \Delta A)^T P(A + BK + \Delta A) + [(I + T(A + BK + \Delta A))^T P G (\alpha^2 I - T G^T P G)^{-1} G^T P [I + T(A + BK + \Delta A)]] + C^T C = (A_c + T \Delta A)^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} (A_c + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T\Delta A) - P_1 + C^T C = \\
& A_c^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} A_c + \\
& A_c^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} D_1 F E + \\
& E^T F^T D_1^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} A_c + \\
& E^T F^T D_1^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} D_1 F E - P_1 + C^T C \leq \\
& A_c^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} A_c + \varepsilon^{-1} E^T E - P_1 + C^T C + \\
& A_c^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} D_1 [\varepsilon^{-1} I - D_1^T (P_1^{-1} - \\
& \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} D_1]^{-1} D_1^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T)^{-1} A_c = \\
& A_c^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} A_c + \\
& \varepsilon^{-1} E^T E - P_1 + C^T C. \quad (41)
\end{aligned}$$

由定理 2 的条件 1) 得

$$\begin{aligned}
P_1 \geq & (I + TA)^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T + B_1 B_1^T - \\
& \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA) + \varepsilon^{-1} E^T E + C^T C.
\end{aligned}$$

将上式代入(41)有

$$\begin{aligned}
V \leq & A_c^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} A_c - \\
& (I + TA)^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T + B_1 B_1^T - \\
& \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA). \quad (42)
\end{aligned}$$

记

$$M = (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T + B_1 B_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA),$$

则有

$$\begin{aligned}
& (I + TA)^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T + \\
& B_1 B_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA) = \\
& M^T B_1 B_1^T M + M^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T) M.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
V \leq & A_c^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} A_c - \\
& M^T B_1 B_1^T M - M^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T) M. \quad (43)
\end{aligned}$$

若取状态反馈矩阵

$$\begin{aligned}
K = & -B_1^T (P_1^{-1} + B_1 B_1^T - \alpha^{-2} G_1 G_1^T - \\
& \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} (I + TA). \quad (44)
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
& A_c^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T)^{-1} A_c = \\
& M^T (P_1^{-1} - \alpha^{-2} G_1 G_1^T - \varepsilon D_1 D_1^T) M, \\
& V \leq -K^T K < 0, \quad (45)
\end{aligned}$$

因此式(44)或(39)确定的状态反馈,使得闭环不确定系统(37)稳定且有 $\|T_{\omega}(\gamma)\|_{\infty} \leq \alpha$. 证毕.

5 结论(Conclusion)

本文通过引入“Delta 算子系统二次稳定”与“Delta 算子系统二次可镇定”的概念,基于 Riccati 方程方法,提出了 Delta 算子不确定系统鲁棒二次

镇定的充要条件,并给出 Delta 算子系统的状态反馈鲁棒 H_{∞} 设计控制方法.在采样周期趋近于零时,得到连续系统的鲁棒镇定与 H_{∞} 控制的相关结果.进一步的工作将集中在 Delta 算子鲁棒控制与 H_{∞} 控制的线性矩阵不等式(LMI)方法研究.

参考文献(References)

- [1] Zhang Duanjin and Yang Chengwu. Delta operator theory for feedback control system—A survey [J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(2):153–160 (in Chinese)
- [2] Lee L H, Goodwin G C and Kolodziej W. Interconnections between continuous and discrete games with applications to H_{∞} [A]. Proc. of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control [C], Honolulu, Hawaii, USA, 1990, 2425–2430
- [3] Collins E G and Song T. A Delta operator approach to discrete-time H_{∞} control [J]. Int. J. Control, 1999, 72(4):315–320
- [4] Prou J E. A time domain approach to robust control of continuous time and Delta operator systems [D]. New York: City University of New York, 1993
- [5] Zhang Duanjin, Yang Chengwu and Wu Jie. Robust performance analysis of Delta operator systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(6):848–852 (in Chinese)
- [6] Middleton R H and Goodwin G C. Digital Control and Estimation: A Unified Approach [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990
- [7] Goodwin G C, Middleton R H and Poor H V. High-speed digital signal processing and control [J]. Proc. IEEE, 1992, 80(2):240–259
- [8] Xie L, Fu M and de Souza C E. H_{∞} control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1992, 37(8):1253–1256
- [9] De Souza C E, Fu M and Xie L. H_{∞} analysis and synthesis of discrete-time systems with time-varying uncertainty [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1993, 38(3):459–462
- [10] Barmish B R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system [J]. J. Opt. Theory Applications, 1985, 46(4):399–408
- [11] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. Systems & Control Letters, 1987, 8(5):351–357
- [12] Garcia G and Bernussou J. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, 40(1):184–190
- [13] Shor M H and Perkins W R. Reliable control in the presence of sensor/actuator failures: a unified discrete/continuous approach [A]. Proc. of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control [C], Brighton, UK, 1991, 1601–1606

本文作者简介

张端金 见本刊 2001 年第 2 期第 276 页

吴捷 1937 年生,华南理工大学教授,博士生导师.研究方向为自适应控制,电力系统优化与控制.

杨成福 见本刊 2001 年第 3 期第 468 页.