

具有不确定噪声的连续时间广义系统确保估计性能的 鲁棒 Kalman 滤波器

奚宏生 殷保群

(中国科学技术大学自动化系·合肥, 230026)

摘要: 讨论了一类具有不确定噪声的连续时间广义随机控制系统的鲁棒 Kalman 滤波器的设计问题. 文中给出了确保估计误差性能指标的不确定噪声协方差矩阵扰动上界. 文章研究结果表明, 在此界限内采用最坏情况下的最优滤波器实现对状态的估计, 它不仅能极小化不确定下的最坏性能, 而且也能确保估计误差性能指标达到给定的某个自由度.

关键词: 广义随机控制系统; 不确定噪声; 扰动上界; 极小极大鲁棒滤波器

文献标识码: A

Robust Kalman Filter of the Guaranteed Estimation Performance for a Continuous-Time Descriptor System with Uncertain Noise

XI Hongsheng and YIN Baoqun

(Department of Automation, University of Science and Technology of China · Hefei, 230026, P. R. China)

Abstract: This paper considers the design method of a robust Kalman filter for continuous-time descriptor stochastic control systems with uncertain noise. The perturbing upper bounds on uncertain noise covariances are obtained so as to guarantee the performance index of estimation error. In particular, it is shown that the optimum estimator designed in the perturbing upper bounds can be used to minimize the worst performance in an uncertain case and guarantee that the deviation of the performance index of estimation error remains within a given free degree.

Key words: descriptor stochastic control systems; uncertain noise; perturbing upper bound; minimax robust filter

1 问题的描述(Problem description)

众所周知, Kalman 滤波器设计原理的主要假设条件之一是系统噪声的统计特性是已知的, 然而在许多实际问题中存在多种不确定因素, 它们往往集中反映在系统模型参数和噪声统计特性的不确定. 文献[1~3]针对随机系统在已知不确定噪声协方差矩阵扰动上界的条件下, 利用对策论给出了极小极大鲁棒 Kalman 滤波器的设计方法. 这些结果表明噪声协方差矩阵的扰动会导致状态估计性能指标偏离理想值. 如何确保估计性能的鲁棒性仍是目前控制界十分关注的问题. 本文以一类具有不确定噪声的连续时间广义控制系统为研究对象, 从鲁棒估计的基本观点出发去探讨这一问题的解决途径.

设具有不确定噪声的连续时间随机广义控制系统为

$$\begin{cases} M\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + w^0(t), \\ y(t) = C_0x(t) + v^0(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $w^0(t)$ 和 $v^0(t)$ 是白噪声过程, 并具有性质:

$$\begin{aligned} E\{w^0(t)\} &= E\{v^0(t)\} = 0, \quad E\{w^0(t)v^{0r}(s)\} = 0, \\ \text{cov}\{w^0(t), w^0(s)\} &= W^0\delta(t-s) = (W + \Delta W)\delta(t-s), \\ \text{cov}\{v^0(t), v^0(s)\} &= V^0\delta(t-s) = (V + \Delta V)\delta(t-s), \\ W &\geq 0, \Delta W \geq 0; \quad V \geq 0, \Delta V \geq 0. \end{aligned}$$

其中 $\Delta W = \sum_{i=1}^p \epsilon_i W_i$, $\Delta V = \sum_{j=1}^q e_j V_j$, ϵ_i 和 e_j 是不确定非负参数, V_j 和 W_j 是已知的半正定矩阵. 假设

- 1) $\text{rank } M = n_1 < n$, $\det(\lambda M - A_0)$ 不恒为零;
- 2) $E\{x(0)\} = \bar{x}_0$, $E\{x(0)w^{0r}(t)\} = 0$, $E\{x(0)v^{0r}(s)\} = 0$, $\text{cov}\{x(0), x(0)\} = \bar{P}_0 \geq 0$.

在假设 1) 下, 存在非奇异矩阵 T_1 和 T_2 , 使得

$$T_2 M T_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 A T_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$T_2 B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix},$$

$$CT_1 = [C_1 \ C_2], x(t) = T_1 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

并且当 $\det A_{22} \neq 0$ 时, 系统(1)能够被变换为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu(t) + \Gamma w^0(t), \\ x_2(t) = Hx_1(t) + Gu(t) + \Lambda w^0(t), \\ y(t) = Cx_1(t) + Du(t) + \bar{v}^0(t). \end{cases} \quad (2)$$

$$\bar{v}^0(t) = v^0(t) - Fw^0(t), F = C_2 A_{22}^{-1} \Gamma_2.$$

$\bar{v}^0(t)$ 是一个复合噪声, 并满足

$$E\{\bar{v}^0(t)\} = 0, \text{cov}\{w^0(t), \bar{v}^0(s)\} = -W^0 F^T \delta(t-s),$$

$$\text{cov}\{\bar{v}^0(t), \bar{v}^0(s)\} = S^0 \delta(t-s),$$

$$S^0 = (FW^0 F^T + V^0).$$

定理 1.1 当 $\Delta W = 0, \Delta V = 0$ 时, 若系统(1)的等价变换形式(2)满足 (A, W_1^1) 是能稳定的, (A, C) 是能检测的, 则存在一个稳定滤波器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t) + K[y(t) - \\ C\hat{x}_1(t) - Du(t)], \\ \hat{x}_2(t) = H\hat{x}_1(t) + Gu(t), \\ K = (P_1 C^T - \Gamma W F^T) S^{-1}. \end{cases} \quad (3)$$

其中, $P_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t)$, $P_1(t) = E\{\hat{x}_1(t) \hat{x}_1^T(t)\}$, $\hat{x}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$, P_1 是下述代数 Riccati 方程的唯一解:

$$\begin{aligned} (A - KC)P_1 + P_1(A - KC)^T + \\ (KF + \Gamma)W(KF + \Gamma)^T + KVK^T = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

若记

$$P(t) = E\{\hat{x}(t) \hat{x}^T(t)\} = T_1 \begin{bmatrix} P_1(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}^T(t) & P_2(t) \end{bmatrix} T_1^T,$$

$$P(0) = \bar{P}_0, \quad P_{12}(t) = P_1(t)H^T,$$

$$P_2(t) = HP_1(t)H^T + \Lambda W \Lambda^T,$$

则在定理 1.1 下, 估计误差方差阵 $P(t)$ 收敛到 $P =$

$$\Phi \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \Phi^T, \text{ 其中 } \Phi = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ H & \Lambda \end{bmatrix}.$$

如果 $\Delta W \neq 0, \Delta V \neq 0$, 记 $\hat{x}_1^0(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$, $P_1^0(t) = E\{\hat{x}_1^0(t) \hat{x}_1^{0T}(t)\}$, 则系统(2)的估计

$$\text{误差方差阵为 } P^0(t) = \Phi \begin{bmatrix} P_1^0(t) & 0 \\ 0 & W^0 \end{bmatrix} \Phi^T.$$

定理 1.2 在定理 1.1 的条件下, 如 $P_1(t)$ 收敛到 P_1 , 则 $P_1^0(t)$ 也收敛到某定常矩阵 P_1^0 , 而且 P_1^0 满足对应于 (W^0, V^0) 的代数 Riccati 方程(4), 从而

$$P^0(t) \text{ 也收敛到 } P^0 = \Phi \begin{bmatrix} P_1^0 & 0 \\ 0 & W^0 \end{bmatrix} \Phi^T.$$

定理 1.1 和定理 1.2 的证明参见文献[3].

我们定义 Kalman 滤波器的估计性能指标为 $J = \text{tr}[P]$, 那么由噪声的协方差矩阵扰动引起的偏离度为

$$\begin{aligned} \Delta J(K, \Delta W, \Delta V) = \\ \text{tr}[P_0] - \text{tr}[P] = \text{tr}[\Delta P], \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\Delta P = P^0 - P = \Phi \begin{bmatrix} \Delta P_1 & 0 \\ 0 & \Delta W \end{bmatrix} \Phi^T$, $\Delta P_1 = P_1^0 - P_1$, ΔP_1 显然满足下述代数 Riccati 方程

$$(A - KC)\Delta P_1 + \Delta P_1(A - KC)^T +$$

$$(KF + \Gamma)\Delta W(KF + \Gamma)^T + K\Delta V K^T = 0.$$

它的形式解为

$$\begin{aligned} \Delta P_1 = \int_0^{+\infty} e^{(A-KC)t} [(KF + \Gamma)\Delta W(KF + \Gamma)^T + \\ K\Delta V K^T] e^{(A-KC)^T t} dt. \end{aligned}$$

2 确保估计性能的鲁棒测度 (Guaranteed estimation performance robustness measure)

引理 2.1 设 $T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$, $T_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$,

$T_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $T_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $T_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $n = n_1 + n_2$, 则

$$\Delta J(K, \Delta W, \Delta V) = \text{tr}[\Delta P_1 X] + \text{tr}[\Delta W Y],$$

其中 X 和 Y 是半正定矩阵, 可被分别表示为

$$X = T_{11}^T T_{11} + T_{21}^T T_{21} + H^T T_{12}^T T_{11} + T_{11}^T T_{12} H +$$

$$H^T T_{22}^T T_{21} + T_{21}^T T_{22} H + H^T T_{12}^T T_{12} H + H^T T_{22}^T T_{22} H,$$

$$Y = \Lambda^T T_{12}^T T_{12} \Lambda + \Lambda^T T_{22}^T T_{22} \Lambda.$$

设 $\Omega = \{(\Delta W, \Delta V): 0 \leq \Delta W \leq \Delta W^m; 0 \leq \Delta V$

$\leq \Delta V^m\}$, $\Delta W^m = \sum_{i=1}^p \epsilon_i^m W_i$, $\Delta V^m = \sum_{j=1}^q \epsilon_j^m V_j$. 显然 Ω 是一紧致凸集, 并且对固定的 K , $\Delta J(K, \Delta W, \Delta V)$ 是定义在 Ω 上的一线性映射. ΔJ 具有下述性质:

性质 1 对 $(\Delta W_i, \Delta V_i) \in \Omega, i = 1, 2$, 如果 $\Delta W_1 \geq \Delta W_2, \Delta V_1 \geq \Delta V_2$, 则

$$\Delta J(K, \Delta W_1, \Delta V_1) \geq \Delta J(K, \Delta W_2, \Delta V_2).$$

性质 2 对 $(\Delta W_i, \Delta V_i) \in \Omega, i = 1, 2, \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$, 若 $\Delta W = \alpha \Delta W_1 + (1 - \alpha) \Delta W_2, \Delta V = \alpha \Delta V_1 + (1 - \alpha) \Delta V_2$ 则

$$\Delta J(K, \Delta W, \Delta V) \leq$$

$$\max\{\Delta J(K, \Delta W_1, \Delta V_1), \Delta J(K, \Delta W_2, \Delta V_2)\}.$$

应用性质 1, 2 和有界闭凸集上的极值原理, 直

接能获得

定理 2.1 对固定的 K , 设 $r = \max_{(\Delta W, \Delta V) \in \Omega} \Delta J(K, \Delta W, \Delta V)$, 则 r 必定被 Ω 中矩阵对 $(\Delta W^m, \Delta V^m)$ 达到, 即 $r = \Delta J(K, \Delta W^m, \Delta V^m)$.

我们将 $\Delta W = \sum_{i=1}^p \epsilon_i W_i$, $\Delta V = \sum_{j=1}^q \epsilon_j V_j$ 代入(6), 得到 $\Delta P_1 = \sum_{i=1}^p \epsilon_i Z_i + \sum_{j=1}^q \epsilon_j U_j$. 其中 Z_i 和 U_j 分别满足下述代数 Riccati 方程

$$\begin{aligned} (A - KC)Z_i + Z_i(A - KC)^T + \\ (KF + \Gamma)W_i(KF + \Gamma)^T = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \\ (A - KC)U_j + U_j(A - KC)^T + \\ KV_jK^T = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

此时, 估计误差偏离度(5)能被表示为

$$\begin{aligned} \Delta J(K, \Delta W, \Delta V) = \\ \sum_{i=1}^p \epsilon_i \{ \text{tr}[Z_i X] + \text{tr}[W_i Y] \} + \sum_{j=1}^q \epsilon_j \text{tr}[U_j X] = \\ \sum_{i=1}^p \epsilon_i a_i + \sum_{j=1}^q \epsilon_j b_j, \\ a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad b_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

由定理 2.1, $r = \sum_{i=1}^p \epsilon_i^m a_i + \sum_{j=1}^q \epsilon_j^m b_j$, 定义:

$$\Omega(\epsilon^m, e^m) = \{(\Delta W, \Delta V): 0 \leq \Delta W \leq \sum_{i=1}^p \epsilon_i^m W_i;$$

$$0 \leq \Delta V \leq \sum_{j=1}^q \epsilon_j^m V_j\}$$

是约束在 $p+q$ 维超平面 $H^{p+q}: \sum_{i=1}^p \epsilon_i^m a_i + \sum_{j=1}^q \epsilon_j^m b_j = r$ 上的一非空有界闭凸集类. 我们的目的是要在集类 $\Omega(\epsilon^m, e^m)$ 中寻找一个使矩阵对 $(\Delta W, \Delta V)$ 自由扰动范围达到最大的集. 它拓扑等价于在空间 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中, 求解:

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^p \epsilon_i^m a_i + \sum_{j=1}^q \epsilon_j^m b_j = r,$$

$$\max \{ \epsilon_1^m \cdot \epsilon_2^m \cdots \epsilon_p^m \cdot \epsilon_1^m \cdot \epsilon_2^m \cdots \epsilon_q^m \},$$

$$\epsilon_i^m > 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad \epsilon_j^m > 0, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

利用 Lagrange 乘子法, 问题具有唯一最大值点

$$\epsilon_i^* = \frac{r}{(p+q)a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (7)$$

$$\epsilon_j^* = \frac{r}{(p+q)b_j}, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (8)$$

定理 2.2 在假设(1)、(2)和定理 1.2 的条件下, 若采用稳态 Kalman 滤波增益(3), 则对任意给定的实数 $r > 0$, 存在一个不确定噪声协方差矩阵的

最大扰动上界

$$\Omega^* = \{(\Delta W, \Delta V): 0 \leq \Delta W \leq \sum_{i=1}^p \epsilon_i^* W_i,$$

$$0 \leq \Delta V \leq \sum_{j=1}^q \epsilon_j^* V_j\},$$

其中 ϵ_i^* 和 ϵ_j^* 分别是(7)和(8), 且使得对任意 $(\Delta W, \Delta V) \in \Omega^*$ 估计误差偏离度 $\Delta J(K, \Delta W, \Delta V) \leq r$ 恒成立.

3 确保估计性能的鲁棒滤波器 (Guaranteed performance robust filter)

设最坏情况噪声协方差矩阵 $(W^*, V^*) = (W + \Delta W^*, V + \Delta V^*)$, 由定理 1.2, 系统(2)对应的最坏情况下的最优滤波器的增益

$$K^* = (P_1^* C^T - \Gamma W^* F^T) S^{*-1}. \quad (9)$$

其中 P_1^* 满足对应于 K^*, W^*, V^* 的代数 Riccati 方程(4).

由 Kalman 滤波器原理及性质 1, 易获得

$$\begin{aligned} \Delta J(K^*, \Delta W, \Delta V) \leq J(K^*, \Delta W^*, \Delta V^*) \leq \\ \Delta J(K, \Delta W^*, \Delta V^*). \end{aligned} \quad (10)$$

由对策论基本原理, 存在鞍点 $(K^*, \Delta W^*, \Delta V^*)$ 满足不等式(10)的充分必要条件是

$$\begin{aligned} \min_K \max_{(\Delta W, \Delta V) \in \Omega^*} \Delta J(K, \Delta W, \Delta V) = \\ \max_{(\Delta W, \Delta V) \in \Omega^*} \min_K \Delta J(K, \Delta W, \Delta V). \end{aligned}$$

这意味着最坏情况噪声下的 Kalman 滤波器也是极小极大鲁棒 Kalman 滤波器, 上述结果可归结为如下定理.

定理 3.1 在定理 2.2 的条件下, 系统(2)的确保估计性能的鲁棒 Kalman 滤波器的增益为(9), 并且对任意给定的 $r > 0$ 及 $(\Delta W, \Delta V) \in \Omega^*$, 估计误差性能指标的偏离度被确保满足

$$\Delta J(K^*, \Delta W^*, \Delta V^*) \leq \Delta J(K, \Delta W^*, \Delta V^*) = r.$$

其中 K 是(3).

特别, 当 $\det A_{22} = 0$ 时, 广义控制系统(1)含有脉冲模, 我们采用文献[5]中的极点配置方法来消除系统的脉冲模.

定理 3.2 假设广义系统(1)是强能控的, 并且 $\text{rank}[A_{22} \ B] = n_2$, 则存在一个矩阵 Φ , 使得 $\det(A_{22} + B_2 \Phi) \neq 0$.

在定理 3.2 的条件下, 采用状态反馈控制律 $u(t) = \Phi x_2(t)$, 我们能得到反馈控制系统

$$\dot{x}_1(t) = A_{11} x_1(t) + \hat{A}_{12} x_2(t) + B_1 u(t) + \Gamma_1 w^0(t),$$

(下转第 791 页)

控制的迭代学习控制器取得了很好的控制效果,从而说明了此控制器对于随机扰动具有很强的抗干扰能力。

5 结论(Conclusion)

本文针对具有不确定项或干扰项的重复非线性时变系统,提出了基于反馈控制的迭代学习控制器,其中迭代学习控制器设计为高阶 PD 型,它以前馈的形式作用于对象。在满足一定的收敛性条件下,证明了该控制器的跟踪误差界是系统初始误差界和系统输出干扰项界的线性函数。通过引入反馈控制,增强了系统的抗干扰性能,提高了系统的鲁棒性,从而保证每次学习时都能补偿跟踪误差,而且改变反馈增益可以调整系统的最终跟踪误差界。因此本文所述的方法比单纯的迭代学习控制具有更实际的应用性。

参考文献(References)

- [1] Arimoto S, Kawamura S and Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning [J]. J. Robotics Systems, 1984, 1(2): 123 - 140

- [2] Hauser J E. Learning control for a class of nonlinear systems [A]. Proc. 26th IEEE Conf. Dec. and Control [C], Los Angeles, CA, 1987, 859 - 860
- [3] Heinzinger G, Fenwick D, Paden B and Miyazaki F. Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1992, 37(1): 110 - 114
- [4] Jang T J, Choi C H and Ahn H S. Iterative learning control in feedback systems [J]. Automatica, 1995, 31(2): 243 - 248
- [5] Bien Z and Huh K M. High-order iterative learning control algorithm [J]. IEE Proc. Pt. -D, 1989, 136(3): 105 - 112
- [6] Chen Y Q, Wen C Y and Sun M X. A robust high-order P-type iterative learning controller using current iteration tracking error [J]. Int. J. of Control, 1997, 68(2): 331 - 342

本文作者简介

虞忠伟 1973 年生, 1999 年于同济大学电气工程系获硕士学位, 现为同济大学信息与控制工程系博士生, 主要研究方向为机器人控制与智能控制, 学习控制, 变增益鲁棒控制。

陈辉堂 1933 年生, 1953 年毕业于上海交通大学, 1956 年研究生毕业于上海交通大学工业企业电气化专业, 现为同济大学信息与控制工程系教授, 博士生导师, 研究方向为机器人控制与智能控制。

王月娟 1935 年生, 1958 年毕业于西安交通大学电机系, 现为同济大学信息与控制工程系教授, 博士生导师, 研究方向为机器人控制与智能控制。

(上接第 784 页)

$$0 = A_{21}x_1(t) + \hat{A}_{22}x_2(t) + B_1\mu(t) + \Gamma_2w^0(t),$$

其中 $\mu(t) = \Phi(x_2(t) - x_2(t))$, $\hat{A}_{22} = A_{22} + B_2\Phi$, $\hat{A}_{12} = A_{12} + B_2\Phi$, 类似于系统(2), 等价于

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \hat{A}x_1(t) + \hat{B}\mu(t) + \hat{\Gamma}w^0(t), \\ x_2(t) = \hat{H}x_1(t) + \hat{G}\mu(t) + \hat{A}w^0(t), \\ y(t) = \hat{C}x_1(t) + \hat{D}\mu(t) + \hat{\theta}^0(t), \end{cases} \quad (11)$$

如果系统(11)满足 $(\hat{A}, W_2^1)$ 是能稳定的, $(\hat{A}, \hat{C})$ 是能检测的, 我们能直接得到平行于定理 2.2 和 3.1 的相同结果。

参考文献(References)

- [1] Luo J S and Johnson A. Stability robustness of the discrete-time LQG systems under plant perturbation and noise uncertainty [J]. Int. J. Control, 1992, 55(6): 1491 - 1502

- [2] Sangsukam S and Bullock T E. Analysis of continuous-time Kalman filtering under incorrect noise covariances [J]. Automatica, 1988, 24(5): 659 - 669
- [3] Xi H S. Robust state estimation for a continuous-time singular linear system with uncertain noise [J]. Information and Control, 1994, 23(6): 326 - 331 (in Chinese)
- [4] Xi H S. Discrete-time robust Kalman filter of the guaranteed state estimation performance [J]. Acta Automatica Sinica, 1996, 22(4): 731 - 735 (in Chinese)
- [5] Wang Y Y, Jin Z J and Zhang Z J. Feedback control and pole placement in generalized systems [J]. Acta Automatica Sinica, 1988, 14(4): 285 - 288 (in Chinese)

本文作者简介

冀宏生 1950 年生, 1977 年毕业于中国科学技术大学数学系, 现为中国科学技术大学自动化系副主任, 教授, 博士生导师, 长期从事鲁棒控制, 离散事件动态系统及其应用等方面的研究。

殷保群 1962 年生, 1985 年毕业于四川大学数学系, 现为中国科学技术大学自动化系副教授, 博士, 从事非线性系统展开理论, 离散事件动态系统性能分析, 优化及在通讯网络中应用等方面的研究。