

不确定非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制分析与综合*

吴 敏 张凌波 桂卫华

(中南大学信息科学与工程学院·长沙·410083)

摘要: 讨论一类仿射非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 针对自由系统, 外部干扰输入矩阵和控制输入矩阵都具有加法不确定性的系统, 将鲁棒性能的综合归结为求解一组 Hamilton-Jacobi 不等式, 给出了确保非线性控制系统满足鲁棒干扰抑制性能的充分条件, 获得了非线性鲁棒控制器的一种形式. 一个仿真例子验证了所得结论的正确性.

关键词: 非线性系统; 加法不确定性; H_∞ 控制; 鲁棒干扰抑制性能; Hamilton-Jacobi 不等式

文献标识码: A

Analysis and Synthesis for Robust H_∞ Control of Uncertain Nonlinear Systems

WU Min, ZHANG Lingbo and GUI Weihua

(College of Information Science and Engineering, Central South University · Changsha, 410083, P. R. China)

Abstract: The paper deals with the robust H_∞ control problem of a class of affine nonlinear systems. For the systems where there exist additive uncertainties in the free system, the external disturbance input matrix and the control input matrix, analysis and synthesis of robust performance are reduced to solving a set of Hamilton-Jacobi inequalities. Sufficient conditions for guaranteeing the nonlinear control system to meet the robust disturbance attenuation performance are given, and the formulation of the nonlinear robust controller is obtained in this paper. A simulation example shows the correctness of the conclusions proposed.

Key words: nonlinear systems; additive uncertainty; H_∞ control; robust disturbance attenuation performance; Hamilton-Jacobi inequality

1 引言(Introduction)

非线性系统的鲁棒控制近年来受到了广泛的关注. 利用 H_∞ 范数与 L_2 增益的等价关系, 线性 H_∞ 控制已成功地扩展到非线性系统. 在系统不确定性仅考虑外部干扰的场合, 从耗散性理论和微分对策理论出发, 基于 L_2 增益研究非线性 H_∞ 控制问题, 获得了依赖于 Hamilton-Jacobi 不等式的非线性 H_∞ 控制器及其存在的条件^[1-6]. 在此基础上, 进一步研究了系统同时存在着外部干扰和模型不确定性的情况, 即非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 文[7]对非线性系统的自由系统具有加法不确定性的情形进行了讨论. 文[8,9]研究了自由系统和控制输入矩阵同时具有加法不确定性的非线性输出反馈 H_∞ 控制问题, 文[10]在文[7]的基础上进一步讨论了控制输入矩阵具有乘法不确定性的情形.

然而, 上述已有的结果均未涉及到外部干扰输

入矩阵具有不确定性的情况. 本文在已有工作的基础上, 针对非线性系统的自由系统, 控制输入矩阵和外部干扰输入矩阵均具有加法不确定性的情形, 讨论不确定仿射非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 研究对象的不确定性较已有的工作更加广泛. 通过将鲁棒干扰抑制性能的综合归结为求解一组 Hamilton-Jacobi 不等式, 获得了使系统满足鲁棒干扰抑制性能的鲁棒 H_∞ 控制问题可解的充分条件, 给出了相应的非线性鲁棒控制器的形式, 并通过仿真例子验证了其正确性.

2 问题描述(Problem description)

考虑具有加法模型不确定性的一类仿射非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} = & f(x) + \Delta f(x) + [g_1(x) + \Delta g_1(x)]w + \\ & [g_2(x) + \Delta g_2(x)]u, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$z = h(x) + k(x)u. \quad (1b)$$

* 基金项目: 国家博士点基金(2000053303)和国家自然科学基金(69374014)资助项目.

收稿日期: 2000-06-28; 收修改稿日期: 2001-03-01.

其中 $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^l, u \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^s$ 分别表示系统的状态, 干扰输入, 控制输入和控制输出. $f(x) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, g_1(x) \in \mathbb{R}^{n \times l}, g_2(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}, k(x) \in \mathbb{R}^{s \times n}$ 均为光滑的矩阵函数. $\Delta f(x), \Delta g_1(x), \Delta g_2(x)$ 为具有相应维数的模型不确定性. x_0 为系统的初始状态, 且以上函数和模型不确定性在初始状态均为 0.

对上述非线性系统, 作以下假设:

1) 以 Ω 表示不确定性 $\Delta f(x)$ 的集合. 对任意 $\Delta f(x) \in \Omega$, 自由系统 $\dot{x} = f(x) + \Delta f(x)$ 是零状态可观测的;

2) $\Delta f(x) = e(x)\delta(x)$, 其中 $e(x) \in \mathbb{R}^{n \times p}, \delta(x) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 分别是已知和未知的光滑函数, 且 $\delta(x)$ 满足 $\|\delta(x)\| \leq l(x), l(x)$ 为非负函数;

3) 设 G 和 G_2 分别是具有相应维数的光滑矩阵函数, 有

$$\Delta g_1(x)\Delta g_1^T(x) \leq GG^T, \quad (2a)$$

$$\Delta g_2(x)\Delta g_2^T(x) \leq G_2G_2^T; \quad (2b)$$

$$4) k^T(x)[h(x) \quad k(x)] = [0 \quad I].$$

关于零状态可观测的假设 1) 是为了保证系统的内部稳定性. 零状态可观测有下面的定义^[1].

定义 1 如果非线性系统的干扰输入 $w(t) \equiv 0$, 且控制输入 $u(x) \equiv 0$, 有任意满足控制输出 $z(t) \equiv 0$ 的解 $x(t) \equiv x_0$, 则称系统是零状态可观测的.

其余的假设是对本文中所考虑的系统不确定性和系统模型的一些限制.

下面给出本文所讨论的非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题的定义. 首先给出非线性系统具有鲁棒干扰抑制性能的定义.

定义 2 如果非线性系统(1)内部稳定, 并且从干扰输入 w 到控制输出 z 的 L_2 增益小于一个给定的正常数 γ , 即

$$\int_0^T \|z\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w\|_2^2 dt. \quad (3)$$

其中 $T \geq 0$, 那么称这个非线性系统具有鲁棒干扰抑制性能.

定义 3 本文所考虑的非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题是, 对于仿射非线性系统(1), 设计适当的控制律 u , 使得非线性控制系统具有鲁棒干扰抑制性能.

在本文中, 为了叙述的方便, 不失一般性地取 $\gamma = 1$.

3 主要结果(Main results)

在非线性系统的 H_∞ 控制研究中, 已经获得的以下结论是本文工作的基础. 文[1]针对光滑的非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)w, \quad (4a)$$

$$z = h(x) \quad (4b)$$

获得了以下结论.

引理 1 假设非线性系统(4)是零状态可观测的. 如果存在光滑的非负定标量函数 $V(x)$, 满足 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\begin{cases} V_x f(x) + \frac{1}{2} V_x g_1(x) g_1^T(x) V_x^T + \\ \frac{1}{2} h(x) h^T(x) \leq 0, \\ V(x_0) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

那么它具有鲁棒干扰抑制性能.

3.1 鲁棒性能分析(Robustness analysis)

考虑非线性系统(1)在无控制输入的情况, 即

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + [g_1(x) + \Delta g_1(x)]w, \quad (6a)$$

$$z = h(x), \quad (6b)$$

本文得到下述结论.

定理 1 对于满足假设条件的非线性系统(6), 它具有鲁棒干扰抑制性能充分条件是存在光滑的非负标量函数 $V(x), V(x_0) = 0$, 以及恒大于 0 的标量函数 $\lambda(x)$ 和 $\mu(x)$, 使得以下 Hamilton-Jacobi 不等式成立.

$$V_x f(x) + \frac{1}{2} V_x [\lambda e(x) e^T(x) + (1 + \mu) g_1(x) g_1^T(x) + \frac{1}{\mu} GG^T] V_x^T + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} l^2(x) + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0. \quad (7)$$

证 由引理 1 可知, 系统的干扰抑制问题可解的充分条件是

$$V_x f(x) + V_x \Delta f(x) + \frac{1}{2} V_x [g_1(x) + \Delta g_1(x)] \cdot [g_1(x) + \Delta g_1(x)]^T V_x^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0. \quad (8)$$

利用范数的性质, 可得

$$\begin{aligned} & V_x f(x) + V_x \Delta f(x) + \frac{1}{2} V_x [g_1(x) + \Delta g_1(x)] [g_1(x) + \Delta g_1(x)]^T V_x^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq \\ & V_x f(x) + \|V_x e(x)\| \|\delta(x)\| + \frac{1}{2} V_x [g_1(x) g_1^T(x) + \Delta g_1(x) \Delta g_1^T(x)] V_x^T + \\ & V_x g_1(x) \Delta g_1^T(x) V_x^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq \\ & V_x f(x) + \|V_x e(x)\| \|\delta(x)\| + \frac{1}{2} V_x [g_1(x) g_1^T(x) + \Delta g_1(x) \Delta g_1^T(x)] V_x^T + \\ & \|V_x g_1(x)\| \|\Delta g_1^T(x) V_x^T\| + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq \\ & V_x f(x) + \frac{1}{2} V_x [\lambda e(x) e^T(x) + (1 + \mu) g_1(x) g_1^T(x) + \\ & (1 + \frac{1}{\mu}) GG^T] V_x^T + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} l^2(x) + \frac{1}{2} h^T(x) h(x). \quad (9) \end{aligned}$$

由(7)和(9)式可知不等式(8)成立. 证毕.

注 1 定理 1 是文[7]中定理 1 的推广. 当系统的干扰输入矩阵 $g_1(x)$ 不具有不确定性, 即 $\Delta g_1(x) = 0$ 时, 定理 1 类似于文[7]中定理 1. 不同之处在于: 文[7]中定理 1 是通过构造辅助系统, 利用耗散性的结论来获得; 而本文中定理 1 的证明是直接从事范数的性质出发, 证明过程显示文[7]中定理 1 关于标量函数 $\lambda(x)$ 的连续性要求是不必要的.

3.2 鲁棒控制器综合(Robust controller synthesis)

考虑非线性系统(1)在 $\Delta g_2(x) = 0$ 的场合, 即

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + [g_1(x) + \Delta g_1(x)]w + g_2(x)u, \quad (10a)$$

$$z = h(x) + k(x)u. \quad (10b)$$

定理 2 对于满足假设条件的非线性系统(10), 如果存在光滑的非负标量函数 $V(x)$, $V(x_0) = 0$, 和恒大于 0 的标量函数 $\lambda(x)$, $\mu(x)$, 使得 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\begin{aligned} & V_x f(x) + \frac{1}{2} V_x [\lambda e(x) e^T(x) + (1+\mu) g_1(x) g_1^T(x) + \\ & (1 + \frac{1}{\mu}) G G^T - g_2(x) g_2^T(x)] V_x^T - \\ & g_2(x) g_2^T(x) V_x^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

成立, 那么使系统(10)具有鲁棒干扰抑制性能的一个控制器的形式为

$$u = -g_2^T(x) V_x^T. \quad (12)$$

证 类似于定理 1 的证明, 此处略.

注 2 定理 2 是文[7]中定理 2 的推广, 当 $\Delta g_1(x) = 0$ 时, 即为文[7]中定理 2.

考虑非线性系统(1), 本文得到以下结论.

定理 3 对于满足假设条件的非线性系统(1), 如果存在光滑的非负标量函数 $V(x)$, $V(x_0) = 0$, 以及恒大于 0 的标量函数 $\lambda(x)$, $\mu(x)$ 和 $\tau(x)$, 使得 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\begin{aligned} & V_x f(x) + \frac{1}{2} V_x [\lambda e(x) e^T(x) + (1+\mu) g_1(x) g_1^T(x) + \\ & (1 + \frac{1}{\mu}) G G^T - (1-\tau) g_2(x) g_2^T(x) + \frac{1}{\tau} G_2 G_2^T] V_x^T + \\ & \frac{1}{2} h^T(x) h(x) + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} l^2(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

成立, 那么使系统(1)具有鲁棒干扰抑制性能的一个控制器的形式为

$$u = -g_2^T(x) V_x^T. \quad (14)$$

证 类似于定理 1 的证明, 此处略.

注 3 当系统(1)的干扰输入矩阵不具有模型

不确定性, 并且要求 $\lambda(x) = \tau(x)$ 时, 定理 3 与文[9]中的命题 1 相似. 只需要在证明过程中以不等式

$$\begin{aligned} & V_x \{f(x) + \Delta f(x) + [g_1(x) + \\ & \Delta g_1(x)]w + [g_2(x) + \Delta g_2(x)]u\} \leq \\ & \|w\|^2 - \|z\|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

替代(17)式即可得文[9]中的命题 1. 就实质而言, (17)式和(19)式是一致的.

注 4 在定理 2 和定理 3 中, 通过求解相应 Hamilton-Jacobi 不等式, 得到的是一个合适的控制器, 但并不一定是唯一的. 如何寻求最优的扰动抑制性能, 这是一个有待于进一步研究的问题.

4 举例(Illustration)

考虑非线性系统(1), 其中 $x = [x_1 \ x_2]^T$, $x_0 = [0 \ 0]^T$, 而且

$$f(x) = \begin{bmatrix} -4.5x_1 + 2x_2 - 5x_2^2 \\ -6.25x_2 + 5x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} g_1(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \cos(x_1) & -\sqrt{2}/2 \cos(x_1) \\ \sqrt{2}/2 \sin(x_2) & \sqrt{2}/2 \sin(x_2) \end{bmatrix}, \\ g_2(x) = [2 \ 1]^T, \end{cases} \quad (17)$$

$$h(x) = [x_1 - x_2 \ 0]^T, \quad k(x) = [0 \ u]^T, \quad (18)$$

$$\Delta f(x) = [\epsilon x_1 \sin(x_2) \ \rho x_2 \cos(x_1)]^T, \quad (19)$$

$$\begin{cases} \Delta g_1(x) = \begin{bmatrix} \alpha \sqrt{2}/2 \sin(x_1x_2) & -\alpha \sqrt{2}/2 \sin(x_1x_2) \\ \beta \sqrt{2}/2 \cos(x_2) & \beta \sqrt{2}/2 \cos(x_2) \end{bmatrix}, \\ \Delta g_2(x) = [a \ b]^T. \end{cases} \quad (20)$$

$\epsilon, \rho, \alpha, \beta, a, b$ 是在区间 $[0 \ 1]$ 上变化的未知数.

很显然, 这时的非线性系统(1)满足第 2 节中的 4 个假设条件. 选择非负函数

$$V(x) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad (21)$$

显然有 $V(x_0) = 0$. 这时存在 $\lambda = \mu = 1, \tau = 0.5$ 使不等式(13)成立. 根据定理 3 和(14)式, 非线性系统的控制器为

$$u = -(2x_1 + x_2) \quad (22)$$

时, 系统内部稳定, 从系统的干扰输入 w 到系统的控制输出 z 的 L_2 增益小于一个给定的正数 1. 可见, 闭环控制系统具有鲁棒干扰抑制性能.

为验证结论的正确性, 运用 Matlab 软件中的 Simulink 工具箱对系统进行仿真. 假设干扰输入 w_1 和 w_2 为如图 1 和图 2 所示的脉冲信号, 则闭环控制系统的状态 x_1 和 x_2 如图 3 和图 4 所示, 干扰输入和控制输出的 L_2 范数分别如图 5 和图 6 所示. 仿真结果证明了本文所得结论的正确性.

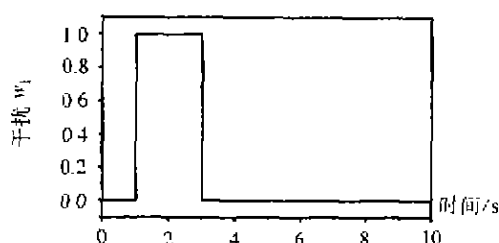


图1 干扰输入 w_1
Fig. 1 Disturbance input w_1

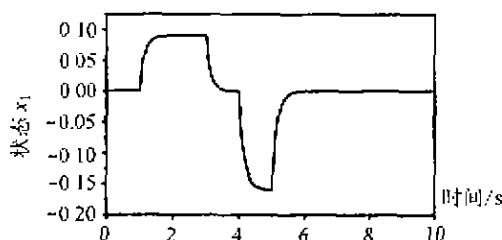


图3 系统状态 x_1
Fig. 3 system state x_1

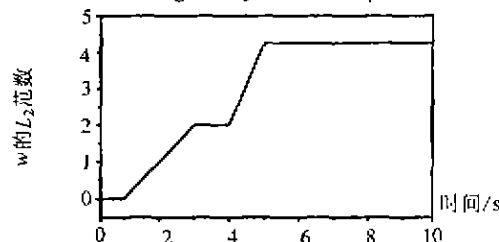


图5 干扰 w 的 L_2 范数
Fig. 5 L_2 norm of disturbance w

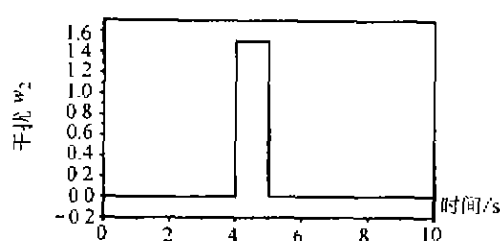


图2 干扰输入 w_2
Fig. 2 Disturbance input w_2

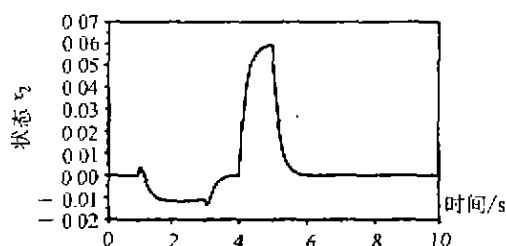


图4 系统状态 x_2
Fig. 4 system state x_2

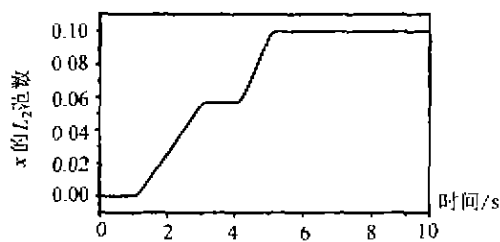


图6 控制输出 z 的 L_2 范数
Fig. 6 L_2 norm of control output z

5 结论(Conclusion)

本文在前人工作的基础上,进一步考虑了干扰输入矩阵存在不确定性的非线性系统鲁棒 H_∞ 控制问题.针对一类非线性系统,在自由系统、干扰输入矩阵和控制输入矩阵均存在加法不确定性的情形,分别讨论了鲁棒 H_∞ 控制的分析与设计问题.通过将鲁棒控制问题转化为一类 Hamilton-Jacobi 不等式的可解性问题,获得了非线性控制鲁棒干扰抑制性能的充分条件,并得到了使非线性控制系统具有鲁棒干扰抑制性能的一类状态反馈控制器的形式.

参考文献(References)

- [1] Van Der Schaft A J. L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(6):770-784
- [2] Imura J, Sugie T and Yoshikawa T. A Hamilton-Jacobi inequality approach to the strict H_∞ control problem of nonlinear systems [J]. Automatica, 1996, 32(4):645-650
- [3] Yung C F, Wu J L and Lee T T. Parameterization of nonlinear H_∞ control state-feedback controllers [J]. Automatica, 1997, 33(8):1587-1590
- [4] Isidori A, Schwartz B and Tam T J. Semiglobal L_2 performance bounds for disturbance attenuation in nonlinear systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1999, 44(8):1535-1545

- [5] Wu M and Gui W H. Advance Robust Control [M]. Changsha: Central South University of Technology, 1998
- [6] Zhang L B, Wu M and Gui W H. On robust control of nonlinear systems [A]. Automation Theory, Technology and Application [M]. Beijing: Xiyuan Press, 1999, 6:40-45
- [7] Shen T and Tamura K. Robust H_∞ control of uncertain nonlinear system via state feedback [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, 40(4):766-768
- [8] Nguang S K. Robust nonlinear H_∞ -output feedback control [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(7):1003-1007
- [9] Lu G P and Zheng Y F. Robust H_∞ control of a class of nonlinear systems with parameter uncertainty [J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(3):388-392
- [10] Wang X D, Gao L Q and Zhang S Y. Robust H_∞ control of a class of uncertain nonlinear systems via state feedback [J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(2):221-225

本文作者简介

吴敏 1963年生,1986年于中南大学自动化专业获硕士学位,1999年获日本东京工业大学博士学位.现为中南大学教授、博士生导师.主要研究兴趣:鲁棒控制、非线性控制和过程控制. Email: min@csut.edu.cn

张凌波 1974年生,博士研究生.1997年毕业于湖南师范大学数学系,获理学学士学位,2000年毕业于中南工业大学自动控制工程系,获工学硕士学位.研究领域为:非线性控制和鲁棒控制.

桂卫华 1950年生,中南大学信息科学与工程学院教授、博士生导师.目前主要研究方向是分散控制,理论及应用,鲁棒控制,复杂生产过程建模与控制.