

具有 m 个开关系统的渐近稳定性*

刘玉忠 赵 军

(东北大学信息科学与工程学院·沈阳, 110006)

摘要: 研究了一类具有 m 个开关系统的渐近稳定性, 借助于多重 Lyapunov 函数, 给出了该系统全局渐近稳定的充分条件, 部分地改进了前人的结果.

关键词: 混杂系统; 开关系统; 渐近稳定性; Lyapunov 函数

文献标识码: A

Asymptotic Stability of m -Switched Systems

LIU Yuzhong and ZHAO Jun

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University · Shenyang, 110006, P. R. China)

Abstract: The m -switched systems has been studied and a condition of asymptotic stability is proposed for the systems by using multiple Lyapunov functions.

Key words: hybrid systems; switched systems; asymptotic stability; Lyapunov function

1 引言(Introduction)

考虑下面的开关系统

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), i \in M \triangleq \{1, 2, \dots, m\}, (1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$. 开关系统满足如下条件:

- i) 每个 f_i 是全局 Lipschitz 连续的;
- ii) 选取 i 使系统在有限时间内仅切换有限次.

这种开关系统是混杂系统的简单模型. 对于任意给定的初始时间 τ_0 及初始值 $x_0, x_0 = x(\tau_0)$, 定义开关序列:

$$s = x_0; (i_0, \tau_0), (i_1, \tau_1), (i_2, \tau_2), \dots, (i_k, \tau_k), \dots, (2)$$

其中 $i_k \in M, \tau_k$ 为单调递增的开关时间序列. (i_k, τ_k) 意味着当 $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$ 时, 系统的状态轨迹沿着 $\dot{x}(t) = f_{i_k}(x(t))$ 展开. 这样, 开关序列(2)和系统(1)完全描述了系统的轨迹.

关于这类开关系统, 国外已有一些研究^[1-5], Philippos Peleties^[6,7]利用 Lyapunov-like 函数, 研究了系统(1)当 $f_i(x) = A_i x$ 即线性自治系统的渐近稳定性(实际上, 文[6]只给出了渐近性的条件); Michael S. Branicky^[8,9]讨论了(1)的稳定性, 给出了系统稳定的充分条件. 本文设计了一种新的开关策略, 给出了系统(1)渐近稳定的充分条件, 改进了文[6,9]的

结果.

2 主要结果(Main result)

为叙述方便, 引入如下记号及定义:

$$S | i = \{\tau_{i0}, \tau_{i1}, \dots, \tau_{ij}, \dots\},$$

即与第 i 个子系统对应的开关时间序列.

$$T = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots,$$

$$I(T) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} (\tau_{2j}, \tau_{2j+1}).$$

定义 1 函数 $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ 称为待定的 Lyapunov 函数, 如果 $V(x)$ 是正定的, 径向无界的, 且有一阶连续的偏导数.

定义 2 给定 $\mathbb{R}$ 中严格增加的时间序列 T , 称函数 $V(x)$ 对向量场 f 及轨迹 $x(\cdot)$ 为 Lyapunov-like 函数, 如果存在正定函数 $W(x)$ 使

- i) $V'(x(t)) \leq -W(x), t \in I(T);$
- ii) $V(x(\tau_{2j+2})) \leq V(x(\tau_{2j+1})), j \in \mathbb{Z}^+.$

定理 1 假设 $V_i, i = 1, 2, \dots, m$ 是待定的 Lyapunov 函数, 向量场 $f_i(x)$, 满足 $f_i(0) = 0$. 若对每一个开关序列 S , 对所有 i, V_i 均是 f_i 和 $x(\cdot)$ 在 $S | i$ 上的 Lyapunov-like 函数, 则系统(1)是 Lyapunov 意义下渐近稳定的.

证 对任意的 $x_0, \tau_0, x_0 = x(\tau_0)$, 记:

$$x(t) = x(t, \tau_0, x_0).$$

* 基金项目: 国家自然科学基金(79970114), 教育部博士点基金(7014508), 国家留学回国人员基金资助项目.

收稿日期: 1999-03-02; 收修改稿日期: 2000-04-26.

稳定性.用归纳法. $\forall \varepsilon > 0$, 定义函数

$$M(r) = \min_{\|x\| \leq r} V_i(x).$$

当 $m = 1$ 时结论显然成立; 当 $m = 2$ 时, 取 δ_1, δ_2 使对 $\forall i = 1, 2$, 满足 $V_i(x)_{\|x\| < \delta_1} < M(\varepsilon)$, $V_i(x)_{\|x\| < \delta_2} < M(\delta_1)$. 于是, 任给 $\|x_0\| < \delta_2$, 当 $\tau_0 \leq t < \tau_1$ 时, 恒有 $V_i(x) \leq V_i(x_0) < M(\delta_1)$, 因此 $\|x(t)\| < \delta_1$, 进而, 当 $\tau_1 \leq t < \tau_2$ 时, 有 $V_i(x) \leq V_i(x(\tau_1)) < M(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$, 再由条件 ii) 可知, 对任意 $t \geq \tau_0$, 只要 $\|x_0\| < \delta_2$, 则有 $V_i(x(t)) < M(\varepsilon)$. 从而 $\|x(t)\| < \varepsilon$.

假设 $m = k$ 时成立, 则当 $m = k + 1$ 时, 取 δ_{k+1} 满足

$$V_i(x)_{\|x\| < \delta_{k+1}} < M(\delta_k), \quad i = 1, 2, \dots, k + 1.$$

于是, 任给 $\|x_0\| < \delta_{k+1}$, 当 $\tau_0 \leq t < \tau_1$ 时有 $\|x(t)\| < \delta_k$, 进而由归纳法可知 $\|x(t)\| < \varepsilon$, $\tau_1 \leq t < \tau_{k+1}$, 再由条件 ii) 知, $\|x(t)\| < \varepsilon$ 对所有 $t \geq \tau_0$ 成立.

渐近性. 由于 V_i 是 f_i 和 $x(\cdot)$ 在 $S \mid i$ 上的 Lyapunov-like 函数, 所以

$$V_i(x(t_{i,j+1})) \leq V_i(x(t_{i,j})), \quad (3)$$

因此序列 $\{V_i(x(t_{i,j}))\}$ 是单调递减且有下界的, 从而 $\lim_{j \rightarrow \infty} V_i(x(t_{i,j})) = L_i \geq 0$. 下证 $L_i = 0$. 选取 r_i, R_i 满足 $V_i(x)_{\|x\| \leq r_i} \leq L_i/2, W_i(x)_{\|x\| \geq r_i} \geq R_i$, 于是, 任给 $t \in I(S \mid i)$, 不妨设 $t \in [\tau_{i,j}, \tau_{i,j+1}]$ 有

$$V_i(x(t)) \geq V_i(x(\tau_{i,j+1})) \geq L_i. \quad (4)$$

由 r_i 的取法及上式知, 对任意的 $t \in I(S \mid i)$, 恒有 $\|x(t)\| \geq r_i$, 从而, 由定义 2 中条件 i), ii) 及 R_i 的取法知, 对任意的 $t \in I(S \mid i)$ 恒有

$$V_i(x(t_{i,j+1})) =$$

$$V_i(x(\tau_{i,j})) + \int_{\tau_{i,j}}^{\tau_{i,j+1}} V_i(x(t)) dt \leq$$

$$V_i(x(\tau_{i,j})) - \int_{\tau_{i,j}}^{\tau_{i,j+1}} W(x(t)) dt \leq$$

$$V_i(x(\tau_{i,j-1})) - R_i(\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j}) \leq$$

$$V_i(x(\tau_{i,j-3})) - R_i(\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j}) - R_i(\tau_{i,j-1} - \tau_{i,j-2}) \leq$$

$$V_i(x(\tau_{i,1})) - R_i \sum_{k=1}^j (\tau_{i,j+1} - \tau_{i,k}).$$

若取 $R = \min_{1 \leq i \leq m} R_i$, 则当 $\tau_0 \leq t \leq \tau_{i,j+1}$ 时, 对上式求和可得

$$\sum_{i=1}^m V_i(x(\tau_{i,j+1})) \leq \sum_{i=1}^m V_i(x(\tau_{i,1})) - R\tau_{i,j+1}.$$

由于 $\tau_{i,j+1} \rightarrow \infty, (j \rightarrow \infty)$, 从而由上式可得矛盾. 故有 $L_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$. 于是, 任给 $t \in I(S \mid i)$, 不妨设 $t \in [\tau_{i,j}, \tau_{i,j+1}]$, 有 $V_i(x(t)) \leq V_i(x(\tau_{i,j}))$, 故由 $\lim_{j \rightarrow \infty} V_i(x(\tau_{i,j})) = 0$ 可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} V_i(x(t)) = 0$, 从而 $x(t) \rightarrow 0$, 定理证毕.

注 本定理给出了系统(1)渐近稳定的充分条件, 而文[9]只考虑了系统的稳定性; 与文[6]的结果相比较, 定理的条件较易检验, 也不需要计算常数 ρ ; 而且在下面的仿真算例中可以看到, 当开关时间序列 τ_i 分别取为 0.3791, 0.6230, 0.8619 时, V_1, V_2 取值为 0.1212, 0.4533; 0.0676, 0.3112; 0.0374, 0.2084 时, 满足本定理的条件, 但 $V_2(0.8616) - V_1(0.6230) > 0$, 显然不满足文[6]中定理的条件.

3 仿真结果(Simulation results)

考虑系统

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, 2,$$

其中: $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 100 & -1 \end{pmatrix}$. 取 $Q = -I$, 分别得到相应的 Lyapunov 函数:

$$V_1 = 0.2752x_1^2 - 0.045x_1x_2 + 2.7478x_2^2,$$

$$V_2 = 2.7478x_1^2 + 0.045x_1x_2 + 0.2752x_2^2.$$

开关规则是当轨迹伸展到 $x_2 = x_1^2$ 时, 系统由 A_1 切换到 $A_{j,i} \neq j, i, j = 1, 2$. 取初值 $x_0 = (1, 0), t \in [0, 0.5]$, 仿真计算的绝对误差和相对误差取为 e^{-4} , 其结果如图 1 所示.

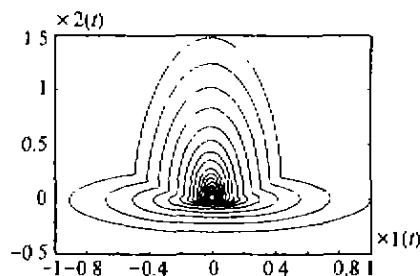


图 1 开关系统(1)的轨迹

Fig. 1 Trajectory of switched system

4 结论(Conclusion)

本文讨论了一类具有 m 个开关系统的渐近稳定性, 给出了相应的开关策略及保证系统渐近稳定的充分条件, 而且该条件易于检验. 最后对于 $m = 2$ 时的系统进行了仿真计算, 其结果验证了开关策略的正确有效性.

参考文献(References)

- [1] Loparo K A, Aslanis J T and Hajek O. Analysis of switched linear

- systems in the plane. Part 1: Local behavior of trajectories and local cycle geometry [J]. *J. of Opt. Theory and Appl.*, 1987, 52(3): 365 - 394
- [2] Loparo K A, Aslanis J T and Hajek O. Analysis of switched linear systems in the plane. Part 2: Global behavior of trajectories, controllability and attainability [J]. *J. of Opt. Theory and Appl.*, 1987, 52(3): 395 - 427
- [3] Wicks M A, Peleties P and DeCarlo R A. Constructions of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems [A]. *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control [C]*, Lake Buena Vista, FL, 1994, 3492 - 3497
- [4] Branicky M S. Analyzing continuous switching systems: theory and examples [A]. In *Proc. American Control Conf. [C]*, Baltimore, MD, 1994, 3110 - 3114
- [5] Malinborg J, Bernhardsson B and Astrom K J. A stabilizing switching scheme for multi-controller systems [A]. In *Proc. IFAC World Congress [C]*, San Francisco, CA, 1996
- [6] Peleties P and DeCarlo R A. Asymptotic stability of m -switched systems using Lyapunov-like functions [A]. In *Proc. American Control Conf. [C]*, Boston, MA, 1991, 1679 - 1684
- [7] Peleties P and DeCarlo R A. Asymptotic stability of m -switched systems using Lyapunov functions [A]. *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control [C]*, Tucson, Arizona, 1992, 3438 - 3439
- [8] Branicky M S. Stability of switched and hybrid systems [A]. *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control [C]*, Lake Buena Vista, FL, 1994, 3498 - 3503
- [9] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 - 482

本文作者简介

刘玉忠 1963 年生, 东北大学信息科学与工程学院博士生, 1985 年和 1988 年分别获山东大学数学系学士和硕士学位, 研究方向为非线性与混杂控制系统, 开关系统。

赵 军 1957 年生, 东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 1991 年毕业于东北大学信息科学与工程学院, 获博士学位, 1998 年至 1999 年作为高级访问学者赴美国 Illinois 大学 (Urbana-champaign) 研修, 现为中国自动化学会控制理论委员会委员, 主要研究方向为混杂控制系统, 复杂非线性系统结构研究。

(上接第 744 页)

- [9] Fang Yangwang and Han Chongzhao. Study on stability of closed-loop nonlinear control system based on nonlinear transfer function [J]. *Control and Decision*, 1999, 14(3): 199 - 205 (in Chinese)
- [10] Fang Yangwang and Han Chongzhao. Study on stability of nonlinear closed-loop control systems based on generalized frequency response function matrices [J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(6): 916 - 920

本文作者简介

方洋旺 见本刊 2001 年第 4 期第 604 页。

熊李成 1959 年生, 西安电子科技大学教授, 博士生导师, 研究生院常务副院长, 研究兴趣为: 非线性信号处理及智能信号处理, 无线通信等。

党映农 1971 年生, 1997 年在西安交通大学获工学硕士学位, 现为西安交通大学电子与信息工程学院博士研究生, 主要从事非线性系统控制方面的研究。

韩崇昭 见本刊 2001 年第 4 期第 604 页。