

估计 MA 参数的多维强 Gevers-Wouters 算法 及其在构造 ARMA 新息模型中的应用*

邓自立

(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨, 150080)

摘要: 提出了用多维 Gevers-Wouters(G-W)算法得到稳定的滑动平均(MA)过程的一个频域充分条件,并给出了在构造 ARMA 新息模型中的应用,给出了保证 ARMA 新息模型的 MA 多项式矩阵稳定的一个时域充分条件.仿真结果表明,多维 G-W 算法具有快速收敛的性质.

关键词: 多维滑动平均过程; 滑动平均参数估计; 谱分解; 稳定性; ARMA 新息模型

文献标识码: A

Multidimensional and Strong Gevers-Wouters Algorithm of Estimating Moving Average Parameters and Its Application to the Construction of ARMA Innovation Model

DENG Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University · Harbin, 150080, P. R. China)

Abstract: This paper presents a frequency-domain sufficient condition of obtaining the stable moving average (MA) process by using the multidimensional Gevers-Wouters algorithm, and gives an application to the construction of the autoregressive moving average (ARMA) innovation model, where a time-domain sufficient condition to guarantee its moving average polynomial matrix to be stable is given. The simulation results show that the multidimensional Gevers-Wouters algorithm has the fast convergence property.

Key words: multidimensional moving average process; MA parameter estimation; spectral factorization; stability; ARMA innovation model

1 引言(Introduction)

众所周知,对一个相关函数具有截尾性的平稳随机过程,由其相关函数构造一个等价的 MA 过程的问题等价于一个谱分解问题^[1]. Gevers 和 Wouters^[2]提出了构造 MA 过程的标量 G-W 算法,它可保证 MA 多项式的零点在单位圆外或在单位圆上.但许多理论和应用问题要求 MA 多项式的零点全在单位圆外,即要求 MA 多项式是稳定的,不允许它有在单位圆上的零点.另一方面,虽然文献[2]指出标量 G-W 算法对多维情形也成立,但并没有给出证明.事实上,在多维情形 MA 多项式矩阵的稳定性是用其行列式的零点全在单位圆外定义的,因而推广到多维情形并非显然,况且在多维情形 G-W 算法仍存在 MA 多项式矩阵不稳定问题.针对上述问题,本文提出了用多维 G-W 算法得到稳定的 MA 过程的一个频域上的充分条件,并将其应用于构造 AR-

MA 新息模型,给出了保证 ARMA 新息模型的 MA 多项式矩阵是稳定的一个时域上的充分条件.

2 多维强 G-W 算法(Multidimensional and strong Gevers-Wouters algorithm)

考虑多维平稳随机过程 $r(t) \in \mathbb{R}^m$, 设其相关函数 $R_r(j) = E[r(t)r^T(t-j)]$ 具有截尾性: $R_r(j) = 0 (j > n_d)$, 其中 E 为均值号, T 为转置号. 问题是已知 $R_r(j)$ 求 $r(t)$ 的一个等价的稳定的 MA 表达式

$$r(t) = D(q^{-1})\varepsilon(t), \quad (1)$$

它具有已给的相关函数 $R_r(j)$, 其中 $D(q^{-1})$ 是单位滞后算子 $q^{-1}(q^{-1}\varepsilon(t) = \varepsilon(t-1))$ 的多项式矩阵, 形如 $X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \cdots + X_{n_x}q^{-n_x}$, X_i 为系数阵, n_x 为阶次, $D_0 = I_m$, I_m 为 $m \times m$ 单位阵, 且 $D(q^{-1})$ 是稳定的, 即 $\det D(q)$ 的零点全位于单位圆外, $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^m$ 是零均值、方差阵为 $Q_\varepsilon > 0$ 的白噪声.

* 基金项目: 国家自然科学基金(69774019)资助项目.

收稿日期: 1999-10-14; 收修改稿日期: 2000-07-18.

定义 $r(t)$ 的谱阵为

$$S_r(q) = \sum_{j=-n_d}^{n_d} R_r(j) q^{-j}. \quad (2)$$

可证明^[3](1)式的谱阵为

$$S_r(q) = D(q^{-1}) Q_e D^T(q). \quad (3)$$

从谱分解观点,问题等价于已知谱阵 $S_r(q)$ 求满足(3)式的稳定的 $D(q^{-1})$ 和 Q_e ,这叫谱分解问题,下述加强的多维 G-W 算法成立:

定理 1 (多维强 G-W 算法) 若 $S_r(q)$ 在单位圆上处处非奇异,即 $S_r(e^{j\omega})$ 非异, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, 则用下述多维 G-W 算法

$$Q_e = \lim_{t \rightarrow \infty} R_{\pi}(t, t), \quad (4)$$

$$D_i = \lim_{t \rightarrow \infty} R_{\pi}(t, t-i) Q_e^{-1}, \quad (5)$$

$$R_{\pi}(t, t-i) = R_r(i) - \sum_{j=i+1}^{n_d} R_{\pi}(t, t-j) \cdot R_{\pi}^{-1}(t-j, t-j) R_{\pi}^T(t-i, t-j), \quad (6)$$

$$R_e(0,0) = R_r(0), \quad (7)$$

其中规定 $R_{\pi}(t, t) = R_e(t, t)$, $R_{\pi}(t, t-j) = 0 (t < j)$, $R_e^{-1}(t-j, t-j) = 0 (t < j)$, 可得到 MA 表达式(1),它具有已给的相关函数 $R_r(i)$, 且 $D(q^{-1})$ 是稳定的.

证 取初始时刻 $t_0 = 0$, 基于有限观测 $(r(t-1), \dots, r(0))$ 有 $r(t)$ 的一步最优预报器^[3]

$$\hat{r}(t | t-1) =$$

$$\sum_{i=1}^{n_d} R_{\pi}(t, t-i) R_e^{-1}(t-i, t-i) \varepsilon(t-i), \quad (8)$$

其中新息 $\varepsilon(t) = r(t) - \hat{r}(t | t-1)$, 协方差 $R_{\pi}(t, t-i)$ 和方差阵 $R_e(t-i, t-i)$ 由(6)和(7)定义. 于是有 $r(t)$ 的新息表达式

$$r(t) = \hat{r}(t | t-1) + \varepsilon(t), \quad (9)$$

它有已给的相关函数 $R_r(j)$ ^[3]. 由于 $t_0 = 0$ 是有限的, 则 $\hat{r}(t | t-1)$ 和 $\varepsilon(t)$ 都是非平稳的. 令 $t_0 \rightarrow -\infty$ 或 $t \rightarrow \infty$, 则 $\hat{r}(t | t-1)$ 和 $\varepsilon(t)$ 成为平稳时间序列, 且由(8)和(9)引出 $r(t)$ 的稳态新息表达式

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n_d} D_i \varepsilon(t-i) + \varepsilon(t) = D(q^{-1}) \varepsilon(t), \quad (10)$$

其中 D_i 和 Q_e 由(4)和(5)定义, 且 $r(t)$ 有相关函数 $R_r(j)$. 在(3)中置 $q = e^{j\omega}$ 并取行列式有

$$\det S_r(e^{j\omega}) = \det D(e^{j\omega}) \det Q_e \det D^T(e^{j\omega}). \quad (11)$$

因 $S_r(e^{j\omega})$ 非异, 则 $\det S_r(e^{j\omega}) \neq 0$, 于是由(11)引出

$\det D(e^{j\omega}) \neq 0$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, 且 $\det Q_e \neq 0$, 即 $\det D(q)$ 没有单位圆上的零点, 且 Q_e^{-1} 存在.

下面证明 $D(q^{-1})$ 是稳定的. 因(10)式是稳态新息表达式, 故它渐近地与初值选取无关. 任取两组初值 $(\varepsilon^{(i)}(0), \dots, \varepsilon^{(i)}(n_d-1))$, $i = 1, 2$, 由(10)式可得相应的两个新息序列 $\varepsilon^{(i)}(t) (i = 1, 2)$ 为

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(i)}(t) &= r(t) - D_1 \varepsilon^{(i)}(t-1) - \dots - \\ &\quad D_{n_d} \varepsilon^{(i)}(t-n_d), \quad t = n_d, n_d+1, \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

则有 $(\varepsilon(t) - \varepsilon^{(i)}(t)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, i = 1, 2$. 置 $\delta(t) = \varepsilon^{(1)}(t) - \varepsilon^{(2)}(t)$, 则有 $\delta(t) = [(\varepsilon^{(1)}(t) - \varepsilon(t)) + (\varepsilon(t) - \varepsilon^{(2)}(t))] \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, 又由(12)引出

$$D(q^{-1}) \delta(t) = 0. \quad (13)$$

上式两边左乘 $\text{adj} D(q^{-1})$ 有

$$\det D(q^{-1}) \delta(t) = 0. \quad (14)$$

由初值任意性和 $\delta(t) \rightarrow 0$ 引出^[1] $\det D(q)$ 的零点全位于单位圆外, 即 $D(q^{-1})$ 是稳定的. 证毕.

推论 1 若 $S_r(e^{j\omega}) > 0, -\pi \leq \omega \leq \pi$, 则上述强 G-W 算法成立.

3 应用 G-W 算法构造 ARMA 新息模型 (Application of G-W algorithm to the construction of ARMA innovation model)

考虑离散线性随机系统

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) y(t) &= \\ B(q^{-1}) w(t) + C(q^{-1}) v(t) + L(q^{-1}) \xi(t), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 是观测, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $v(t) \in \mathbb{R}^p$ 是带零均值的相关白噪声:

$$\begin{cases} E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(j) & v^T(j) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} \delta_{tj}, \\ \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} > 0, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\delta_{tt} = 1, \delta_{tj} = 0 (t \neq j)$, $A(q^{-1}), \dots, L(q^{-1})$ 为多项式矩阵, $A_0 = I_m, \xi(t) \in \mathbb{R}^m$ 为零均值、方差阵为 $Q_{\xi} > 0$ 的独立于 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的白噪声, 且 $(A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1}), L(q^{-1}))$ 左素. 置

$$r(t) = B(q^{-1}) w(t) + C(q^{-1}) v(t) + L(q^{-1}) \xi(t). \quad (17)$$

假设 $S_r(e^{j\omega})$ 非异, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, 由定理 1 用多维强 G-W 算法, 上述三个 MA 过程之和可用一个等价的稳定的 MA 过程表示为

$$\begin{aligned} D(q^{-1})\varepsilon(t) = \\ B(q^{-1})w(t) + C(q^{-1})v(t) + L(q^{-1})\xi(t). \end{aligned} \quad (18)$$

从而由(15)和(18)引出 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\varepsilon(t), \quad (19)$$

其中由 $D(q^{-1})$ 的稳定性和射影性质^[4]可证明 $\varepsilon(t)$ 是 $y(t)$ 的新息过程。

但频域条件 $S_r(e^{j\omega})$ 非异, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, 验证是不方便的, 因此下面给出相应的时域条件。

引理 1^[5] 若实系数多项式矩阵 $M(q^{-1})$ 左素, 则它必行满秩, 且对一切复数 α 有 $\text{rank} M(\alpha)$ 等于它的行秩。

引理 2^[6] 设 M 为复矩阵, 记其共轭转置为 $\bar{M}^T$, 则有 $\text{rank} M = \text{rank} \bar{M}^T M$ 。

定理 2 若 $(B(q^{-1}), C(q^{-1}), L(q^{-1}))$ 左素, 则用多维 G-W 算法所得 ARMA 新息模型(19)的 MA 多项式矩阵 $D(q^{-1})$ 是稳定的。

证 由(2)、(16)和(17)式可导出^[1,3]

$$\begin{aligned} S_r(e^{j\omega}) = B(e^{-j\omega})Q_w B^T(e^{j\omega}) + \\ C(e^{-j\omega})Q_v C^T(e^{j\omega}) + L(e^{-j\omega})Q_\xi L^T(e^{j\omega}) + \\ B(e^{-j\omega})S C^T(e^{j\omega}) + C(e^{-j\omega})S^T B^T(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (20)$$

定义复矩阵 M 和联合方差阵 Q 为

$$M = Q^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} B^T(e^{j\omega}) \\ C^T(e^{j\omega}) \\ L^T(e^{j\omega}) \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_w & S & 0 \\ S^T & Q_v & 0 \\ 0 & 0 & Q_\xi \end{bmatrix}. \quad (21)$$

则由(20)定义的 $S_r(e^{j\omega})$ 可表示为

$$S_r(e^{j\omega}) = \bar{M}^T M. \quad (22)$$

因 $(B(q^{-1}), C(q^{-1}), L(q^{-1}))$ 左素, 则由引理 1 引出它行满秩, 从而 M 列满秩, 即 $\text{rank} M = m$. 由引理 2 和(22)式有 $\text{rank} S_r(e^{j\omega}) = \text{rank} \bar{M}^T M = m$, 即 $S_r(e^{j\omega})$ 非异, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, 于是由定理 1 引出 $D(q^{-1})$ 是稳定的。证毕。

推论 2 若 $(B(q^{-1}), C(q^{-1}), L(q^{-1}))$ 的最大左因式的行列式无在单位圆上的零点, 则用多维 G-W 算法(4)~(7)所得 ARMA 新息模型(19)的 MA 多项式矩阵 $D(q^{-1})$ 是稳定的。

证 设 $(B(q^{-1}), C(q^{-1}), L(q^{-1}))$ 的最大左因式为 $G(q^{-1})$, 则有 $(B(q^{-1}), C(q^{-1}), L(q^{-1})) = G(q^{-1})[\bar{B}(q^{-1}), \bar{C}(q^{-1}), \bar{L}(q^{-1})]$, 其中 $(\bar{B}(q^{-1}), \bar{C}(q^{-1}), \bar{L}(q^{-1}))$ 左素, 这引出 $B(q^{-1}) = G(q^{-1})\bar{B}(q^{-1}), C(q^{-1}) = G(q^{-1})\bar{C}(q^{-1}), L(q^{-1}) = G(q^{-1})\bar{L}(q^{-1})$. 置

$$\bar{r}(t) = \bar{B}(q^{-1})w(t) + \bar{C}(q^{-1})v(t) + \bar{L}(q^{-1})\xi(t). \quad (23)$$

记 $\bar{r}(t)$ 的谱阵为 $S_{\bar{r}}(e^{j\omega})$, 因 $(\bar{B}(q^{-1}), \bar{C}(q^{-1}), \bar{L}(q^{-1}))$ 左素, 则由定理 2 的推导知 $S_{\bar{r}}(e^{j\omega})$ 非异, $-\pi \leq \omega \leq \pi$. 另一方面由(20)式可得

$$S_r(e^{j\omega}) = G(e^{-j\omega})S_{\bar{r}}(e^{j\omega})G^T(e^{j\omega}). \quad (24)$$

于是有

$$\det S_r(e^{j\omega}) = \det G(e^{-j\omega}) \det S_{\bar{r}}(e^{j\omega}) \det G^T(e^{j\omega}). \quad (25)$$

由假设 $G(q^{-1})$ 的行列式 $\det G(q^{-1})$ 无在单位圆上的零点, 即 $\det G(e^{-j\omega}) \neq 0, \det G(e^{j\omega}) \neq 0$, 又有 $\det S_{\bar{r}}(e^{j\omega}) \neq 0$, 故 $\det S_r(e^{j\omega}) \neq 0$, 即 $S_r(e^{j\omega})$ 非异, $-\pi \leq \omega \leq \pi$. 由定理 1 引出 $D(q^{-1})$ 是稳定的。证毕。

4 仿真例子 (Simulation example)

例 1 考虑双通道系统^[7]

$$A(q^{-1})s(t) = C(q^{-1})w(t), \quad (26)$$

$$y(t) = s(t) + v(t), \quad (27)$$

其中 $y(t)$ 为对信号 $s(t)$ 的观测过程, $w(t)$ 和 $v(t)$ 是零均值、方差阵各为 Q_w 和 Q_v 的独立白噪声, $A(q^{-1}) = I_2 + A_1 q^{-1}, C(q^{-1}) = C_1 q^{-1}$, 且 $Q_w = \text{diag}(0.01, 0.01), Q_v = \text{diag}(1, 1)$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.4 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad C_1 = -\begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

将(26)代入(27)有形如(15)的随机系统

$$A(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})w(t) + A(q^{-1})v(t). \quad (29)$$

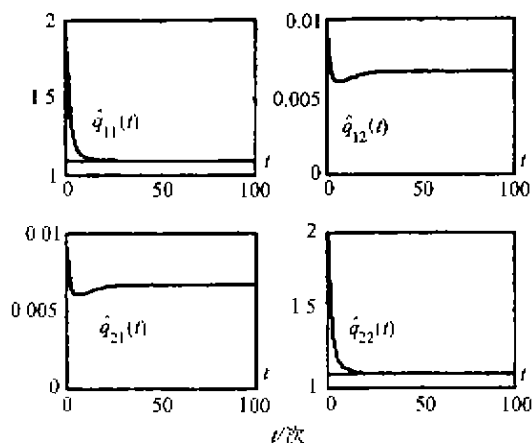
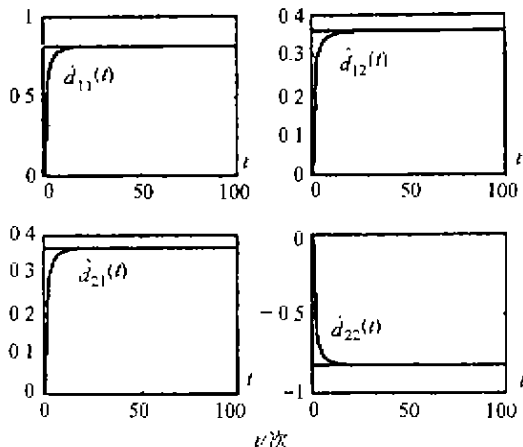
容易验证 $(A(q^{-1}), C(q^{-1}))$ 左素, 于是由定理 2 用多维 G-W 算法可得到 ARMA 新息模型(19), 其中 $D(q^{-1}) = I_2 + D_1 q^{-1}$ 是稳定的. 可得在 $t = 100$ 处的 MA 参数估值为

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.815722 & 0.35986 \\ 0.368508 & -0.82331 \end{bmatrix}, \\ \hat{Q}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.1003 & 0.0067 \\ 0.0067 & 1.0961 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

它与文献[7]用谱分解方法所得结果

$$\hat{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.816 & 0.365 \\ 0.368 & -0.821 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.09 \end{bmatrix} \quad (31)$$

是很相近的. 记迭代 i 次时的 MA 参数估值 $\hat{D}_1$ 和 $\hat{Q}_\varepsilon$ 的分量各为 $\hat{d}_{ij}(i)$ 和 $\hat{q}_{ij}(i)$, 用多维 G-W 算法 MA 参数估计收敛性见图 1 和图 2 所示, 可看到在 $t > 30$ 之后, MA 参数估值快速收敛于真实值。

图1 MA参数估值 $\hat{Q}_e$ 的收敛性Fig. 1 Convergence of MA parameter estimates $\hat{Q}_e$ 图2 MA参数估值 $\hat{D}_1$ 的收敛性Fig. 2 Convergence of MA Parameter estimates $\hat{D}_1$

5 结论 (Conclusions)

1) 本文提出和证明了用多维 G-W 算法所得 MA 多项式矩阵是稳定的频域充分条件和时域充分条件,克服了原多维 G-W 算法可能引起 MA 多项式矩阵不稳定的缺点。

2) 多维强 G-W 算法可用于构造 ARMA 新息模型,而 ARMA 新息模型是用现代时间序列分析方法解决最优滤波和状态估计问题的基本工具^[4],故该算法具有重要的理论和应用价值。

3) 多维强 G-W 算法也可看成是一种谱分解方法,因而成为用频域 Wiener 滤波方法(多项式方法)^[8]解决最优滤波和控制问题的一种有效工具。

4) 多维 G-W 算法简单,具有快速收敛特性,计算量小,精度高,便于实际应用。大量仿真例子表明,用多维 G-W 算法当迭代次数 t 满足 $50 \leq t \leq 100$ 时,通常可得到估值误差小于 10^{-3} 的满意精度。用 MATLAB 语言给出的 G-W 算法程序清单见文献[9]。

参考文献 (References)

- [1] Deng Z L, Zhang H S, Lin S J and Zhou L. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems [J]. Automatica, 1996, 32(2): 199-216
- [2] Gevers M and Wouters W R E. An innovation approach to the dis-

- crete-time realization problem [J]. Quarterly Journal on Automatic Control, 1978, 19(2): 90-109
- [3] Wouters W R E and Gevers M. An innovation approach to the discrete-time least squares estimation problem [J]. Quarterly Journal on Automatic Control, 1978, 19(1): 1-20
- [4] Deng Zili. Optimal Filtering Theory and Its Applications, Modern Time Series Analysis Method [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2000 (in Chinese)
- [5] Han Jingqing, He Guanyu and Xu Kekang. Basic Algebra in Linear System Theory [M]. Shenyang: Liaoning Science and Technique Press, 1985 (in Chinese)
- [6] Newmann M M and Roberts A P. Polynomial optimization of stochastic discrete-time control for unstable plants [J]. Int. J. Control, 1990, 51(6): 363-1380
- [7] Moir T J and Grimble M J. Optimal and self-tuning filtering, prediction and smoothing for discrete multivariable processes [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1984, 29(2): 128-137
- [8] Ahlen A and Stermad M. Wiener filter design using polynomial equations [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1991, 39(11): 2387-2399
- [9] Deng Zili and Qi Guoyuan. Gevers-Wouters algorithm for constructing ARMA innovation models [J]. Chinese Science Abstracts, 2000, 6(6): 727-729 (in Chinese)

本文作者简介

邓自立 1938年生,1962年毕业于黑龙江大学数学系,现为黑龙江大学应用数学研究所和自动化系教授,研究方向为最优滤波、状态估计,现代时间序列分析。