文章编号: 1000-8152(2002)01-0105-04

一类非匹配不确定性系统的变结构控制 *

胡剑波[1]　褚　健[2]

(1. 西安空军工程大学工程学院控制工程系·西安,710038; 2. 浙江大学工业控制技术国家重点实验室,工业控制技术研究所·杭州,310027)

摘要: 研究一类非匹配不确定性系统的变结构控制问题. 引入适当的状态变换,将非匹配不确定系统描述成具有分级形式的两个子系统. 在保证第一个子系统二次渐近稳定的条件下,利用线性矩阵不等式方法得到第二个状态变量的期望值,并由第二个状态变量与其期望值之差构造滑动模,并利用滑模运动的到达条件,得到变结构控制律.

关键词: 不确定性; 变结构控制; 线性矩阵不等式; 自适应控制

文献标识码: A

Variable Structure Control for a Class of Systems with Mismatched Uncertainties

HU Jianbo[1]　and　CHU Jian[2]

(1. Department of Control Engineering, College of Engineering, Xi'an Air Force University of Engineering · Xi'an, 710038, P. R. China;
2. National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, P. R. China)

Abstract: Variable structure control for a class of uncertain systems with mismatched uncertainties is proposed. The switching function is designed based on linear matrix inequality technology for the sub-system with mismatched uncertainties, and the corresponding variable structure control law is derived by the reachable condition of the sliding-mode motions. Furthermore, a new adaptive variable structure controller is presented with the estimations for the upper norms of the uncertainties.

Key words: uncertainties; variable structure control (VSC); linear matrix inequality (LMI); adaptive control

1　引言(Introduction)

非线性系统的变结构控制已经取得了众多成果[1]. 在这些研究结果中,大多数情况下仅考虑系统模型中的匹配不确定性. 近年来,随着自适应控制技术和鲁棒控制技术的发展,关于不匹配不确定系统的变结构控制也有一些研究报导[2,3],但这些研究所考虑的对象比较简单,如文献[3]中仍要求不匹配子系统中的不确定性满足一定的条件. 因此,该领域仍存在较为广泛的问题有待进一步研究.

事实上,变结构控制系统的设计包括了两个互相独立的部分,一个是切换函数的设计,另一个是变结构控制器的设计. 在本文中,我们研究非匹配不确定性系统的变结构控制问题. 由于变结构控制器本身无法克服系统中的不匹配不确定性,所以仅从变结构控制方法来考虑这一问题是比较困难的. 然而,我们可以在切换函数的选择上来考虑系统中的不匹配不确定性,使得当切换函数为零时,所对应的含有不确定性的系统是渐近稳定的. 在这种情况下,切换函数为零时所得等效系统中的不确定性体现了整个系统的不匹配不确定性.

如果对于一个系统,引入某种状态变换,将其分解成两个具有分级形式的子系统,第一个子系统与控制变量没有直接联系,可以将第二个状态变量当作其控制输入,该系统所含有的不确定性实际上是整个系统的不匹配不确定性. 第二个子系统直接受控制输入的控制,且该子系统的维数与控制输入的维数一样,该子系统中所含有的不确定性实际上是整个系统的匹配不确定性. 我们的设计任务可以描述为如下两步:

1) 针对与控制变量没有直接联系的子系统,将第二个子系统的状态变量当作控制量,在考虑所存在的不确定性的前提下,设计鲁棒控制器,并由此构造切换函数.

2) 根据滑模运动到达条件,设计整个系统的变结构控制器.

文中将对一类非匹配不确定性的系统,按照上述思想来设计变结构控制器,并进而提出具有控制增益在线估计能力的自适应变结构控制器.

* 基金项目: 国家自然科学基金(69934030)和浙江省自然科学基金(ZD9905)资助项目
收稿日期: 1999-11-29; 收修改稿日期: 2000-08-03.

2 问题的描述(Problem formulation)

考虑如下非匹配不确定性的系统:

$$\dot{x} = Ax + M\delta(x) + B(\beta(x) + \Delta\beta(x) + (\alpha(x) + \Delta\alpha(x))u). \tag{1}$$

其中:$x \in X \subset \mathbb{R}^n$ 为状态变量,$u \in U \subset \mathbb{R}^m$ 为控制输入,且 $n > m > 1$. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为已知常数矩阵,$\alpha(\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为非线性向量函数,$\beta(\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times m}$ 为非线性函数矩阵. $\Delta\alpha(\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和 $\Delta\beta(\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times m}$ 为非线性的不确定性,且对于任意的 $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha(x) \neq 0$. $\delta(x) \in \mathbb{R}^p$ 为系统在已知结构 $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 下的不匹配不确定性.

假设 1 (A,B) 为可控对,B 是满秩的,即:$\mathrm{rank}B = m$. 不访设 $B = [B_1, B_2]^{\mathrm{T}}$,且 $\det B_2 \neq 0$.

此时,按照同文献[1]中一样的方法,引入非奇异变换 $y = TX$,其中:

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_1B_2^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

则可将系统(1)等效变换为:

$$\dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \delta_1(y_1,y_2), \tag{2a}$$

$$\dot{y}_2 = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \delta_2(y_1,y_2) + B_2(\beta(x) + \Delta\beta(x) + (\alpha(x) + \Delta\alpha(x))u). \tag{2b}$$

其中:$y_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y_2 \in \mathbb{R}^m$, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 为具有相应维数的常数矩阵,且:

$$\begin{bmatrix} \delta_1(y_1,y_2) \\ \delta_2(y_1,y_2) \end{bmatrix} = TM\delta(x)\mid_{x=T^{-1}y},$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = TAT^{-1}.$$

在以下的进一步研究中,假定系统(2)满足下列假设:

假设 2 假设 $\delta_1(y_1,y_2) = \Delta A_{11}y_1 + \Delta A_{12}y_2$,且存在常数矩阵 D_1, D_2, E_1, E_2 和满足 $F_1^{\mathrm{T}}F_1 \leqslant I$ 与 $F_2^{\mathrm{T}}F_2 \leqslant I$ 的不确定矩阵 F_1, F_2,使得 $\Delta A_{11} = D_1F_1E_1$, $\Delta A_{12} = D_2F_2E_2$.

假设 3 假设存在正常数 ρ_0 和 $\rho_1, \delta_{20}, \delta_{21}, \delta_{22}$,使得:

$\| B_2\Delta\alpha(x)\alpha(x)^{-1}B_2^{-1} \| \leqslant \rho_0$, $\| \Delta\beta(x) \| \leqslant \rho_1\beta_0(x)$, $\| \delta_2(y_1,y_2) \| \leqslant \delta_{20} + \delta_{21}\| y_1 \| + \delta_{22}\| y_2 \|$.

其中:$\rho_0 < 1$, $\beta_0(x)$ 为已知正函数.

3 主要结果(Main results)

引理 1 对于子系统:

$$\dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \Delta A_{11}y_1 + \Delta A_{12}y_2, \tag{3}$$

当 ΔA_{11} 和 ΔA_{12} 满足假设2时,引入关于正定对称矩阵 $X \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$, $Q \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ 及正数 $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$ 和矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ 的集合 Ω:

$$\Omega = \left\{ (X,Q,Y,\varepsilon_1,\varepsilon_2): \begin{bmatrix} \begin{matrix} A_{11}X + XA_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Y + \\ Y^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}} + \bar{\varepsilon}_1D_1D_1^{\mathrm{T}} + \bar{\varepsilon}_2D_2D_2^{\mathrm{T}} \end{matrix} & XE_1^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & X \\ E_1X & -\bar{\varepsilon}_1I & 0 & 0 \\ E_2Y & 0 & -\bar{\varepsilon}_2I & 0 \\ X & 0 & 0 & -Q \end{bmatrix} \leqslant 0 \right\}. \tag{4}$$

那么,由 Ω 中的任意元素,构成状态反馈

$$y_2 = YX^{-1}y_1 = Ky_1, \tag{5}$$

将使子系统(3)二次渐近稳定.

证 根据文献[4],该结论是显然的.

引理 2 对于不确定系统(2),其不匹配子系统(3)满足假设2,且引理1中的集合 Ω 为非空集. 如选择切换函数 $S = y_2 - Ky_1$,其中:$K = YP = YX^{-1}$. 那么

1) 当 $S = 0$ 时,所对应的等效系统是渐近稳定的.

2) 当 $\| S \| \leqslant \sigma$ 时,所对应的等效系统是一致终结有界的(其中 σ 为大于零的任意正数).

证 根据文献[5~7],容易得出该结论.

定理 1 对于满足假设3的非匹配不确定系统(2),其不匹配子系统(3)满足假设2,且引理1中的集合 Ω 为非空集,选择切换函数 $S = y_2 - Ky_1$,其中:$K = YP = YX^{-1}$. 那么可以找到对于非零的 S 使 $S^{\mathrm{T}}\dot{S} < 0$ 恒成立的变结构控制器,同时,该控制器将保证系统(2)的渐近稳定性.

证 因为 $S \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$,可以得出:

$$\begin{aligned} \dot{S} = {} & [A_{21}y_1 + A_{22}y_2 - KA_{11}y_1 - KA_{12}y_2] + \\ & [\delta_2(y_1,y_2) - K\Delta A_{11}y_1 - K\Delta A_{12}y_2] + \\ & B_2\{[\alpha(x) + \Delta\alpha(x)]u + \beta(x) + \Delta\beta(x)\}. \end{aligned} \tag{6}$$

当不计上述表达式中的所有不确定性项时,按照 $\dot{S} = -\rho S$ 得到等效控制量:

$$u_{\mathrm{eq}} = -[B_2\alpha(x)]^{-1}[A_{21}y_1 + A_{22}y_2 - KA_{11}y_1 - KA_{12}y_2 + \rho S + B_2\beta(x)]. \tag{7}$$

令 $u = u_{eq} + \tilde{u}\,\mathrm{sgn}(S)$，代入式(6)得：

$$\dot{S} = -\rho S+\delta_2(y_1,y_2)-K\Delta A_{11}y_1-K\Delta A_{12}y_2+B_2\Delta\alpha(x)u_{eq}+B_2\Delta\beta(x)+B_2[\alpha(x)+\Delta\alpha(x)]\tilde{u}\,\mathrm{sgn}(S).$$

令：

$$H = \delta_2(y_1,y_2) - K\Delta A_{11}y_1 - K\Delta A_{12}y_2 + B_2\Delta\alpha(x)u_{eq} + B_2\Delta\beta(x),$$

考虑到假设 2、假设 3 及等效控制量的表达式(7)，则存在正常数 c_0,c_1,c_2,c_3,c_4 使得：

$$H \leqslant c_0 + c_1\|y_1\| + c_2\|y_2\| + c_3\|\beta(x)\| + c_4\|\beta_0(x)\| = h. \tag{8}$$

如选取：

$$\tilde{u} = -\frac{1+\gamma}{1-\rho_0}h[B_2\alpha(X)]^{-1},\ \gamma > 0, \tag{9}$$

因为 $\rho_0 < 1$，则有

$$S^{\mathrm{T}}\dot{S} \leqslant -\rho\|S\|^2 + h\|S\| - \frac{1+\gamma}{1-\rho_0}hS^{\mathrm{T}}[I_m - B_2\Delta\alpha(x)\alpha^{-1}(x)B_2^{-1}]\mathrm{sgn}(S) \leqslant -\rho\|S\|^2 + h\|S\| - \frac{1+\gamma}{1-\rho_0}h\|S\| + \frac{1+\gamma}{1-\rho_0}h\|S\|\cdot\|B_2\Delta\alpha(x)\alpha^{-1}(x)B_2^{-1}\|.$$

考虑到 $\|B_2\Delta\alpha(x)\alpha(x)^{-1}B_2^{-1}\| \leqslant \rho_0$，则有：

$$S^{\mathrm{T}}S \leqslant -\rho\|S\|^2 + h\|S\| - \frac{1}{1-\rho_0}h\|S\| + \frac{\rho_0}{1-\rho_0}h\|S\| - \gamma h\|S\| \leqslant -\rho\|S\|^2 - \gamma h\|S\|.$$

故：可以找到变结构控制律 u，使得对于非零的 S，恒有 $S^{\mathrm{T}}\dot{S} < 0$，并且将在某一时刻到达 $S = 0$。

于是根据引理 2，系统(2)将渐近稳定.

定理 2　对于非匹配不确定系统(2)，对于任意的元素 $(Q,X,Y,\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2)\in\Omega$，选择切换函数 $S = y_2 - Ky_1 = y_2 - YPy_1 = y_2 - YX^{-1}y_1$，且存在未知常数 $\rho_0 < 1, c_0,c_1,c_2,c_3,c_4$ 使得

$$\|B_2\Delta\alpha(x)\alpha^{-1}(x)B_2^{-1}\| \leqslant \rho_0$$

和

$$\|H\| \leqslant c_0 + c_1\|y_2\| + c_2\|y_3\| + c_3\|\beta(x)\| + c_4\|\beta_0(x)\|,$$

则下列控制律可以保证系统(2)的一致终结有界：

$$\begin{cases} u = u_{eq} - [B_2\alpha(x)]^{-1}[\hat{d}_0+\hat{d}_1\|y_1\|+\hat{d}_2\|y_2\|+\hat{d}_3\|\beta(x)\| + \hat{d}_4\|\beta_0(X)\|]\mathrm{sgn}(S), \\ \dot{\hat{d}}_0 = q_0(-\varphi_0\hat{d}_0 + \|S\|), \\ \dot{\hat{d}}_1 = q_1(-\varphi_1\hat{d}_1 + \|S\|\cdot\|y_1\|), \\ \dot{\hat{d}}_2 = q_2(-\varphi_2\hat{d}_2 + \|S\|\cdot\|y_2\|), \\ \dot{\hat{d}}_3 = q_3(-\varphi_3\hat{d}_3 + \|S\|\cdot\|\beta(x)\|), \\ \dot{\hat{d}}_4 = q_4(-\varphi_4\hat{d}_4 + \|S\|\cdot\|\beta(x)\|). \end{cases} \tag{10}$$

其中：$q_i > 0, \varphi_i > 0 (i = 0,1,2,3,4)$ 为任意选取的正数.

证　考虑到 $\rho_0 < 1$，可选择下列李雅普诺夫函数：

$$V = \frac{1}{2}S^{\mathrm{T}}S + \frac{1}{2}(1-\rho_0)(q_0^{-1}\tilde{d}_0^2 + q_1^{-1}\tilde{d}_1^2 + q_2^{-1}\tilde{d}_2^2 + q_3^{-1}\tilde{d}_3^2 + q_4^{-1}\tilde{d}_4^2). \tag{11}$$

其中：$\tilde{d}_i = \hat{d}_i - d_i, d_i = \dfrac{c_i}{1-\rho_0} > 0, i = 0,1,2,3,4.$

沿系统(2)，在控制律(10)的作用下，对上述李雅普诺夫函数关于时间求导数，并采用与定理 1 证明一样的方法，可得：

$$\dot{V} \leqslant -\rho\|S\|^2 - (1-\rho_0)[\varphi_0\tilde{d}_0\hat{d}_0 + \varphi_1\tilde{d}_1\hat{d}_1 + \varphi_2\tilde{d}_2\hat{d}_2 + \varphi_3\tilde{d}_3\hat{d}_3 + \varphi_4\tilde{d}_4\hat{d}_4].$$

考虑到：$\hat{d}_i\tilde{d}_i \geqslant \frac{1}{2}\tilde{d}_i^2 - \frac{1}{2}d_i^2$，进一步得出

$$\dot{V} \leqslant -a\|W\|^2 + \Xi.$$

其中：

$$W = [S^{\mathrm{T}},\tilde{d}_0,\tilde{d}_1,\tilde{d}_2,\tilde{d}_3,\tilde{d}_4],$$

$$\Xi = \frac{1-\rho_0}{2}[\varphi_0 d_0^2+\varphi_1 d_1^2 + \varphi_2 d_2^2 + \varphi_3 d_3^2 + \varphi_4 d_4^2] > 0$$

为常数，

$$a = \frac{1}{2}\min[2\rho,(1-\rho_0)\varphi_0,(1-\rho_0)\varphi_1,(1-\rho_0)\varphi_2,(1-\rho_0)\varphi_3,(1-\rho_0)\varphi_4] > 0.$$

因此，W 将一致终结有界．故存在常数 ε 及某一时刻 T_r，当 $t \geqslant T_r$ 时，恒有 $\|S\| \leqslant \varepsilon$，根据引理 2，可以得出 y_1 和 y_2 都将一致终结有界，故定理 2 得证.

4　结论(Conclusion)

针对一类非匹配不确定性系统，文中利用基于线性矩阵不等式的鲁棒控制器设计方法，提出了切

换函数设计方法,当切换函数为零时,对应的等效系统是渐近稳定的,当切换函数有界时,对应的等效系统将一致终结有界.进一步利用变结构控制设计方法设计控制器,由它保证系统满足滑模运动到达条件.在此基础上,结合参数在线估计方法,提出了一种自适应变结构控制器,其保证闭环系统是一致终结有界的.

参考文献(References)

[1] Gao Weibing. Theory and Design Approach for Variable Structure Control [M]. Beijing: Science Press, 1996

[2] Kim K S and Park Y. Robust sliding hyperplane design for parametric uncertain systems by Riccati approach [A]. Proceedings of the American Control Conference [C], Philadelphia, Pennsylvania, 1998, 579 - 583

[3] Kwan C M. Sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties [J]. Automatica, 1995, 31(2): 303 - 307

[4] Boyd S, Ghaoui L E and Feron E. Linear matrix inequalities in system and control theory [A]. SIAM Studies in Applied Mathematics [M]. Philadelphia, PA: SIAM Publishing House, 1995, 15: 24 - 29

[5] Corless M J and Leitmann G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimateboundness for uncertain dynamic systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1981, 26(5): 1139 - 1144

[6] Wu Hansheng. A class of state feedback controllers with simple structures for uncertain nonlinear dynamical systems [J]. Trans of Society of Instrument and Control Engineers, 1996, 32(4): 477 - 485

[7] Wang Leng. Stability Theory [M]. Beijing: Beijing University Publication, 1992, 12 - 44

本文作者简介

胡剑波 西安空军工程大学副教授.主要研究领域:过程自动化和智能化系统. Email: zjhjb@263.net

褚 健 1963年生.1982年毕业于浙江大学,1986~1989年留学日本京都大学,1989年获工学博士学位.现为浙江大学教授,博士生导师,"长江学者奖励计划"特聘教授.

(上接第104页)

参考文献(References)

[1] Zhong Shouming and Huang Tingzhu. Robust stabilization of uncertain multivariable feedback systems with multiple time delays [J]. Acta Automatica Sinica, 1998, 24(6): 837 - 839 (in Chinese)

[2] Lu H C and Chen B S. Stabilization of multivariable feedback systems with multiple time delays [J]. Int. J. Systems Science, 1988, 19(6): 953 - 966

[3] Wu H and Mizukami K. Robust stabilization of uncertain linear dynamical systems [J] Int. J. Systems Science, 1993, 24(2): 265 - 276

[4] Sun Jitao and Zhang Yinping. On the stability of linear differential equation with varying coefficients [J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(4): 642 - 645 (in Chinese)

[5] Sun Jitao. Stability and decay rate of interval time-varying dynamical system with multidelay [J]. Chinese J of Automation, 1996, 8(3): 243 - 247

[6] Silviu I N, Souza C E and Luc D, et al. Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(5): 743 - 748

本文作者简介

孙继涛 1963年生.同济大学应用数学系教授,美国数学学会会员,《数学评论》评论员,华南理工大学自动控制工程系在职博士生.对常微分方程理论与应用感兴趣,在国内外发表学术论文70余篇,获科技进步奖四项. Email: sunjt@sh163.net

邓飞其 1962年生.1983年,1987年分别于湖南大学,华南理工大学获理学学士学位,工学博士学位,现为华南理工大学自动控制工程系教授,博士生导师.主要研究方向为时滞系统,随机系统,大系统的控制理论.

刘永清 1930年生.华南理工大学电子与信息学院教授,博士生导师.主要研究方向为复杂系统及系统工程.

张银萍 女.1962年生.硕士,同济大学应用数学系副教授.对常微分方程理论与应用感兴趣.在国内外发表学术论文30余篇,获科技进步奖三项.