文章编号：1000-8152(2002)01-0139-04

一类混合动态系统的能控性和能观性研究*

谢广明 郑大钟
(北京清华大学自动化系·北京,100084)

摘要：针对一类混合动态系统——周期型线性切换系统,给出系统能控性、能观性的充分必要条件,并通过例子加以验证.

关键词：混合动态系统；周期型线性切换系统；能控性；能观性
文献标识码：A

Research on Controllability and Reachability of Hybrid Dynamical Systems

XIE Guangming and ZHENG Dazhong
(Department of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, P.R.China)

Abstract: Periodic-type linear switched systems, a special class of hybrid systems, is considered. The sufficient and necessary condition of controllability and observability is given. An example verifies the conclusion.

Key words: hybrid dynamical systems; periodic-type linear switched systems; controllability; observability

1 引言(Introduction)

近来,混合动态系统(hybrid dynamic systems,简称HDS)模型被广泛用于通讯网络系统、交通管理系统和生产制造系统等日趋复杂的人造系统的描述、分析和控制.目前许多学者根据不同的出发点提出的混合动态系统的模型很多,如混合自动机模型,混合Petri网模型,切换系统模型等等.其中切换系统模型作为混合动态系统一类重要模型,受到广泛关注,取得很多有意义的结果.文献[1]针对一般的切换系统,利用multiple Lapunov函数方法给出了判定系统在某一已知切换序列下稳定的充分条件.

本文讨论的切换系统的模型具有如下形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{\alpha(t)}x + B_{\alpha(t)}u, \\ y &= D_{\alpha(t)}x. \end{aligned} \tag{1}$$

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,y为q维输出向量,$\alpha(t):[0,+\infty)\mapsto\{1,2,\cdots,N\}$为分段常值函数,$A_i,B_i,D_i$均为相应维数的常阵,一组$(A_i,B_i,D_i)$称为一个切换模式,$N$为全部切换模式的总数.

这种模型可以用来描述诸如通讯网络等可预知的参数突变现象,即通过给出一个依赖于时间的"确定性"切换规则.也可以用来描述诸如元件、通讯失败等不可预知的参数突变现象,即通过某一随机过程,比如有限状态Markov链来描述切换模式的演变.本文将针对确定型模型,进一步规定系统的切换规则呈现周期性,分析系统的能控性、能观性.

为了便于描述系统的演变过程,定义切换序列如下:

定义1(切换序列) 表$i_m\in\{1,2,\cdots,N\}$为切换模式序号,$h_m>0$为切换模式持续时间,则称$\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^{M}=\{(i_1,h_1),(i_2,h_2),\cdots,(i_M,h_M)\}$为一个切换序列,记为$\pi$,其中$M$表示了切换序列的长度.

对于给定的一个切换系统,当给定初始时刻t_0和一个切换序列π后,切换模式的变化过程就完全确定.即,在$[t_0+\sum_{l=1}^{m-1}h_l,t_0+\sum_{l=1}^{m}h_l)$内,切换模式为$(A_{i_m},B_{i_m},D_{i_m})$,$\forall m=1,2,\cdots,M$.

当切换序列π以某一基本切换序列$\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^{M}$为周期循环变化的时候,就得到周期型切换系统.为描述上的符号简洁,不失一般性,就以如下形式的切换序列

$$\{(1,h_1),(2,h_2),\cdots,(N,h_N)\}$$

* 基金项目:国家自然科学基金(69925307),攀登计划预研项目(970211017),973国家基础研究基金(G1998020302)资助项目.
收稿日期:2000-01-10;收修改稿日期:2000-08-15.

作为基本切换序列,记为 π. 又记 $T = \sum_{i=1}^{N} h_i$, 称为系统的时间演变周期.

文献[2]给出了周期型切换系统一个周期之后能控制和能观性的定义及充分必要条件如下:

定义 2(能控性) 称周期型切换系统是能控的,如果对任意初始状态 x_0 经过一个周期之后能够到达任意状态 x_f.

定理 1(能控性的充分必要条件) 周期型切换系统能控的充分必要条件为能控性矩阵

$$\tilde{C} = [C_N, \exp(A_N h_N) C_{N-1}, \cdots, \exp(A_N h_N) \cdots \exp(A_2 h_2) C_1] \tag{2}$$

满秩,其中 C_i 为第 i 个切换子系统的能控性矩阵.

定义 3(能观性) 称周期型切换系统是能观的,如果任意初始状态 x_0 能够由 $y(t), t \in [t_0, T]$ 唯一确定.

定理 2(能观性的充分必要条件) 周期型切换系统能观的充分必要条件为能观性矩阵

$$\tilde{O} = \begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \exp(A_1 h_1) \\ \vdots \\ O_N \exp(A_{N-1} h_{N-1}) \cdots \exp(A_1 h_1) \end{bmatrix} \tag{3}$$

满秩,其中 O_i 为第 i 个切换子系统的能观性矩阵.

考察系统一个周期之后的状态演变是很有意义的,这是我们对呈现周期性的问题的一般处理态度. 然而经过理论分析和计算机仿真搜索,发现了一个经过多周期后系统能控的例子. 这说明仅仅讨论系统经过一个周期之后的能控性和能观性是有局限性的,并没有完全揭示系统的全部特性. 事实上,系统是有可能经过若干个周期实现任意状态的能控和能观. 本文采用一般的时变线性系统能控性和能观性的定义,首先讨论系统能达性与能控性,指出二者是等价的,然后给出判定能控性和能观性相应的充分必要条件,最后给出一个例子加以说明.

2 主要结果(Main result)

为便于叙述,先给出一些有关的概念和性质.

定义 4(列空间) 矩阵 $B_{n\times p}$ 的列空间为 $\mathbb{R}^n$ 中如下定义的一个线性空间:

$$R(B) = \{Bx \mid x \in \mathbb{R}^p\}. \tag{4}$$

显然列空间满足如下的性质 $R([B_1, B_2]) = R(B_1) + R(B_2)$. 这个性质反映出列空间实质是就由所有的列向量所张成的线性空间.

定义 5(循环不变子空间) 对矩阵 $A_{n\times n}$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中线性子空间 W, 称如下的一个线性空间

$$\langle A \mid W \rangle = W + AW + \cdots + A^{n-1} W \tag{5}$$

为子空间 W 经矩阵 A 循环而生成的 A 的不变子空间.

显然循环不变子空间满足如下的性质:

$$\forall k, A^k W \subseteq \langle A \mid W \rangle,$$

$$\forall h \in R,\ \exp(Ah) W \subseteq \langle A \mid W \rangle.$$

引理 1 给定矩阵 $A_{n\times n}, B_{n\times p}$, 则对 $\forall t_0, t_f, t_f > t_0 \geqslant 0$, 有

$$\{x \mid x = \int_{t_0}^{t_f} \exp(A(t_f - s)) Bu(s) \mathrm{d}s,\ u \text{ 为所有容许控制}\} = \langle A \mid R(B) \rangle. \tag{6}$$

此引理的证明类似于文献[3]的定理 7.8.1(p.353), 限于篇幅,此略.

下面首先给出系统能达的定义

定义 6(能达性) 对时变线性系统,设初始状态 $x(0) = 0$, 称系统为能达的,若对任意状态 x_f, 存在有限时刻 t_f 和容许输入 $u(t), t \in [0, t_f]$, 使得当系统演变到时刻 t_f 时,系统状态为 $x(t_f) = x_f$.

设初始状态为 $x(t_0) = 0$, 经过一个周期之后,系统状态 $x(t_N)$ 可以表示为

$$\exp(A_N h_N) \cdots \exp(A_2 h_2) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \exp(A_1(t_1 - \tau)) B_1 u \mathrm{d}\tau + \cdots +$$
$$\exp(A_N h_N) \cdot \int_{t_{N-2}}^{t_{N-1}} \exp(A_{N-1}(t_{N-1} - \tau)) B_{N-1} u \mathrm{d}\tau +$$
$$\int_{t_{N-1}}^{t_N} \exp(A_N(t_N - \tau)) B_N u \mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

其中 $t_i = \sum_{j=1}^{i} h_j, i = 1, \cdots, N$. 根据引理 1, 取遍所有可能的输入,所能达到的状态组成一个线性空间

$$\exp(A_N h_N) \cdots \exp(A_2 h_2) \langle A_1 \mid R(B_1) \rangle + \cdots +$$
$$\exp(A_N h_N) \langle A_{N-1} \mid R(B_{N-1}) \rangle + \langle A_N \mid R(B_N) \rangle. \tag{8}$$

进一步,根据能控性矩阵的定义,有

$$\exp(A_N h_N) \cdots \exp(A_2 h_2) R(C_1) + \cdots + \exp(A_N h_N) R(C_{N-1}) + R(C_N) = \tag{9}$$
$$R([C_N, \exp(A_N h_N) C_{N-1}, \cdots, \exp(A_N h_N) \cdots \exp(A_2 h_2) C_1]). \tag{10}$$

不难看出,上述线性空间即为 $R(\tilde{C})$.

经过类似的推导过程,我们可以得到系统经过 n 个周期后所有能达到的状态空间为

$$\bar{A}^{n-1} \exp(A_N h_N) \cdots \exp(A_2 h_2) R(C_1) + \cdots +$$
$$\bar{A}^{n-1} \exp(A_N h_N) R(C_{N-1}) + \bar{A}^{n-1} R(C_N) + \cdots +$$

$$\tilde{A}\exp(A_N h_N)\cdots\exp(A_2 h_2)R(C_1)+\cdots+$$
$$\tilde{A}\exp(A_N h_N)R(C_{N-1})+\tilde{A}R(C_N)+$$
$$\exp(A_N h_N)\cdots\exp(A_2 h_2)R(C_1)+\cdots+$$
$$\exp(A_N h_N)R(C_{N-1})+R(C_N). \tag{11}$$

其中

$$\tilde{A}=\exp(A_N h_N)\cdots\exp(A_2 h_2)\exp(A_1 h_1).$$

可以将其简写为

$$\tilde{A}^{n-1}R(\tilde{C})+\cdots+\tilde{A}R(\tilde{C})+R(\tilde{C})=\langle\tilde{A}\mid R(\tilde{C})\rangle. \tag{12}$$

根据循环不变子空间的性质,对任意的 $m>n$,都有 $\tilde{A}^{m-1}R(\tilde{C})\in\langle\tilde{A}\mid R(\tilde{C})\rangle$,这表明即使经过多于 n 个周期的演变,其所可能达到的状态均在线性空间 $\langle\tilde{A}\mid R(\tilde{C})\rangle$ 之内. 由此可知,线性空间 $\langle\tilde{A}\mid R(\tilde{C})\rangle$ 即为周期型切换系统所有能达状态组成的集合,并且可知其构成线性空间.

定理 3 周期型切换系统能控等价于能达.

为了证明这个定理,我们考察系统所有能控状态组成的集合,然后分析这个集合与所有能达状态组成的集合之间的关系,利用这个关系很容易证明定理 3.

根据能控性的定义,对基本切换序列 π,所有能控的状态组成的集合可以描述为

$$\{x\mid\tilde{A}x+\exp(A_N h_N)\exp(A_{N-1}h_{N-1})\cdots$$
$$\exp(A_2 h_2)\int_0^{t_1}\exp(A_1(t_1-s))B_1 u\,\mathrm{d}s+\cdots+$$
$$\int_{t_{N-1}}^{t_N}\exp(A_N(t_N-s))B_N u\,\mathrm{d}s=0\}= \tag{13}$$
$$\{x\mid\tilde{A}x=\exp(A_N h_N)\exp(A_{N-1}h_{N-1})\cdots$$
$$\exp(A_2 h_2)\int_0^{t_1}\exp(A_1(t_1-s))B_1 u\,\mathrm{d}s)\}+\cdots+$$
$$\int_{t_{N-1}}^{t_N}\exp(An(t_N-s)B_N u\,\mathrm{d}s)\}= \tag{14}$$
$$\tilde{A}^{-1}\{\exp(A_N h_N)\exp(A_{N-1}h_{N-1})\cdots$$
$$\exp(A_2 h_2)\int_0^{t_1}\exp(A_1(t_1-s))B_1 u\,\mathrm{d}s+\cdots+$$
$$\int_{t_{N-1}}^{t_N}\exp(A_N(t_N-s)B_N u\,\mathrm{d}s)\}= \tag{15}$$
$$\tilde{A}^{-1}R(\tilde{C}). \tag{16}$$

同样考虑经过 n 个周期之后系统的能控集,这里为了节省篇幅,仅给出最后结果为

$$\tilde{A}^{-n}\langle\tilde{A}\mid R(\tilde{C})\rangle. \tag{17}$$

易知式(17)就是$\langle\tilde{A}\mid R(\tilde{C})\rangle$,这表明能控状态集合与能达状态集合是同一个集合,也就是同一个线性空间,也就证明了定理 3.

同时我们得到了系统能控的充分必要条件.

定理 4 周期型切换系统能控的充分必要条件为

$$\langle\tilde{A}\mid R(\tilde{C})\rangle=\mathbb{R}^n. \tag{18}$$

定理 4 的结论是显然的.

根据对偶原理,我们又得到系统能观的充分必要条件.

定理 5(能观性的充分必要条件) 周期型切换系统能观的充分必要条件为

$$\langle\tilde{A}^{\mathrm{T}}\mid R(\tilde{O}^{\mathrm{T}})\rangle=\mathbb{R}^n. \tag{19}$$

其中 $\tilde{A}^{\mathrm{T}},\tilde{O}^{\mathrm{T}}$ 分别表示矩阵 $\tilde{A},\tilde{O}$ 的转置.

3 例子(Example)

下面给出一个系统能控的具体例子.

例 1 设

$$N=2,\ A_1=\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}r_1&&\\&\ddots&\\&&r_n\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ h_1=h_2=1,$$

其中 $r_i\neq0$ 且互异.

经计算得

$$\tilde{C}=[C_2,\exp(A_2h_2)C_1]=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\exp(r_1)&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&0&\exp(r_n)&\cdots&0\end{bmatrix},$$

其秩为 1. 根据定理 1,该系统不能控. 再计算

$$\tilde{A}=\exp(A_2h_2)\exp(A_1h_1)=\begin{bmatrix}\exp(r_1)&&\\&\ddots&\\&&\exp(r_n)\end{bmatrix},$$

考察线性空间 $\langle\tilde{A}\mid R(\tilde{C})\rangle$,可得到其一组基构成的矩阵

$$\begin{bmatrix}\exp(r_1)&\exp^2(r_1)&\cdots&\exp^n(r_1)\\\exp(r_2)&\exp^2(r_2)&\cdots&\exp^n(r_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\exp(r_n)&\exp^2(r_n)&\cdots&\exp^n(r_n)\end{bmatrix}.$$

很容易看出,这是一个范得蒙矩阵,其必满秩. 根据定理 4,系统能控.

事实上,设初始状态为 0,依次取每个周期中模式 1 的输入为常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,经过 n 个周期之

后,系统状态可表为

$$\begin{bmatrix} x_1(2n) \\ x_2(2n) \\ \vdots \\ x_n(2n) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \exp^n(r_1) & \exp^n(r_2) & \cdots & \exp^n(r_n) \\ \exp^{n-1}(r_1) & \exp^{n-1}(r_2) & \cdots & \exp^{n-1}(r_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(r_1) & \exp(r_2) & \cdots & \exp(r_n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \tag{20}$$

不难看出,通过选择不同的控制输入,可以到达任意状态.由此系统完全能控.此例表明一个周期不能实现能控,而要由多周期实现.

4 结论(Conclusion)

本文给出周期型切换系统能控性和能观性的充分必要条件,同时指出能控性和能达性是等价的,并通过例子加以验证.此外,我们还可以得到以下结论:

1) 周期型切换系统能控性的实现不仅局限于一个周期内;

2) 周期型切换系统若能控,则至多在 n 个周期内实现能控.

针对此类系统,还可以有进一步的工作,比如系统能控之后如何镇定等等,有待深入研究.

参考文献(References)

[1] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998,43(4):475 – 482

[2] Ezzine J and Haddad H H. Controllability and observability of hybrid systems [J]. Int. J. Control, 1989,49(6):2045 – 2055

[3] Huang Lin. Linear Algebra in System and Control Theory [M]. Beijing: Science Press, 1986

本文作者简介

谢广明 1972年生.2001年于清华大学自动化系获得控制理论与控制工程博士学位,同年入北京大学力学与工程科学系作博士后研究工作.主要研究方向为混合动态系统和切换系统的建模,分析与控制. Email:xiegming@263.net

郑大钟 见本刊2002年第1期第33页