文章编号: 1000-8152(2002)04-05-0511

广义哈密顿实现及其在基于能量的准 Lyapunov 函数构造中的应用*

王玉振[1], 程代展[2]
(1.清华大学 自动化系,北京 100084; 2.中国科学院 系统科学研究所,北京 100080)

摘要: 首先研究一般非线性系统的 Hamilton 实现问题,给出了两个实现的充分条件;然后应用所得到的结果研究广义受控耗散 Hamilton 系统的基于能量的准 Lyapunov 函数构造问题,给出若干能通过改造 Hamilton 函数得到准 Lyapunov 函数的充分条件.

关键词: 广义 Hamilton 实现; 受控耗散 Hamilton 系统; 准 Lyapunov 函数
中图分类号: O231.2 **文献标识码**: A

Generalized Hamiltonian realization and its application in construction of energy-based Lyapunov candidates

WANG Yu-zhen[1], CHENG Dai-zhan[2]
(1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
2. Institute of Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract: This paper deals with the problem of generalized Hamiltonian realization of nonlinear systems and proposes several sufficient conditions for the realization. As an application, this paper studies how to modify total energy functions (Hamiltonian functions) of forced Hamiltonian systems to generate the systems' Lyapunov candidates.

Key words: generalized Hamiltonian realization; forced dissipative Hamiltonian systems; Lyapunov candidate

1 引言(Introduction)

广义 Hamilton 控制系统的一般形式为[1,2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = T(x)\dfrac{\partial H}{\partial x} + g(x)u, \\ y = g^{\mathrm{T}}(x)\dfrac{\partial H}{\partial x}. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中, $u \in \mathbb{R}^m, x \in M$, M 是一个 n 维伪 Poision 流形[1], $T(x)$ 是相应伪 Poission 括号的结构矩阵;在[1]的意义下, $T(x)$ 已扩展为任意矩阵; $H(x)$ 是 Hamilton 函数.广义 Hamilton 系统结构清晰、物理意义明确, Hamilton 函数 $H(x)$ 是系统的广义能量.在一定条件下, $H(x)$ 构成系统的基于能量的 Lyapunov 函数,这在系统的稳定性分析或镇定控制中起重要作用[1,3~5].能否把这种基于能量的 Lyapunov 函数的思想应用到一般非线性控制中?这就产生了所谓的 Hamilton 实现问题,即如何把一个给定的系统化为 Hamilton 系统.关于 Hamilton 实现,目前虽有一些成果[6~8],但还没有系统的、易于操作的实现方法.

当 $T(x)$ 中不含非耗散部分时,式(1.1)变成:

$$\begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x))\dfrac{\partial H}{\partial x} + g(x)u, \\ y = g^{\mathrm{T}}(x)\dfrac{\partial H}{\partial x}. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中, $J(x)$ 反对称, $R(x) \geqslant 0$ 对应系统的耗散项.称式(1.2)为广义受控耗散 Hamilton 系统.当 $u = 0$ 时,由式(1.2)得

$$\frac{dH}{dx} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} R \frac{\partial H}{\partial x} \leqslant 0. \tag{1.3}$$

这表明,系统的总能量 $H(x)$ 是 $u = 0$ 时的准 Lyapunov 函数.进一步,若 $H(x)$ 在平衡点取得极小值,则 $H(x)$ 构成一个真正的 Lyapunov 函数[4,5].然而,在许多其它情况下[3~5], $u \neq 0$, (1.3)不再成立,即 Hamilton 函数 $H(x)$ 不再是系统(1.2)的准 Lyapunov 函数.文[4,5]对 u = 常数 $\bar{u} \neq 0$ 的情况进行了研究,提出了一种嵌入法(embedding),通过把系统(1.2)嵌入到一种扩张 Hamilton 系统中得到式(1.2)的准 Lyapunov 函数.随后,文[3]把该方法成功地应

* 基金项目:国家自然科学基金(G59837270,G69774008)和 973 项目(G1998020308)资助项目.
收稿日期:2000-08-01; 收修改稿日期:2001-05-09.

用到电力系统励磁控制中.关于上述问题的研究,目前还仅限于 u = 常数 $\bar{u} \neq 0$ 的情况.然而更一般的情况应是 $u = u(x) \neq 0$,即控制取为状态反馈的情况.在这种情况下如何构造系统(1.2) $|_{u=u(x)}$ 的基于能量的准 Lyapunov 函数?

本文首先研究广义 Hamilton 实现方法,给出实现的几个充分条件,然后作为应用,在 $u = u(x) \neq 0$ 下,讨论式(1.2)的基于能量的准 Lyapunov 函数构造问题,给出几个能通过改造 Hamilton 函数得到准 Lyapunov 函数的充分条件.

2 广义 Hamilton 实现(Generalized Hamiltonian realization)

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

定义 1 称系统(2.1)有一个 Hamilton 实现,如果存在一个适当的坐标卡及一个 Hamilton 函数,使得式(2.1)能表示为一个广义 Hamilton 系统

$$\dot{x} = T(x)\nabla H. \tag{2.2}$$

其中,$T(x)$ 是 $n \times n$ 矩阵,称为结构矩阵.

记

$$A_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}},\ a_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{2.3}$$

构造如下方程:

$$\begin{bmatrix} A_2 & -A_1 & & & \\ A_3 & & -A_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ A_n & & & & -A_1 \\ & A_3 & -A_2 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & A_n & & & -A_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & & A_n & -A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \\ \vdots \\ X_n(x) \end{pmatrix} = 0, \tag{2.4}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_2 & -a_1 & & & \\ a_3 & & -a_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n & & & & -a_1 \\ & a_3 & -a_2 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & a_n & & & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_n & -a_{n-1} \end{bmatrix} \otimes I_n\right) \begin{pmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \\ \vdots \\ X_n(x) \end{pmatrix} = 0. \tag{2.5}$$

其中,$X_i(x)(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 n 维向量场,$\otimes$ 是 Kronecker 积,I_n 为单位阵.A_i 是行向量,a_i 在式(2.5)中以标量看待,并规定

$$a_i \cdot h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_i},\ i = 1,2,\cdots,n,$$

$h(x)$ 是一种标量函数.

定理 1 若联立方程组(2.4)和(2.5)具有解 $(X_1^{\mathrm{T}}(x),\cdots,X_n^{\mathrm{T}}(x))^{\mathrm{T}}$ 且 $X_1(x),X_2(x),\cdots,X_n(x)$ 独立,则存在 Hamilton 函数 $H(x)$ 使系统(2.1)表示为

$$\dot{x} = T(x)\nabla H. \tag{2.6}$$

其中,$T(x) = (X_1(x),\cdots,X_n(x))^{-\mathrm{T}}$.

证 记

$$(X_1(x),\cdots,X_n(x))^{\mathrm{T}}f(x) \triangleq (h_1(x),\cdots,h_n(x))^{\mathrm{T}}.$$

则 $h_i(x) = X_i^{\mathrm{T}}(x)f(x),\ i = 1,2,\cdots,n$. 因此

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_i^{\mathrm{T}}}{\partial x_j}f(x) + X_i^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial f}{\partial x_j},\ i,j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.7}$$

因为 $(X_1^{\mathrm{T}}(x),\cdots,X_n^{\mathrm{T}}(x))^{\mathrm{T}}$ 满足式(2.4),不难得知 $A_iX_j(x) = A_jX_i(x),i,j = 1,2,\cdots,n$. 再由式(2.3)知道

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}}X_j(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}}X_i(x),\ i,j = 1,2,\cdots,n, \tag{2.8}$$

又 $(X_1^{\mathrm{T}}(x),\cdots,X_n^{\mathrm{T}}(x))^{\mathrm{T}}$ 满足式(2.5),则 $(a_iI_n)X_j(x) = (a_jI_n)X_i(x)$,这等价于

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j},\ i,j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.9}$$

由式(2.7)~式(2.9),不难得知

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j},\ i,j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.10}$$

由 Poincare 引理知,存在函数 $H(x)$ 使得

$$\frac{\partial H}{\partial x} = (h_1(x),\cdots,h_n(x))^{\mathrm{T}} = (X_1(x),\cdots,X_n(x))^{\mathrm{T}}f(x). \tag{2.11}$$

又因为 $X_1(x),X_2(x),\cdots,X_n(x)$ 独立,所以 $(X_1(x),\cdots,X_n(x))^{\mathrm{T}}$ 可逆.再由式(2.11)知定理成立. 证毕.

注 定理 1 的 Hamilton 函数 $H(x)$ 可由下式求得

$$H(x) = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} h_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1 + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} h_2(x_1^{(0)},x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2 + \cdots + \int_{x_n^{(0)}}^{x_n} h_n(x_1^{(0)},\cdots,x_{n-1}^{(0)},x_n)\mathrm{d}x_n. \tag{2.12}$$

其中，$h_i = X_i^{\mathrm{T}} f(x), i = 1,2,\cdots,n,(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 是系统定义域内的任一点.

推论 1　若方程(2.4)具有常值解 $\{X_1,\cdots,X_n\}$，$X_i \in \mathbb{R}^n$ 且 $X_1,\cdots,X_n$ 线性无关，则系统(2.1)有一个常值 Hamilton 实现

$$\dot{x} = M \nabla H. \tag{2.13}$$

其中，$M = (X_1,\cdots,X_n)^{-\mathrm{T}}$.

证　因为 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是满足式(2.4)的常值解，所以 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 显然也满足式(2.5)，又 $X_1,\cdots,X_n$ 线性无关，由定理 1 知，推论 1 成立.　证毕.

定理 2　若系统(2.1)的 Jaccobi 矩阵 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 可逆，则系统(2.1)可 Hamilton 实现为

$$\dot{x} = T(x) \nabla H.$$

其中

$$T(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}}, \ H(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x). \tag{2.14}$$

证　取 $X_i(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i},\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i},\cdots,\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}}, i = 1,\cdots,n$. 不难验证 $\{X_1(x),\cdots,X_n(x)\}$ 满足方程(2.4)和(2.5)又 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = (X_1(x),\cdots,X_n(x))^{\mathrm{T}}$ 可逆，由定理 1 知，系统(2.1)可表示为

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}} \nabla H. \tag{2.15}$$

下面求 $H(x)$. 由式(2.15)知：

$$\nabla H = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + f_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots \\ f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \cdots + f_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

由此可取 $H(x) = \dfrac{1}{2}(f_1^2 + \cdots + f_n^2)$.　证毕.

注　1) 由式(2.14)给出的 $H(x)$，除在平衡点等于零外其他点都大于零. 因此当平衡点为孤立点时，$H(x)$ 是平衡点附近的正定函数.

2) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}}$ 构成一结构矩阵. 事实上，设 $y = \psi(x)$ 是任一坐标变换，则

$$\dot{y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}} \nabla_x H = \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} \nabla_y H,$$

即 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}}$ 符合结构矩阵的变换规律[1].

下面对定理 2 中的实现作进一步分析，首先给出下面的引理.

引理 1[7]　设 $J(x)$ 是 $n \times n$ 反对称矩阵，$R(x)$ 是 $n \times n$ 的(半)正定对称矩阵. 若 $J(x) - R(x)$ 可逆，则 $(J(x) - R(x))^{-1}$ 也可表示为反对称与(半)正定对称矩阵之差，即

$$(J(x) - R(x))^{-1} = J_1(x) - R_1(x). \tag{2.16}$$

其中，$J_1(x)$ 反对称，$R_1(x)$(半)正定对称.

注　引理 1 中，若 $R(x)$ 是正定对称矩阵，则 $J(x) - R(x)$ 可逆. 事实上，若 $J(x) - R(x)$ 不可逆，则必存在 $\alpha \neq 0$ 使得 $(J(x) - R(x))\alpha = 0$. 由此可知：$0 = \alpha^{\mathrm{T}}(J(x) - R(x))\alpha = -\alpha^{\mathrm{T}} R(x)\alpha$，这与 $R(x)$ 正定相矛盾，所以，$J(x) - R(x)$ 可逆.

定理 3　考虑系统(2.1). 若 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$ 负定，则

1) 系统(2.1)可耗散实现为

$$\dot{x} = (J(x) - R(x)) \nabla H. \tag{2.17}$$

其中，$J(x)$ 是反对称阵，$R(x)$ 是正定对称矩阵，$H(x) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2$.

2) Hamilton 函数 $H(x) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2$ 是系统(2.1)的一个真正的 Lyapunov 函数. 当 $H(x)$ 是正则时，系统(2.1)是全局渐近稳定的.

证　首先证明 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 非奇异，事实上，$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\right] + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\right]$，前半部分反对称，后半部分负定，由引理 1 的注知，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 可逆.

1) 因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 可逆，由定理 2 知：

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}} \nabla H,$$

其中 $H = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2$. 又因为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right],$$

前半部分是反对称，后半部分负定，由引理 1 知，

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-T}$ 可表示为反对称矩阵与正定对称矩阵之差，所以式(2.17)成立.

2) 因为

$$\dot{H}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{T}\dot{x}\xlongequal{(2.17)}dH(J(x)-R(x))\nabla H=-dHR(x)\nabla H<0,$$

且 $H(x)$ 是正定的，所以 $H(x)$ 是系统(2.1)的一个 Lyapunov 函数，且此时系统(2.1)是渐近稳定.若 $H(x)$ 再是正则的，则式(2.1)是全局渐近稳定的.

证毕.

3 基于能量的准 Lyapunov 函数的构造 (Construction of energy-based Lyapunov candidates)

本节研究 $u=u(x)\neq 0$ 时闭环系统(1.2)的基于能量的准 Lyapunov 函数构造问题.所采用的方法是通过改造系统的总能量来得到准 Lyapunov 函数.以下假定结构矩阵 $J(x)-R(x)$ 可逆.

考虑闭环系统

$$\dot{x}=(J(x)-R(x))\frac{\partial H}{\partial x}+g(x)u(x), \tag{3.1}$$

若存在函数 $H_1(x)$ 使得

$$g(x)u(x)=(J(x)-R(x))\frac{\partial H_1(x)}{\partial x} \tag{3.2}$$

成立，则式(3.1)成为

$$\dot{x}=(J(x)-R(x))\frac{\partial H_u(x)}{\partial x}. \tag{3.3}$$

其中，$H_u(x)=H(x)+H_1(x)$. 式(3.3)是一个广义耗散 Hamilton 系统，$H_u(x)$ 正是所要求的基于能量的准 Lyapunov 函数.现在的问题是：$H_1(x)$ 何时存在？存在时又如何求得？

定理 4 考虑系统(3.1).若

$$\left(\frac{\partial(g(x)u(x))}{\partial x}\right)^{T}=(J(x)-R(x))^{-1}, \tag{3.4}$$

则存在函数 $H_1(x)$ 使得系统(3.1)变成式(3.3).

证 由条件(3.4)知 $\frac{\partial(g(x)u(x))}{\partial x}$ 可逆.由定理 2 知：

$$g(x)u(x)=\left(\frac{\partial(g(x)u(x))}{\partial x}\right)^{-T}\nabla H_1=(J(x)-R(x))\nabla H_1. \tag{3.5}$$

其中，$H_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(gu)_i^2$，$(gu)_i$ 表示 $g(x)u(x)$ 的第 i 个分量，$i=1,2,\cdots,n$. 把式(3.5)代入式(3.1)知，定理 4 成立. 证毕.

注 当条件(3.4)成立时，所求的系统(3.1)的基于能量的准 Lyapunov 函数是

$$H_u(x)=H(x)+H_1(x)=H(x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(gu)_i^2. \tag{3.6}$$

下面给出另一个存在的条件.构造矩阵

$$U(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)&0&\cdots&0\\0&u_2(x)&\cdots&0\\&&\ddots&\\0&0&\cdots&u_m(x)\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

其中，$u_i(x)$ 是 $u(x)$ 的第 i 个分量($i=1,2,\cdots,m$).记 $-(J(x)-R(x))^{-1}g(x)U(x)\triangleq K(x)$.

定理 5 若存在光滑函数 $C_j(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(j=1,2,\cdots,m)$ 使得

$$K_{ij}(x)=\frac{\partial C_j}{\partial x_i},\ i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m, \tag{3.8}$$

则存在 Hamilton 函数 $H_u(x)$ 使得系统(3.1)变为

$$\dot{x}=(J(x)-R(x))\frac{\partial H_u(x)}{\partial x}.$$

证 令 $\bar{g}(x)=g(x)U(x)$，$\bar{u}=(1,1,\cdots,1)^{T}_{1\times m}$，则系统(3.1)可表示为：

$$\dot{x}=(J(x)-R(x))\frac{\partial H}{\partial x}+\bar{g}(x)\bar{u}. \tag{3.9}$$

由 $K(x)$ 的定义得：

$$K(x)=-(J(x)-R(x))^{-1}\bar{g}(x).$$

对系统(3.9)而言，定理 5 的条件显然满足文[4,5]中 $u=$ 常数 $\bar{u}\neq 0$ 时扩张系统 Hamilton 函数存在所需的所有条件.由文[4,5]知定理 5 成立；且 $H_u(x)$ 由下式求得：

$$H_u(x)=H_a(x,C(x)+c)=H(x)-\sum_{j=1}^{m}(C_j(x)+c_j). \tag{3.10}$$

其中，c_j 是任意常数. 证毕.

下面考虑一种特殊情况：结构矩阵 $J(x)-R(x)$ 为常值可逆矩阵的情形.记

$$N\triangleq(J-R)^{-1},\ A_i\triangleq\left(\frac{\partial(g(x)u(x))}{\partial x_i}\right)^{T}, \tag{3.11}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$，并用 A_i 构造方程(2.4)，有如下结论：

定理 6 若 N 的 n 个行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 组成

的 n^2 维列向量 $X=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$,是方程(2.4)的一个解,则系统(3.1)可表示为 $\dot{x}=(J-R)\frac{\partial H_u}{\partial x}$,其中 $H_u(x)=H(x)+\overline{H}(x)$,

$$\overline{H}(x)=\int_{x_1^{(0)}}^{x_1}h_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1+\int_{x_2^{(0)}}^{x_2}h_2(x_1^{(0)},x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2+\cdots+\int_{x_n^{(0)}}^{x_n}h_n(x_1^{(0)},\cdots,x_{n-1}^{(0)},x_n)\mathrm{d}x_n,\tag{3.12}$$

$$h(x)=(h_1(x),h_2(x),\cdots,h_n(x))^{\mathrm{T}}\triangleq Ng(x)u(x).\tag{3.13}$$

证　由推论 1 知,

$$g(x)u(x)=M\nabla\overline{H}.\tag{3.14}$$

其中 $M=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{-\mathrm{T}}=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_n^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}=J-R$,这里,$\overline{H}$ 可由(2.12)给出,也就是由式(3.12)给出.把式(3.14)代入式(3.1)知,定理 6 成立.

4　实例(An example)

考虑三阶广义 Hamilton 系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\frac{\partial H}{\partial x}+\begin{pmatrix}0&x_2\\-x_1^2&x_2\\0&x_3^2\end{pmatrix}u\triangleq(J-R)\frac{\partial H}{\partial x}+gu.\tag{4.1}$$

其中

$$H(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_3-x_2x_3,$$

并取 $u=(-x_1,1)^{\mathrm{T}}$,不难验证,$J-R$ 是可逆的.记 $N=(J-R)^{-1}$. 直接计算知:

$$A_1=\left(\frac{\partial(gu)}{\partial x_1}\right)^{\mathrm{T}}=(0,3x_1^2,0),$$

$$A_2=\left(\frac{\partial(gu)}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}}=(1,1,0),$$

$$A_3=\left(\frac{\partial(gu)}{\partial x_3}\right)^{\mathrm{T}}=(0,0,2x_3).$$

N 的三个行向量分别是:$\alpha_1=(1,-1,0)$,$\alpha_2=(1,0,0)$,$\alpha_3=(0,0,1)$. 容易验证

$$X=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{\mathrm{T}}=(1,-1,0,1,0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

是下列方程的解:

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&-3x_1^2&0&0&0&0\\0&0&2x_3&0&0&0&0&-3x_1^2&0\\0&0&0&0&0&2x_3&-1&-1&0\end{bmatrix}X=0.\tag{4.2}$$

由定理 6 知,系 f 统(4.1)可耗散实现为 $\dot{x}=(J-R)\frac{\partial H_u}{\partial x}$,其中

$$H_u=H(x)+\overline{H}(x)=\left(\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_3-x_2x_3\right)+\left(-\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{3}x_3^3\right)=-\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+\frac{1}{3}x_3^3-x_1x_3-x_2x_3.\tag{4.3}$$

这里,$\overline{H}(x)$ 按公式(3.12)确定.$H_u(x)$ 构成系统(4.1)的一个准 Lyapunov 函数.

5　结束语(Conclusion)

本文首先研究了一般非线性系统的 Hamilton 实现问题,给出了几个实现的充分条件;然后又用所得的结果研究了广义受控 Hamilton 系统的准 Lyapunov 函数构造问题,给出了几种能通过改造 Hamilton 函数得到准 Lyapunov 函数的充分条件,并且当条件满足时给出了基于能量的准 Lyapunov 函数的具体表达形式.这样构造的准 Lyapunov 函数物理意义明确,在系统的镇定及相关控制问题中起重要作用.

参考文献(References)

[1] Cheng D, Xi Z, Lu Q, et al. Geometric structure of generalized controlled Hamiltonian systems and its application [J]. Science in China (Series E), 2000,43(4):365 - 379

[2] van der Schaft A J. L_2 Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control [M]. London: Springer-Verlag, 1996

[3] Cheng D, Xi Z, Hong Y, et al. Energy-based stabilization in power systems [A]. Proc. of the 14th IFAC World Congress [C]. Beijing, 1999, Vol.O, 297 - 302

[4] Maschke B M J, Ortega R, van der Schaft. Energy-based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation [A]. Proc. of CDC [C]. Tampa, Florid, USA, 1998, 3599 - 3604

[5] Maschke B M J, Ortega R, van der Schaft A, et al. An energy-based derivation of Lyapunov function for forced systems with application to stabilizing control [A]. Proc. of the 14th IFAC [C]. Beijing, 1999, Vol. E, 409 - 414

[6] Hebertt S R. A general canonical form of feedback passivity of nonlinear systems [J]. Int. J. Control, 1998,71(5):891 - 905

[7] Wang Y. Hamiltonian realization theory and its application in power system [D]. Beijing: Institute of Systems Science of Chinese Academy of Science, 2001

[8] Xi Z, Cheng D. Passivity-based stabilization and H_∞ Control of the Hamiltonian control systems with dissipation and its application to power systems [J]. Int. J. Control, 2000,73(18):1686 - 1691

[9] Wang Y, Cheng D, Hong Y. Stabilization of synchronous generators with Hamiltonian function approach [J]. Int. J. of Systems Science, 2001,32(8):971 - 978

本文作者简介

王玉振　1963 年生.2001 年毕业于中国科学院系统科学研究所,获博士学位.现为清华大学自动化系博士后.

程代展　见本刊 2002 年第 3 期第 470 页.