

Poincare 映射的数值算法及其在永磁同步电机混沌分析中的应用*

张 波

(华南理工大学电力学院·广州, 510640)

李 忠 毛宗源

庞敏熙

(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640) (香港大学电气电子工程系·香港)

摘要: 给出了 Poincare 映射的一个数值算法, 并在提出的永磁同步电机(PMSM)混沌模型的基础上, 应用 Poincare 映射分析了 PMSM 的混沌现象. 仿真结果表明 Poincare 映射可以更直观地反映其相应的状态空间图形, 而从一个新的角度证实了 PMSM 的混沌运动的存在性.

关键词: Poincare 映射; 永磁同步电机(PMSM); 混沌

文献标识码: A

The Numerical Algorithm of Poincare Map and Its Application to the Analysis of the Chaotic Phenomenon in Permanent-Magnet Synchronous Motors

ZHANG Bo

(Electric Power College, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P. R. China)

LI Zhong and MAO Zongyuan

(Department of Automation, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P. R. China)

M. H. Pong

(Department of Electrical & Electronic Engineering, the University of Hong Kong · Hong Kong)

Abstract: A numerical algorithm to calculate Poincare map is developed in this paper, and based on the developed mathematical model of permanent-magnet synchronous motor, the chaotic phenomenon of PMSM is analyzed by means of Poincare map. From the simulations, the Poincare map of PMSM can concisely exhibit its behavior. Thereafter, the existence of chaos in PMSM is proved in a new horizon.

Key words: Poincare map; permanent-magnet synchronous motors; chaos

1 引言(Introduction)

在[1]中, 我们推导了永磁同步电机(PMSM)的混沌模型, 并基于 Hopf 分岔的参数调节方法使其呈现出混沌行为, 同时给出了仿真结果. 但这只是提出了一种分析方法, 并非是完全可靠的, 它可能是由系统的误差产生的, 还难于从理论上严格地证明其混沌的存在性. 本文则从另一个角度用一种新的方法, 即用 Poincare 映射的方法来研究 PMSM 的混沌现象, 从而为分析连续非线性微分方程提供了一个新的分析工具.

Poincare 映射是一个经典的分析动力系统的技术, 它是用 $(n-1)$ 阶的离散系统替换 n 阶连续系

统的流, 它的定义保证了它的极限集是对应于相应流的极限集, 它的作用在于降低的系统的阶并且成为联接连续系统和离散系统的桥梁[2].

利用 Poincare 映射研究常微分方程有如下几个优点: 首先, 可以降低系统的阶, Poincare 映射的构造可以消除至少一个变量, 从而简化为研究较低阶的问题; 其次, 可研究全局动力学问题, 并在低维的问题中, 数字计算的 Poincare 映射给出了系统的全局动力学的深入的、明显的展示[3]; 最后是概念更清楚, 许多用常微分方程描述得含混不清的概念如果用 Poincare 映射来描述就会变得非常简洁、清晰[4].

然而对于任意一个常微分方程还没有一个一般

* 基金项目: 国家自然科学基金(59777008)和广东省自然科学基金(980579)资助项目.
收稿日期: 1999-11-15; 收修改稿日期: 2000-08-09.

的方法来构造相应的 Poincare 映射,因为 Poincare 映射的构造需要对常微分方程的相空间的几何结构有一个事前的了解.因此,构造一个 Poincare 映射需要针对具体的问题采用具体的方法并需要一定的技巧.

本文试图给出 Poincare 映射的一个较为一般的数值算法,并应用于永磁同步电机(PMSM)的混沌模型的分析,它将一个 3 维的系统转化到一个 2 维的平面上进行研究,通过与[1]中所给的状态空间仿真图形比较,Poincare 映射更加直观、简捷和清晰地反映了 PMSM 的运行状态,从而从一个新的角度证实了 PMSM 混沌的存在性.

2 Poincare 映射的数值算法(The numerical algorithm of Poincare map)

Poincare 映射对于自治和非自治系统有着不同的定义,下面仅就自治系统给出 Poincare 映射的定义[2];

考虑一具有极限环 Γ 的 n 阶自治系统, x^* 为极限环上的一点, Σ 为在 x^* 点与 Γ 横截相交的 $(n-1)$ 维超平面.如 T 为极限环的最小周期,那么从 x^* 出发的轨道经过 T 时间后会回到 Σ 上的 x^* 点.由于流形 ϕ_t 关于初始条件的连续性,从 Σ 上的 x^* 的充分小的邻域内出发的轨道将在大约 T 的时间回到 Σ 上 x^* 的邻域内.这样, ϕ_t 和 Σ 就定义了 x^* 的一个邻域 $U \subset \Sigma$ 到 x^* 的另一个邻域 $V \subset \Sigma$ 的映射 P , P 就是自治系统的 Poincare 映射.

从上面的定义可以看出: P 是一个局部定义,即它是定义在不动点 x^* 的一个邻域内,因而不能保证从 Σ 上任意一点出发的轨道经过一段时间后还将穿过 Σ ;在欧氏空间中, $P(x)$ 并非流形 $\phi_t(x)$ 第一次穿过 Σ 的交叉点, $P(x)$ 在回到起始点邻域内时至少已穿过 Σ 一次,亦即时要沿着同一个方向穿过 Σ ;另外, P 是一个微分同胚,即它是可逆的和可微的.

Poincare 映射的这个定义仅是动力系统理论中的一个标准定义,但由于要先知道极限环的位置而很少用于仿真和实验中,且并不是这样定义的每一个映射都是良定义的,因为对 $t > 0$, $\phi_t(x)$ 可能永远都不与 Σ 相交;但是对于欧氏空间中的系统,如果它是不趋向于平衡点的有界运动,那么总可以通过适当选择 Σ 使得 Poincare 映射的定义是良定义的;因而选取 Σ 是求 Poincare 映射的关键.

Poincare 映射的数值算法可描述如下:

1) 选择超平面 Σ .

假定欧氏空间中的系统具有不趋向于平衡点的有界运动,则可先确定一适当的点 x_Σ ,再选择法向量为 $h = f(x_\Sigma)$,这样就可以确定一超平面 Σ ;但是选择这样一个平面需要对微分方程的相空间的几何结构有一定的了解,可用试错的方法选取 Σ ,并且这个 Σ 试一定可以找到的.

2) 确定轨道与超平面的交叉点.

假定超平面表示为: $H(x) := \langle h, x - x_\Sigma \rangle = 0$,这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积,要确定轨迹 $\phi_t(x)$ 与超平面的第一个交叉点位置,需要对轨迹求积分,并要再经过每一个步长后计算 $H(\phi_t(x))$;重复以上步骤,直至

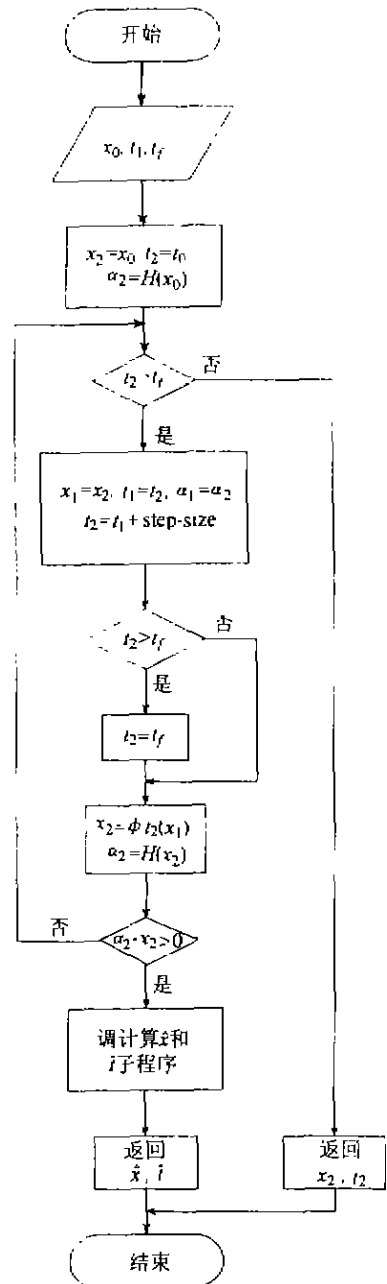


图 1 计算轨道与超平面的交叉点
Fig. 1 Locating hyperplane crossings

连续的两个点 $x_1 = \phi_{t_1}(x)$ 和 $x_2 = \phi_{t_2}(x)$ 位于 Σ 的两侧,即直至 $H(x_1)$ 和 $H(x_2)$ 具有相反的符号;一旦求得 x_1 和 x_2 ,那么交叉点的精确位置可知是某一点 $\hat{x} = \phi_{\hat{t}}(x)$, $t_1 < \hat{t} < t_2$,这可以用平分时间步长法^[2]来求得:这是一个迭代过程,因为 $\hat{t}$ 在 t_1 和 t_2 之间,可不断平分区间 $[t_1, t_2]$ 直至 $\hat{t}$ 达到要求的精度;重复以上这个过程,可以求解出所给定的任意时间长度内的所有交叉点.求 x_1 和 x_2 的算法和平分时间步长法这两个算法的流程图描述见图1、图2.

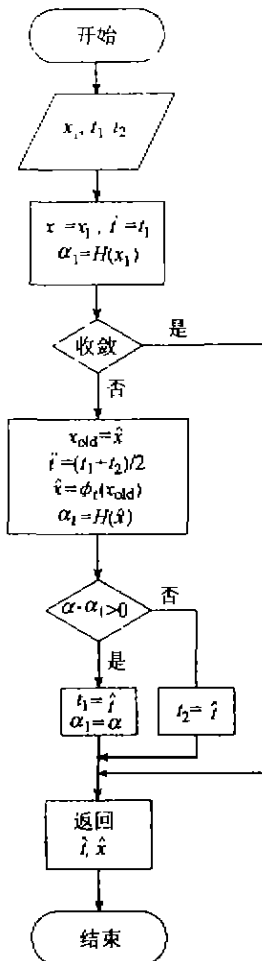


图2 平分时间步长法
Fig 2 Time-step halving

对于欧氏空间中的系统的结构稳定的极限集,所求的 Poincare 映射的极限集与原状态空间中相应流形的极限集的关系可简述如下:

定义 如果 $x^* = P(x^*)$, 则 x^* 为映射 P 的不动点;如果 $x_2^* = x_1^*, \dots, x_{k+1}^* = P(x_k^*), \dots, x_1^* = P(x_k^*), k = 1, \dots, K-1$, 则集合 $\{x_1^*, \dots, x_K^*\}$ 为映射 P 的周期 K 闭轨;那么,对于自治系统考虑其周期解情形, ϕ_t 的极限环对应于 P 的不动点; P 的周期 K 闭轨意味着相应流形的次调和解;对于自治系统考

虑其概周期情形,例如周期 2 运动, P 的极限包含着嵌入的环.

而混沌系统的稳态 Poincare 轨道是完全不同且常常是非常美丽的,首先其稳态轨道不会象周期和概周期行为一样存在于一个简单的几何体上;其次吸引子有着精细的轨道结构.

3 基于 Poincare 映射 PMSM 的混沌现象分析 (Analyses of chaotic phenomena of PMSM based on Poincare map)

3.1 永磁同步电机的混沌模型 (Chaotic model of PMSM)

在[1]中推导了永磁同步电机(PMSM)的混沌模型以及给出了使系统呈现出混沌现象的参数选取方法,这里仅写出 PMSM 的混沌模型和几种参数选择下的状态空间仿真图形.

以 i_d, i_q 和 ω 为状态变量,永磁同步电动机可写为:

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = (u_d - R_1 i_d + \omega L_q i_q) / L_d, \\ \frac{di_q}{dt} = (u_q - R_1 i_q - \omega L_d i_d - \omega \Psi_r) / L_q, \\ \frac{d\omega}{dt} = [n_p \Psi_r i_q + n_p (L_d - L_q) i_d i_q - T_L - \beta \omega] / J. \end{cases} \quad (1)$$

通过仿射变换和时间尺度变换,将(1)变换成无量纲的状态方程.选择仿射变换 $x = \lambda \tilde{x}$ 及时间尺度变换 $t = \tau \tilde{t}$.

其中

$$x = [i_d \quad i_q \quad \omega]^T, \tilde{x} = [\tilde{i}_d \quad \tilde{i}_q \quad \tilde{\omega}]^T, \\ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_d & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_q & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bk & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$b = \frac{L_q}{L_d}, k = \frac{\beta}{n_p \tau \Psi_r}, \tau = \frac{L_q}{R_1}.$$

则无量纲状态方程为:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{i}_d}{d\tilde{t}} = -\tilde{i}_d + \tilde{\omega} \tilde{i}_q + \tilde{u}_d, \\ \frac{d\tilde{i}_q}{d\tilde{t}} = -\tilde{i}_q - \tilde{\omega} \tilde{i}_d + \gamma \tilde{\omega} + \tilde{u}_q, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{d\tilde{t}} = \sigma (\tilde{i}_q - \tilde{\omega}) + \varepsilon \tilde{i}_d \tilde{i}_q - \tilde{T}_L. \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$b = \frac{L_q}{L_d}, \gamma = -\frac{\Psi_r}{k L_q}, \sigma = \frac{\beta \tau}{J},$$

$$\varepsilon = \frac{n_p b \tau^2 k^2 (L_d - L_q)}{J}, \quad \tilde{u}_d = \frac{1}{R_1 k} u_d,$$

$$\tilde{u}_q = \frac{1}{R_1 k} u_q, \quad \tilde{T}_L = \frac{\tau^2}{J} T_L.$$

研究气隙均匀的永磁同步电动机混沌模型的特性,即考虑 $L_d = L_q = L$ 的情形,模型变为:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{i}_d}{dt} = -\tilde{i}_d + \tilde{\omega}\tilde{i}_q + \tilde{u}_d, \\ \frac{d\tilde{i}_q}{dt} = -\tilde{i}_q - \tilde{\omega}\tilde{i}_d + \gamma\tilde{\omega} + \tilde{u}_q, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \sigma(\tilde{i}_q - \tilde{\omega}) - \tilde{T}_L. \end{cases} \quad (3)$$

3.2 永磁同步电机的 Poincare 映射仿真 (Simulation of Poincare map of PMSM)

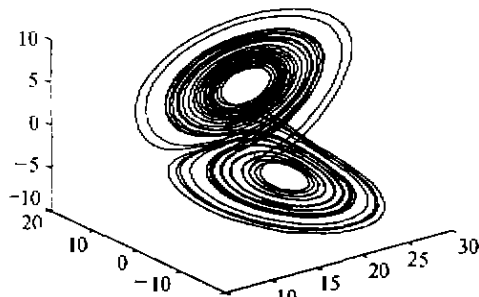


图 3 条件 1° 下的混沌吸引子
Fig. 3 The strange attractor for case 1°

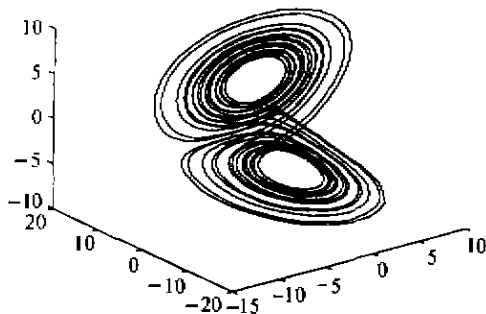


图 5 条件 2° 下的混沌吸引子
Fig. 5 The strange attractor for case 2°

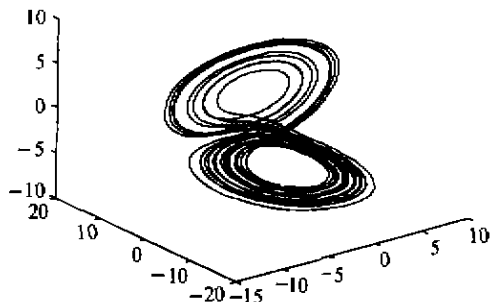


图 7 条件 3° 下的混沌吸引子
Fig. 7 The strange attractor for case 3°

给出 PMSM 如下参数设定: $L_d = L_q = L = 14.25\text{mH}$, $\beta = 0.0162\text{N/rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\Psi_r = 0.03\text{Nm/A}$, $R_1 = 0.9\Omega$, $n_p = 1$, $J = 4.7 \times 10^{-5}\text{kgm}^2$.

初始条件选为 $(\tilde{i}_d, \tilde{i}_q, \tilde{\omega}) = (0.01, 0.01, 0.01)$, 根据[1]中的仿真,对 PMSM 中混沌吸引子的结构已有了初步的了解,由试错法 Poincare 截面可选为 $\Sigma: \tilde{i}_q + \tilde{\omega} = 5$, 并按第二节提出的数值算法,下面给出三种情况下的永磁同步电机的状态空间图和相应的 Poincare 映射:

1° 对于 $\tilde{u}_d = \tilde{u}_q = \tilde{T}_L = 0$, $\sigma = 5.46$, $\gamma = 20$ 时其状态空间图和 Poincare 映射的仿真结果如图 3、图 4;这种情况可解释为在经过一段时间的运行后,突然断电,系统在某一参数下呈现的动态特性;

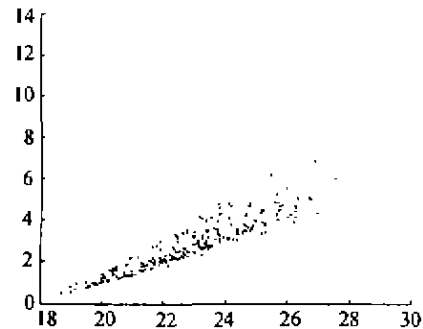


图 4 条件 1° 下 Poincare 映射
Fig. 4 The Poincare map for case 1°

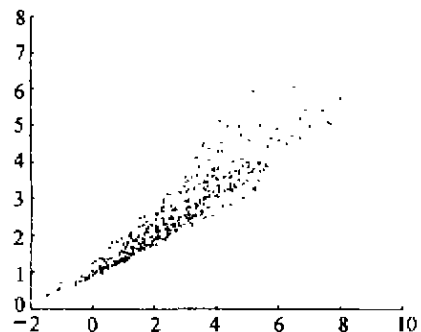


图 6 条件 2° 下 Poincare 映射
Fig. 6 The Poincare map for case 2°

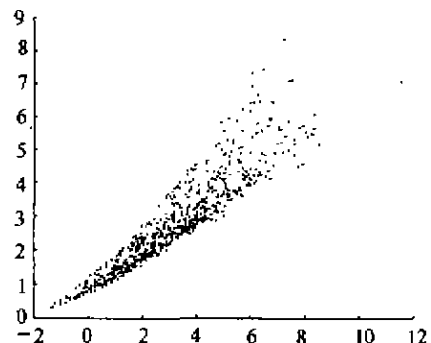


图 8 条件 3° 下 Poincare 映射
Fig. 8 The Poincare map for case 3°

2° 对于情形 $\tilde{u}_q = \tilde{T}_L = 0$ 和 $\tilde{u}_d \neq 0, \tilde{u}_{dh}$ 可通过数值解得^[2], 当 $u_d = \tilde{u}_{dh} - 3$ 时出现混沌; 其状态空间图和 Poincare 映射如图 5、图 6;

3° 对于 $\tilde{u}_d, \tilde{u}_q$ 和 $\tilde{T}_L$ 为一般的情形, 不失一般性, 设 $\tilde{u}_q$ 和 $\tilde{T}_L$ 取定值, 如选取 $\tilde{T}_L = 1.2 \text{ N} \cdot \text{m}$ 和 $\tilde{u}_q = 1$, 当 $\tilde{u}_d = -20$ 时, 系统呈现混沌现象, 其状态空间图形和 Poincare 映射如图 7、图 8.

从上面几个特定参数选择下 PMSM 的状态空间图形和 Poincare 映射仿真可以看到, 混沌系统的稳定 Poincare 轨道是与众不同的. 首先, 其稳定轨道与周期或概周期行为不一样, 不是一个简单的几何结构; 其次, 混沌吸引子有着精细的结构, 如有类似于 Cantor 集的嵌层结构, 且这种精细的结构是典型的混沌系统所具有的, 其特征可由 Lyapunov 指数和分数维来刻画^[5]. 因而通过对它的研究, 可以确定 PMSM 混沌运动的特征指数, 为进一步刻画 PMSM 混沌运动打下基础.

4 结论 (Conclusion)

分析非线性动力系统的混沌现象是一件困难的事情, 对于一些分段线性系统, 一般可以从理论上证明其混沌的存在性. 但对于连续非线性系统, 还难于从理论上严格证明其混沌的存在性, 目前只能通过计算机仿真来观察它. 在 [1] 中, 我们给出了一个基于 Hopf 分支的调节系统参数的方法, 来调节系统的参数使系统呈现出混沌行为. 本文则从另一个角度, 即用 Poincare 映射来分析非线性系统的混沌现象, 这为分析非线性系统的混沌现象提供了一个新的工

具. 计算机仿真表明, 用 Poincare 映射来分析 PMSM 的混沌现象, 能更加简单、直观地反映 PMSM 的混沌运动的复杂性和轨道的精细结构, 从而观察到其典型的混沌运动特征, 也从一个新的角度证实了 PMSM 中混沌的存在性.

参考文献 (References)

- [1] Li Z, Zhang B and Mao Z Y. Strange attractors in permanent-magnet synchronous motors [A]. Proc. of the IEEE 1999 International Conference on Power Electronics and Drive Systems [C], Hong Kong, 1999, 150-155
- [2] Parker T S and Chua L O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems [M]. New York: Springer-Verlag, World Publishing Corp., 1989
- [3] Guckenheimer J and Holmes P J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields [M]. Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, 1983
- [4] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos [M]. Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, 1984
- [5] Zhang Bo, Li Zhong and Mao Zongyuan. Analyzing chaotic phenomenon in permanent-magnet synchronous motors with Lyapunov exponent and capacity dimension [J]. Control Theory and Applications, 2001, 18(4): 589-592, 596 (in Chinese)

本文作者简介

- 张 波 见本刊 2001 年第 4 期第 596 页.
 李 忠 见本刊 2001 年第 4 期第 596 页.
 毛宗源 见本刊 2001 年第 2 期第 165 页.
 庞敏熙 见本刊 2001 年第 4 期第 596 页.