文章编号：1000－8152(2001)05－0801－04

不确定非线性系统的多模反演滑模控制*

李 俊 徐德民
(西北工业大学航海工程学院·西安,710072)

摘要：对一般形式的仿射非匹配不确定非线性系统,研究了一种具有任意小跟踪误差的稳定控制器的设计新方法.结合反演(backstepping)设计和变结构控制,提出了反演变结构控制策略.对存在非匹配的不确定性和未知干扰的系统,设计的反演变结构控制器实现了鲁棒输出跟踪,闭环系统在有限时间进入滑动模态.仿真算例证实了理论结果.

关键词：非匹配不确定性；非线性系统；反演设计；变结构控制
文献标识码：A

Multi-Mode Backstepping Sliding Mode Control for Nonlinear Systems with Unmatched Uncertainties

LI Jun and XU Demin
(College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University · Xi'an, 710072, P.R.China)

Abstract: In this paper, a new method is proposed for designing stable controllers with arbitrarily small tracking error for nonlinear systems with unmatched uncertainties. The proposed approach is based upon a combination of the backstepping design method and the variable structure control scheme to design backstepping VS controller and provide robust output tracking even in the presence of unknown disturbance. The closed loop systems reach the sliding surface in a finite time. Simulations are provided to illustrate the performance of the controller.

Key words: unmatched uncertainties; nonlinear system; backstepping design; VSC

1 引言(Introduction)

对于不确定非线性系统,变结构控制(VSC)是一个较为有效的方法,也出现了一些研究成果,但一般说来,VSC 要求不确定性满足匹配条件.匹配条件在实践中有时很难满足,例如,主动磁悬浮轴承、电机等就是非匹配不确定的[1].

[2]对一类具有参数非匹配不确定的非线性系统,研究了其输出跟踪问题,得到渐近跟踪的结果.本文对一般形式的非匹配仿射非线性系统,突破不确定性为未知常参数的局限,用反演(backstepping)设计方法[3],提出了多模变结构控制策略,实现对给定信号的有界跟踪.此设计不要求系统变换为所谓的纯参数反馈型或严格参数反馈型[3].

2 问题描述(Problem statement)

考虑一般形式的 SISO 仿射非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \Delta f(x,p) + \\ &\quad [g(x) + \Delta g(x,p)]u + d(x,t),\\ y &= h(x).\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为可测状态向量,$u \in \mathbb{R}$ 为控制输入,$y \in \mathbb{R}$ 为系统输出,$p \in P$ 为未知参数,$h(x)$ 为已知平滑函数,$h(0) = 0, f(x), g(x) \in \mathbb{R}^n$ 为已知平滑向量函数,且 $f(0) = 0, g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \Delta f, \Delta g$ 是未知函数向量,它们具有相应的维数,$d(x,t) \in \mathbb{R}^n$ 为加于系统的未知扰动.设系统相对阶为 n.

假设 1 存在平滑函数集 $a_i(x_1,\cdots,x_i)$,使

$$|\Delta f_i| \leqslant a_i(x_1,\cdots,x_i),\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

假设 2 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$,存在已知连续函数 $\bar{d}(x,t)$,使 $|d(x,t)| \leqslant \bar{d}(x,t)$.

假设 3 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, p \in P$,存在已知连续函数向量 $g^L(x,t), g^U(x,t)$,使

$$g_i^L(x,t) \leqslant \Delta g_i(x,p,t) \leqslant g_i^U(x,t).$$

另外,要求 $-g_i(x,t) \notin [g_i^L(x,t), g_i^U(x,t)]$,避免

* 基金项目:西北工业大学科研启动费(5211305－2110－111)资助项目.
收稿日期:1999－04－26;收修改稿日期:2000－07－10.

奇异性问题，为方便起见，进一步假定 $g_i(x,t)+g_i^L(x,t)>a_i$，其中 a_i 为任意正数.

期望跟踪轨迹 y_d 及其直到 n 阶导数 $\dot{y}_d,\ddot{y}_d,\cdots,y_d^{(n)}$ 有界且已知.控制器设计的目的是使系统(1)实现对 y_d 的跟踪.

3 多模反演变结构控制(Multi-mode backstepping VSC)

反演设计(backstepping design)是针对不确定系统的一种系统化的控制器综合方法.它通过从系统的最低阶次微分方程开始，引入虚拟控制的概念，一步一步设计满足要求的虚拟控制，最终设计出真正的控制律[3].

控制设计由 n 个步骤组成，在每一步设计中，设计的虚拟控制均使其相应的子系统满足滑动条件.首先定义 n 级滑模

$$\begin{aligned} s_1 &= y-y_d=h^{(0)}(x)-w_{1d},\\ s_i &= h^{(i-1)}(x)-w_{id},\ i=2,3,\cdots,n. \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $w_{1d}=y_d$，而 $h^{(i-1)}(x),w_{id}(i=2,\cdots,n)$ 将在后面给出.设计合适的控制律，使得各级滑模均有 $|s_i|\leqslant\phi_i$，其中 ϕ_i 为正常数.

第一步：对 s_1 求导得

$$\begin{aligned} \dot{s}_1=&\frac{\partial h(x)}{\partial x}[f(x)+\Delta f(x,p)+\\ &(g(x)+\Delta g(x,p))u+d(x,t)]-\dot{w}_{1d}. \end{aligned} \tag{4}$$

由于系统相对阶为 n，因此直到 $h(x)$ 的第 $n-1$ 阶导均有

$$\frac{\partial^i h(x)}{\partial x^i}[(g(x)+\Delta g(x,p))u]=0. \tag{5}$$

采用李代数，(4)可以写为

$$\dot{s}_1=h^{(1)}(x)-\dot{w}_{1d}+(L_{\Delta f}+L_d)h(x). \tag{6}$$

其中 $h^{(1)}(x)=L_fh(x)$.因为 Δf 有界 $a(x)$，$d(x,t)$ 有界 $\bar{d}(x,t)$，所以能找到光滑函数向量 $\beta_1(x)$，使得

$$|(L_{\Delta f}+L_d)h(x)|\leqslant\beta_1(x). \tag{7}$$

$h^{(1)}(x)$ 为虚拟控制，期望的虚拟控制为 w_{2d}，定义 Lyapunov 函数 $V_1=\frac{1}{2}s_1^2$，并沿(6)求导得

$$\dot{V}_1=s_1[s_2+w_{2d}-\dot{w}_{1d}+(L_{\Delta f}+L_d)h(x)]. \tag{8}$$

取虚拟控制律为如下的形式

$$w_{2d}=\dot{w}_{1d}-k_1(x)\frac{s_1}{\phi_1}. \tag{9}$$

其中 $k_1(x)$ 为控制增益，ϕ_1 为给定第一滑模的跟踪误差带.将(9)代入后，(6)式可以重新写为

$$\dot{s}_1=s_2-k_1\frac{s_1}{\phi_1}+(L_{\Delta f}+L_d)h(x). \tag{10}$$

为了在 $|s_2|\leqslant\phi_2$ 的情况下，保证 $|s_1|\leqslant\phi_1$，$k_1(x)$ 应取为

$$k_1(x)=\beta_1(x)+\phi_2+c_1. \tag{11}$$

其中 c_1 为正常数.实际上，将(9)、(10)代入(8)有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1=&s_1s_2-|s_1|\phi_2\frac{|s_1|}{\phi_1}-|s_1|c_1\frac{|s_1|}{\phi_1}-\\ &|s_1|\beta_1(x)\frac{|s_1|}{\phi_1}+s_1(L_{\Delta f}+L_d)h(x). \end{aligned} \tag{12}$$

若 $|s_2|\leqslant\phi_2$，则当 $|s_1|>\phi_1$ 时有 $\dot{V}_1<-c_1\frac{s_1^2}{\phi_1}$.

第二步：推导 $|s_2|\leqslant\phi_2$ 必须满足的条件.对 s_2 求导得

$$\dot{s}_2=h^{(2)}(x)+(L_{\Delta f}+L_d)L_fh(x)-\dot{w}_{2d}. \tag{13}$$

其中 $h^{(2)}(x)=L_f^2h(x)$.根据有界性假设，能找到光滑函数向量 $\beta_2(x)$，使得

$$|(L_{\Delta f}+L_d)L_fh(x)|\leqslant\beta_2(x). \tag{14}$$

由于存在非匹配不确定性，导致 w_{2d} 中含有不确定性项.计算 w_{2d} 如下所示

$$w_{2d}=\bar{w}_{2d}-\Delta w_{2d}. \tag{15}$$

其中

$$\bar{w}_{2d}=\dot{w}_{1d}-\frac{\partial k_1}{\partial x}f\frac{s_1}{\phi_1}-\frac{k_1}{\phi_1}(s_2-k_1\frac{s_1}{\phi_1}),$$

$$\Delta w_{2d}=\frac{\partial k_1}{\partial x}(\Delta f+d)\frac{s_1}{\phi_1}+\frac{k_1}{\phi_1}(L_{\Delta f}+L_d)h(x).$$

因为 Δx_1 有界 $a_1(x_1)$，所以能找到光滑函数 $\gamma_2(x)$，使得

$$|\Delta\dot{w}_{2d}|\leqslant\gamma_2(x). \tag{16}$$

定义 Lyapunov 函数 $V_2=\frac{1}{2}s_2^2$，并沿(13)求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2=&s_2[s_3+w_{3d}-\bar{\dot{w}}_{2d}+\\ &(L_{\Delta f}+L_d)L_fh(x)+\Delta\dot{w}_{2d}]. \end{aligned} \tag{17}$$

同第一步，取虚拟控制律为如下的形式

$$w_{3d}=\bar{\dot{w}}_{2d}-k_2(x)\frac{s_2}{\phi_2}. \tag{18}$$

其中 $k_2(x)$ 为控制增益.利用(18)、(13)可写为

$$\dot{s}_2=s_3-k_2\frac{s_2}{\phi_2}+(L_{\Delta f}+L_d)L_fh(x)+\Delta\dot{w}_{2d}.$$

为了在 $|s_3|\leqslant\phi_3$ 的情况下，保证 $|s_2|\leqslant\phi_2$，$k_2(x)$ 应取为

$$k_2(x)=\beta_2(x)+\gamma_2(x)+\phi_3+c_2. \tag{19}$$

同第一步的结果一样，有 $\dot{V}_2 < -c_2\frac{s_2^2}{\phi_2}$.

第 n 步：推导 $|s_n| \leqslant \phi_n$ 必须满足的条件. 到第 n 步为止，有下面的结果

$$w_{nd} = \bar{w}_{(n-1)d} - k_{n-1}(x)\frac{s_{n-1}}{\phi_{n-1}}, \tag{20}$$

$$\dot{w}_{nd} = \dot{\bar{w}}_{nd} - \Delta\dot{w}_{nd}. \tag{21}$$

根据(3)，考虑(21)后有

$$\begin{aligned}\dot{s}_n = {} & L_f^n h(x) + (L_{\Delta f} + L_d)L_f^{n-1}h(x) + \\ & L_g L_f^{n-1}h(x)u + L_{\Delta g}L_f^{n-1}h(x)u - \\ & \dot{\bar{w}}_{nd} + \Delta\dot{w}_{nd}.\end{aligned} \tag{22}$$

记

$$q = L_g L_f^{n-1}h(x),\ \Delta q = L_{\Delta g}L_f^{n-1}h(x), \tag{23}$$

根据有界性假设 3，存在光滑函数 $\bar{q}(x)$，使得 $|\Delta q| \leqslant \bar{q}(x) < |q|$.

根据以上的推导，有下面的多模反演变结构控制定理：

定理 1　对非匹配非线性系统(1)，在满足假设 1～假设 3 的条件下，如下的控制律保证不确定系统的输出 y 对期望跟踪信号 y_d 是有界跟踪的，且稳态误差控制在 ϕ_1 的范围之内.

$$u = \frac{1}{q}\left[-L_f^n h(x) + \dot{\bar{w}}_{nd} - k_n\frac{s_n}{\phi_n}\right], \tag{24}$$

$$\begin{aligned}k_n = {} & \frac{\bar{q}}{|q| - \bar{q}}|L_f^n h(x) - \dot{\bar{w}}_{nd}| + \\ & \frac{|q|}{|q| - \bar{q}}[\beta_n + \gamma_n] + c_n.\end{aligned} \tag{25}$$

证　将控制律(24)代入后，(22)可写为

$$\begin{aligned}\dot{s}_n = {} & (L_{\Delta f} + L_d)L_f^{n-1}h(x) - k_n\frac{s_n}{\phi_n} + \Delta\dot{w}_{nd} + \\ & \frac{\Delta q}{q}\left[-L_f^n h(x) + \dot{\bar{w}}_{nd} - k_n\frac{s_n}{\phi_n}\right] = \\ & -(L_f^n h(x) - \dot{\bar{w}}_{nd})\frac{\Delta q}{q} + \Delta\dot{w}_{nd} + \\ & (L_{\Delta f} + L_d)L_f^{n-1}h(x) - \frac{q + \Delta q}{q}k_n\frac{s_n}{\phi_n}.\end{aligned} \tag{26}$$

定义 Lyapunov 函数 $V_n = \frac{1}{2}s_n^2$. 对其求导有

$$\begin{aligned}\dot{V}_n = {} & s_n\left[-(L_f^n h(x) - \dot{\bar{w}}_{nd})\frac{\Delta q}{q} + \Delta\dot{w}_{nd} + \right. \\ & \left.(L_{\Delta f} + L_d)L_f^{n-1}h(x)\right] - \frac{q + \Delta q}{q}k_n\frac{|s_n|^2}{\phi_n}.\end{aligned} \tag{27}$$

当 $|s_n| > \phi_n$ 时，有

$$\begin{aligned}\dot{V}_n < {} & s_n\left[-(L_f^n h(x) - \dot{\bar{w}}_{nd})\frac{\Delta q}{q}\right] + s_n[(L_{\Delta f} + \\ & L_d)L_f^{n-1}h(x) + \Delta\dot{w}_{nd}] - \frac{q + \Delta q}{q}k_n|s_n|.\end{aligned} \tag{28}$$

考虑到如下的两个关系式成立

$$\begin{aligned}& s_n[(L_{\Delta f} + L_d)L_f^{n-1}h(x) + \Delta\dot{w}_{nd}] < \\ & |s_n|\frac{q + \Delta q}{q}\frac{|q|}{|q| - \bar{q}}[\beta_n + \gamma_n],\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}& s_n\left[-(L_f^n h(x) - \dot{\bar{w}}_{nd})\frac{\Delta q}{q}\right] \leqslant \\ & \frac{q + \Delta q}{q}\frac{q}{q + \Delta q}|s_n||L_f^n h(x) - \dot{\bar{w}}_{nd}|\frac{\Delta q}{q} < \\ & \frac{q + \Delta q}{q}|s_n|\frac{\bar{q}}{|q| - \bar{q}}|L_f^n h(x) - \dot{\bar{w}}_{nd}|.\end{aligned} \tag{30}$$

因此，将(25)代入(28)后得 $\dot{V}_n < -c_n\frac{s_n^2}{\phi_n}$，所以 $\lim_{t\to\infty}|s_n| \leqslant \phi_n$. 进而有

$$|s_n| \leqslant \phi_n \to |s_{n-1}| \leqslant \phi_{n-1} \to \cdots \to |s_1| \leqslant \phi_1.$$

注　上述设计中，当初始误差 $s_i(0)$ 较大时，例如 $s_i(0) \gg \phi_i$ 的情况，由于含有 $\frac{s_i}{\phi_i}$ 项，将使得控制作用变得较大. 将控制律进行修正，将上面的 $k_i\frac{s_i}{\phi_i}$ 用饱和函数 $k_i\mathrm{sat}\left(\frac{s_i}{l\phi_i}\right)$ 代替，其中 l 为正常数，它控制函数饱和的宽度. 饱和函数 $\mathrm{sat}(x)$ 定义为

$$\mathrm{sat}(x) = \begin{cases}\mathrm{sgn}(x), & |x| > 1, \\ x, & -1 \leqslant x \leqslant 1.\end{cases} \tag{31}$$

4　仿真算例(Simulation)

考虑如下的非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta + x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= f + \Delta f + (g + \Delta g)u + d(t), \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

其中，$f = -x_1 + x_2\sin(t)$，$g = 1$ 已知，$\theta = 0.7$，$\Delta f = 0.1\sin t$，$\Delta g = 0.03$，$d(t) = 2\cos(t)$ 未知，相应的界为

$|\theta| < 1$，$|\Delta f| \leqslant 0.1$，$|\Delta g| \leqslant 0.04$，$|d(t)| \leqslant 2$.

采用前面的符号，有 $q = g$，$\Delta q = \Delta g$，取 $|\Delta q| \leqslant \bar{q}(x) = 0.04$，$|q| = 1$.

可取 $\beta_1(x) = x_1^2$，$\beta_2(x) = |\Delta f| + |d(t)|$.

期望轨迹 $y_d = \sin(t)$. 两级滑模定义为

$$s_1 = y - y_d = x_1 - w_{1d},\ s_2 = x_2 - w_{2d}.$$

其中

$$w_{1d} = y_d,\ w_{2d} = \dot{w}_{1d} - k_1(x)\frac{s_1}{\phi_1},$$

$$k_1 = \beta_1(x) + \phi_2 + c_1.$$

可取 $\gamma_2(x) = 2\left|x_1^3\frac{s_1}{\phi_1}\right| + \left|\frac{k_1}{\phi_1}\right|x_1^2$. 设计控制律为

$$u = \frac{1}{q}\left[-f + \dot{\bar{w}}_{2d} - k_2\frac{s_2}{\phi_2}\right].$$

其中

$$k_2 = \frac{\bar{q}}{|q| - \bar{q}}|f - w_{2d}| + \frac{|q|}{|q| - \bar{q}}[\beta_2(x) + \gamma_2(x)] + c_2.$$

收敛边界层厚度取为 $\phi_1 = \phi_2 = 0.1$,常数 $c_1 = c_2 = 1, l = 1$,初始条件 $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$. 仿真所得的结果如图 1 所示.

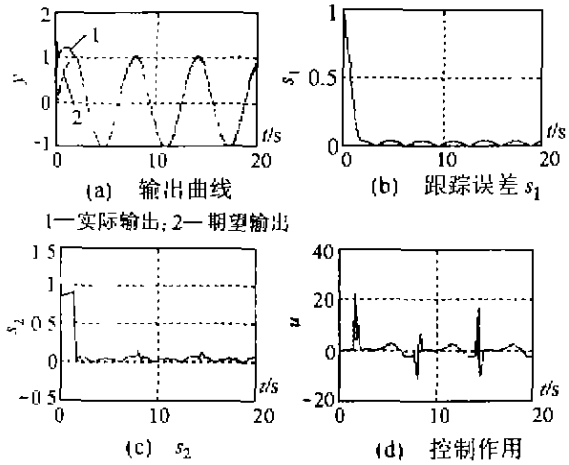

图 1 仿真结果曲线

Fig. 1 Simulation results

从仿真结果可以看出,跟踪误差收敛,闭环系统具有良好的动态性能,跟踪误差控制在 $|s_1| \leqslant \phi_1$ 的范围之内,不存在颤振现象.仿真结果证实了理论上的结论.

5 结论(Conclusion)

本文对具有非匹配不确定的一般仿射非线性系统,突破未知常参数的局限,提出了多模反演变结构控制策略.该策略通过定义 n 级滑动模态,一步一步设计虚拟控制将输出跟踪误差限制在边界层范围之内,最后设计真正的变结构控制,实现了有界跟踪.通过仿真表明,该算法对非匹配不确定性和外在扰动具有鲁棒性.

参考文献(References)

[1] Tunay I and Kaynak O. A new variable structure controller for affine nonlinear systems with non-matched uncertainties [J]. Int. J. of Control, 1995, 62(4): 917 - 939

[2] Rois-Bolivar M, Zinober A S I and Sira-Ramirez H. Dynamical adaptive sliding mode output tracking control of a class of nonlinear systems[J]. Int. Journal of Robust and Nonlinear Control, 1997,7: 387 - 405

[3] Krstic M, Kanellakopoulos I and Kokotovic P. Nonlinear and Adaptive Control Design[M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 1995

本文作者简介

李 俊 1971 年生.现为西北工业大学副教授.分别于 1992 年、1995 年、1998 年获西北工业大学学士、硕士、博士学位.1998 年 - 2000 年 在华中理工大学自动控制系做博士后研究工作.主要研究兴趣为水下自航器制导与控制,先进控制理论及应用,机器人控制等.

徐德民 1937 年生.西北工业大学教授,博士生导师.目前研究领域为非线性控制,水下航行器导航与控制等.