

一类多变量线性系统的极小能控制的样条函数解法

张新建 卢世荣

(国防科技大学理学院数学系·长沙, 410073)

摘要: 考察由一类微分算子阵描述的多变量线性系统的极小能最优控制问题, 建立了这类极小能最优控制与向量值 Lg 样条函数的对应关系, 给出了求解最优解的简洁的递推公式, 并进行了实例计算。

关键词: 微分算子阵; 极小能控制; 向量值 Lg 样条; 递推公式

文献标识码: A

A Spline Method for Computing a Class of Minimum-Energy Control for Multivariable Linear Systems

ZHANG Xinjian and LU Shirong

(Department of Mathematics, College of Science, National Defense University of Technology · Changsha, 410073, P. R. China)

Abstract: The problem of minimum-energy optimal control for multivariable linear systems determined by a class of differential operator matrixes is investigated. The correspondence relation between the minimum-energy optimal control and vector-valued Lg-splines is established. The simple recursive formulas for the optimal solutions are obtained. Else, we give an example.

Key words: differential operator matrixes; minimum-energy control; vector-valued Lg-splines; recursive formulas

1 问题的提出(Problem statement)

许多最优化问题都是在一定的约束条件下求某个指标泛函的极小, 若该指标泛函的极小问题能刻划成某赋泛空间中的极小范数问题, 则该极小问题的解就可能是相应的赋泛空间中的某类广义样条函数。基于这种联系, 已有许多文献^[1-5]用样条函数方法研究某些最优控制问题, 使这些最优控制问题在概念上更加清晰、计算上更加简单。

本文作者之一发展了微分算子样条函数的递推技术, 并成功地将这一递推技术用于单输入-单输出线性系统的极小能控制的求解^[6,7]。作为这一工作的继续, 本文考虑由一类微分算子阵决定的多输入-多输出线性系统的极小能控制的样条函数求解方法。

设 $H_k = \{f(t), t \in [0, T]: f^{(k)} \text{ a. e. 存在, 且 } \int_0^T |f^{(k)}|^2 < \infty\}$ 为 $[0, T]$ 上的实值函数空间, $n_1, n_2, \dots, n_p$ 为 p 个正整数, H 是 $[0, T]$ 上 p 维列向量函数 $f = (f_1, \dots, f_p)'$ 构成的空间, 其中 $f_j \in H_{n_j} (1 \leq j \leq p)$, 即 $H = H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_p}$ 。设 L 为 $p \times p$ 阶常微分算子阵, 其元素为

$$L_{ij} = \sum_{l=0}^{n_j} a_{ij,l}(t) D^l, \quad 1 \leq i, j \leq p.$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$, 且假设 $a_{ij,n_j} = \delta_{ij}$, 考虑由常微分方程组

$$Lf(t) = u(t) \quad (1)$$

确定的时变线性系统, 其中 $f(t) \in H$ 。若取状态变量 $x = (f_1, f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(n_1-1)}, \dots, f_p, f_p^{(1)}, \dots, f_p^{(n_p-1)})'$, 则式(1)可写成等价形式

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + Bu(t), \\ f(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$B = \text{blockdiag}[(0, \dots, 0, 1)', n_j \times 1],$$

$$n \times p \text{ 阶分块对角阵,}$$

$$C = \text{blockdiag}[1, \dots, 0, 0], 1 \times n_j],$$

$$p \times n \text{ 阶分块对角阵,}$$

$$A = \text{block}[A_{ij, n_i \times n_j}], n \times n \text{ 阶分块矩阵,}$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p,$$

$$A_{ii}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_i-1} \\ -a_{ii,0} - a_{ii,1} \cdots - a_{ii,n_i-1} \end{bmatrix},$$

$$A_{ij}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{ij,0} - a_{ij,1} \cdots - a_{ij,n_j-1} \end{bmatrix} (i \neq j).$$

设 $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, N, N \geq n)$ 是 H 上一组线性无关的泛函, $r_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 是一组实数. 我们的问题是求解极小能控制 $u^*(t)$ 及最佳轨迹 $f^*(t)$ 使满足线性系统(2)(或(1))及约束条件 $\lambda_j f = r_j, 1 \leq j \leq N$, 也即

$$\int_0^T (u^*)' u^* = \int_0^T (Lf^*)' (Lf^*) = \min_{f \in U(r)} \int_0^T (Lf)' (Lf). \quad (3)$$

其中 $U(r) = \{f \in H: \lambda_j f = r_j, 1 \leq j \leq N\}$.

2 向量值 Lg 样条 (Vector-valued Lg splines)

定义^[8] 向量值函数 $s(t) \in H$ 称为关于 $\{\lambda_j\}_1^N$ 插值于 $\{r_j\}_1^N$ 的向量值 Lg 样条函数, 如果

$$\int_0^T (Ls)' (Ls) = \min_{f \in U(r)} \int_0^T (Lf)' (Lf), s \in U(r). \quad (4)$$

因此, 满足式(3)的最优解 $f^*(t)$ 就是向量值 Lg 样条函数, 即 $f^*(t) = s(t)$. 从而我们可以借助于样条的理论来研究 $f^*(t)$ 及 $u^*(t)$ 的性质与计算.

首先我们给出向量值 Lg 样条的一些已知结果, 其证明可见文[8].

引理 1 微分算子阵 L 的核 $N(L)$ 是 H 的 n 维子空间.

定理 1 当 $\{\lambda_j\}_1^N$ 是 H 上的连续泛函时, $f^*(t)$ 总是存在的; 当 $\{\lambda_j\}_1^N$ 中有 n 个, 不妨设是 $\{\lambda_j\}_1^n$ 在 $N(L)$ 上线性无关时, 最优解 $f^*(t)$ 是唯一的.

以下我们假定定理 1 的条件恒成立.

引理 2 H 在内积

$$\langle f, g \rangle_H = \sum_{j=1}^n (\lambda_j f)(\lambda_j g) + \int_0^T (Lf)' (Lg) \quad (5)$$

下为 Hilbert 空间, 且有直和分解 $H = N(L) \oplus H_1$, $H_1 = \{f \in H: \lambda_j f = 0, 1 \leq j \leq n\}$. 设 $\{\lambda_j\}_1^N$ 在 H 中的表示为 $\{h_j\}_1^N$, S 是由 $\{h_j\}_1^N$ 生成的 H 的子空间.

定理 2 $f^*(t)$ 是 $U(r)$ 中任意元素在 S 上的正交投影, 从而有

$$f^*(t) = F'(t) R^{-1} r. \quad (6)$$

其中 $F'(t) = (h_1, h_2, \dots, h_N)$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)'$, R 为 N 阶对称矩阵, 其元素为 $\langle h_i, h_j \rangle_H$.

定理 3 设 $\{z_j(t)\}_1^n$ 是 $N(L)$ 的对偶于 $\{\lambda_j\}_1^n$ 的基底, 即

$$Lz_j = 0, \lambda_i z_j = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n. \quad (7)$$

再设 $G(t, \tau)$ 为 L 关于 $\{\lambda_j\}_1^n$ 的格林函数, 即 G 是 $p \times p$ 阶函数矩阵, 且

$$L_{(t)} G(t, \tau) = I_p \delta(\tau - t),$$

$$\lambda_{j(t)} G(t, \tau) = 0, 1 \leq j \leq n. \quad (8)$$

其中 I_p 为 p 阶单位矩阵 $O = (0, 0, \dots, 0)$ (p 维向量) 则 Hilbert 空间 H 具有再生核

$$K(t, \tau) = \sum_{j=1}^n z_j(t) z_j(\tau) + \int_0^T G(t, \xi) G'(\tau, \xi) d\xi. \quad (9)$$

利用再生核即可求得

$$\begin{cases} h_j'(t) = \lambda_{j(t)} K(t, \tau) \quad (1 \leq j \leq N), \\ z_j(t) = h_j(t) \quad (1 \leq j \leq n). \end{cases} \quad (10)$$

3 最优解的递推公式 (Recursive formula for optimal solution)

在上节的基础上, 通过对 $\{h_j\}_1^N$ 进行施密特标准正交化, 可类似于文[6 ~ 8] 得到计算最优解 $u^*(t), f^*(t)$ 的递推公式.

第 1 步 取 $\tilde{h}_i = z_i (1 \leq i \leq n)$, 计算

$$a_{n+1,i} = \lambda_{n+1(t)} \tilde{h}_i (1 \leq i \leq n),$$

$$f_{n+1}(t) = [\lambda_{n+1(t)} G(\tau, t)]',$$

$$d_{n+1} = [\lambda_{n+1(t)} (\lambda_{n+1(t)} K(\tau, t))' - \sum_{i=1}^n a_{n+1,i}^2]^{1/2},$$

$$\tilde{h}_{n+1}(t) = d_{n+1}^{-1} [(\lambda_{n+1(t)} K(\tau, t))' - \sum_{i=1}^n a_{n+1,i} \tilde{h}_i(t)].$$

第 2 步 对于 $j = n+2, n+3, \dots, N$, 循环递推计算

$$\alpha_{jk} = \lambda_j \tilde{h}_k, 1 \leq j \leq n,$$

$$\alpha_{jk} = d_j^{-1} [\lambda_{j(t)} (\lambda_{j(t)} K(\tau, t))' - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{jk} \alpha_{jk}],$$

$$n+1 \leq i \leq j-1,$$

$$f_j(t) = [\lambda_{j(t)} G(\tau, t)]' - \sum_{i=n+1}^{j-1} \alpha_{ji} d_i^{-1} f_i(t),$$

$$d_j = [\lambda_{j(t)} (\lambda_{j(t)} K(\tau, t))' - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ji}^2]^{1/2},$$

$$\tilde{h}_j(t) = d_j^{-1} [(\lambda_{j(t)} K(\tau, t))' - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ji} \tilde{h}_i(t)].$$

第 3 步 取 $\tilde{r}_i = r_i (1 \leq i \leq n)$, 对于 $n+1 \leq j \leq N$ 递推地计算

$$\tilde{r}_j = d_j^{-1} [r_j - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ji} \tilde{r}_i].$$

第 4 步 得极小能最优控制 $u^*(t)$ 及最佳轨迹 $f^*(t)$ 分别为

$$u^*(t) = \sum_{j=n+1}^N \tilde{r}_j d_j^{-1} f_j(t), f^*(t) = \sum_{j=1}^N \tilde{r}_j \tilde{h}_j(t). \quad (11)$$

下面我们给出由系统(2)出发求定理 3 中的对

偶基 $|z_j(t)|$ 及格林函数 $G(t, \tau)$ 的方法.

设 $x(t) = A(t)x(t)$ 的基解矩阵为 $Z(t)$, 记 $F(t, \tau) = Z(t)Z^{-1}(\tau)$, 即 $F(t, \tau)$ 为 $A(t)$ 的状态转移矩阵, 从而由系统(2)知

$$f(t) = CF(t, 0)x(0) + \int_0^t CF(t, \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

定理 4 设

$$M = [(\lambda_1 CF(t, 0))', \dots, (\lambda_n CF(t, 0))']',$$

则 M 为 n 阶可逆矩阵,

$$(z_1(t), \dots, z_n(t)) = CF(t, 0)M^{-1} \text{ 为 } N(L)$$

满足式(7)的基底.

定理 5 记

$$g(t, \tau) = CF(t, \tau)B(t - \tau)_+^0,$$

$$\Delta(\tau)B = (\lambda_1 g(t, \tau), \dots, \lambda_n g(t, \tau))',$$

则 $G(t, \tau) = g(t, \tau) - (z_1(t), \dots, z_n(t))\Delta(\tau)B$ 就是 L 的满足式(8)的格林函数.

由定理 4, 5 和式(9)即可求得再生核 $K(t, \tau)$.

4 举例(Example)

对于 $0 \leq t \leq 1$, 设有系统

$$\begin{bmatrix} D^2 - 4D + 4 & -2 \\ D - 2 & D + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

约束泛函为

$$\lambda_1 f = f_1(0), \lambda_2 f = f_1^{(1)}(0), \lambda_3 f = f_2(0),$$

$$\lambda_4 f = 2f_1(\frac{1}{2}) - f_1^{(1)}(\frac{1}{2}) - f_2(\frac{1}{2}), \lambda_5 f = f_2(1).$$

此例中 $n = 3, N = 5$, 欲求该系统的满足式(3)的极小能控制 $u^*(t)$ 及最佳轨迹 $f^*(t)$. 将系统写成状态方程(2)的形式, 则

$$x(t) = (f_1(t), f_1^{(1)}(t), f_2(t))',$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))',$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

记

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, E_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t),$$

$$P(t) = (E_1(t), E_2(t), E_3(t)),$$

则求得 A 的状态转移矩阵为

$$F(t, \tau) = WP(t)P^{-1}(\tau)W^{-1}.$$

再由定理 4 和定理 5 求得

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} E(t),$$

$$z_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} E(t),$$

$$z_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} E(t),$$

$$G(t, \tau) = [z_2(t - \tau) \quad z_3(t - \tau)](t - \tau)_+^0.$$

代入式(9)可求得再生核 $K(t, \tau)$. 以下由递推公式求 $u^*(t), f^*(t)$.

第 1 步 令 $\bar{h}_i(t) = z_i(t)(1 \leq i \leq 3)$, 求得

$$\alpha_{4,1} = 2e^{\frac{1}{2}}, \alpha_{4,2} = -e^{\frac{1}{2}}, \alpha_{4,3} = -e^{\frac{1}{2}},$$

$$f_4(t) = -e^{2-t}(1, 1)'(\frac{1}{2} - t)_+^0, d_4^2 = e - 1.$$

再记 $Q(t) = (1, e^t, e^{2t}, e^{-t})'$, 则有

$$\bar{h}_4(t) = \frac{1}{\sqrt{e-1}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1-e^{\frac{1}{2}}) & 2(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}) & \frac{5}{6}(e^{-1}-e^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 3(1-e^{\frac{1}{2}}) & (e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}) & 0 & 0 \end{pmatrix} Q(t),$$

$$t > \frac{1}{2},$$

$$\bar{h}_4(t) = \sqrt{\frac{e}{e-1}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} Q(t),$$

$$t < \frac{1}{2}.$$

第 2 步 求得

$$\alpha_{5,1} = 2(e-1), \alpha_{5,2} = 1-e, \alpha_{5,3} = 2-e,$$

$$\alpha_{5,4} = (e-1)^{-\frac{1}{2}}(3-4e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{3}{2}}),$$

且求得

$$f_5(t) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1+e^{\frac{1}{2}} & -3e^{\frac{1}{2}} \\ 2(1+e^{\frac{1}{2}}) & -3e^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (t < \frac{1}{2}),$$

$$f_5(t) = \begin{pmatrix} 1 & -e \\ 2 & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (t > \frac{1}{2}),$$

$$d_5^2 = 10 + 15e^2 + 24e^{\frac{1}{2}} - 6e^{\frac{3}{2}} - 36e - e^3.$$

记 $R(t) = (1, t, e^t, e^{2t}, e^{-t})'$, 由再生核算得

$$(\lambda_{5(\tau)} K(\tau, t))' =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{35}{4}-5e & \frac{5}{2} & 14e-20 & \frac{37}{4}-\frac{22}{3}e & \frac{1}{3}e \\ 12-10e & 5 & 7e-10 & 0 & 2e \end{pmatrix} R(t).$$

从而由递推公式这一步的最后一个公式得到

$\bar{h}_5(t)$.

第3步 取 $\bar{r}_i = r_i (1 \leq i \leq 3)$, 由公式得到

$$\bar{r}_4 = d_4^{-1} [r_4 - e^{\frac{1}{2}}(2r_1 - r_2 - r_3)],$$

$$\bar{r}_5 = d_5^{-1} d_4^{-2} [2(3e^{\frac{1}{2}} - 2e - 1)r_1 + (2e + 1 - 3e^{\frac{1}{2}})r_2 + (e + 2 - 3e^{\frac{1}{2}})r_3 + (3 + e^{\frac{3}{2}} - 4e^{\frac{1}{2}})r_4 + (e - 1)r_5].$$

第4步 将上述结果代入公式(11)即得最优解 $u^*(t), f^*(t)$.

根据本文的算法,我们编制了计算机程序,对该法进行实际的计算,从所得的曲线来看,算法是稳定可靠的.结果见图1所示.

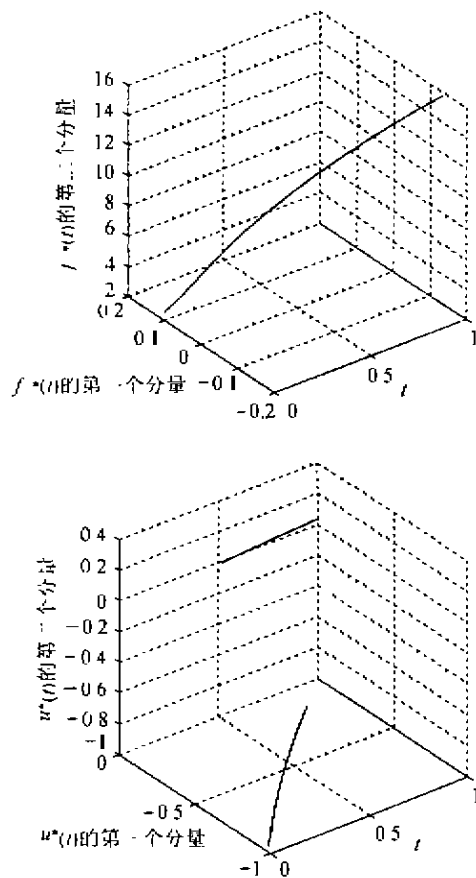


图1 最优控制与最佳轨道曲线

Fig. 1 The optimal control and optimal trace curve

5 结束语(Conclusion)

本文所讨论的最优控制问题若用经典的极大值原理求解是很麻烦的,用样条的投影方法使理论得

以简化,且可以得到整体解析解.只要求得再生核后,递推公式中除了泛函赋值运算外,没有微积分及矩阵求逆等复杂运算,易在计算机上实现; $\bar{r}_i (1 \leq i \leq N)$ 是单独计算的,便于约束条件的修改;当 $N - n$ 很大时,递推式的优越性更为明显.

最后我们指出,本文所讨论的多变量线性系统是一种标准型,文[9]给出了线性系统可变换为这种标准型的充分必要条件.

参考文献(References)

- [1] Weinert H. A reproducing kernel Hilbert space approach to spline problems with applications in estimation and control [D]. Stanford, CA, USA: Stanford University, 1972
- [2] Weinert H and Sidhu G S. A spline-theoretic approach to minimum energy control (Part II) [R]. Baltimore, MD, USA: Department of Electrical Engineering, the Johns Hopkins University, Rep. 75-11, 1975
- [3] Weinert H and Kailath T. A spline-theoretic approach to minimum energy control [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1976, 21(4): 391-393
- [4] Figueiredo R de. LM-g splines [J]. J. Approximation Theory, 1997, 19(4): 332-360
- [5] Chen G. A state-constrained minimum-energy optimal control problem for a steady-state PDE system [J]. Math. Research and Exposition, 1990, 10(3): 439-444
- [6] Zhang Xinjian. Minimum energy control and Lg-splines [J]. Mathematical Applicata, 1991, 4(4): 16-21
- [7] Zhang Xinjian and Fang Kui. On a class of minimum energy control and generalized splines [J]. J. National University of Defence Technology, 1993, 15(4): 84-90
- [8] Sidhu G S and Weinert H. Vector-valued Lg-splines I: Interpolating splines [J]. J. Mathematical Analysis and Applications, 1979, 70(2): 505-529
- [9] Seal C E and Stubberud A R. Canonical forms for multiple-input time-variable systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1969, 14(5): 704-707

本文作者简介

张新建 1956年生 副教授.1982年毕业于国防科技大学应用数学系.主要研究方向为数值分析,系统与控制理论等.

卢世荣 1973年生.讲师.1998年毕业于国防科技大学系统科学与应用数学系.主要从事数值分析方面的工作.