

循环排队网络的极大代数描述、稳定性与扰动分析*

李勇建, 涂葦生, 贾春福

(南开大学 自动化系, 天津 300071)

摘要: 在极大代数框架下对循环排队网络给出了状态方程, 分析了系统的稳定性, 证明了系统性能函数的求导算子与求数学期望算子的可交换性, 然后给出了性能函数关于可控参数灵敏度的计算方法. 最后进行了仿真, 验证了算法的有效性.

关键词: 循环排队网络; 状态方程; 关键路径; 稳定性; 扰动分析

中图分类号: O226

文献标识码: A

Max-algebra description, stability and perturbation analysis of cyclic queue network

LI Yong-jian, TU Feng-sheng, JIA Chun-fu

(Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: Based on max-algebra, state equation for cyclic queue network is derived, and the stability of the system is discussed. The interchangeability between the derivation and the expectation of performance function is proved, then a method for computing the sensitivity of performance function with respect to system parameters is proposed. Finally, numerical results are presented to verify the validity of the method.

Key words: cyclic queue network; state equation; critical path; stability; perturbation analysis

1 引言(Introduction)

串行排队系统是离散事件动态系统(DEDS)典型的研究对象, 其中典型的研究方法是利用极大代数上线性系统思想建立系统状态方程^[1-4], 然后用仿真方法(如, 扰动分析方法^[5])对系统进行分析 and 优化. 关键路径的提出为仿真系统的分析和优化提供了一种简便、可行的模型和方法. 文[6, 7]对具有存储器的串行生产线系统, 在极大代数线性状态方程基础上, 定义了关键路径, 探讨了关键路径的特性, 并通过关键路径分析了参数的扰动对系统性能函数的影响. 文[8]基于关键路径的概念证明了随机串行生产线稳态性能函数可微的充要条件是系统的关键路径以概率 1 唯一. 关键路径简化了 DEDS 扰动分析方法, 使对系统的扰动分析研究转化为对关键路径上事件的分析. 因此用关键路径概念分析 DEDS 的性能不仅直观, 而且有效.

本文研究了循环排队网络系统. 首先给出了系统的状态方程及稳定性概念. 然后利用文[7]的思想引入了关键路径概念, 证明了扰动分析原理应用于

循环排队网络系统的可行性. 最后给出了循环排队网络性能函数灵敏度的计算方法, 并用仿真实例验证了该方法的有效性.

2 循环排队网络的模型与状态方程描述 (Model and state equation of cycle queue network)

2.1 模型(Model)

考虑具有 m 个服务器的循环排队网络, 每个服务器 M_i 前都有一个容量为 b_i 的缓冲器 B_i , 如图 1 所示(为了图形简洁, 缓冲器未画出).

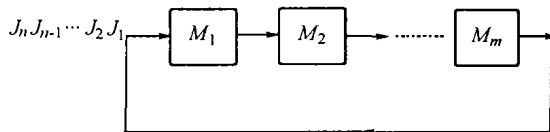


图 1 循环排队网络系统示意图

Fig. 1 The diagram of a cyclic queue network

顾客 $J_1, J_2, \dots$ 在系统中的服务顺序为 $M_1, M_2, \dots, M_m$, 而每个服务器对顾客的服务顺序为 $J_1, J_2, \dots$, 系统有 K 个托盘, 其作用是如果系统中已有 K

* 基金项目: 国家攀登计划基金(970211017)与国家自然科学基金(69674013)资助项目.
收稿日期: 2000-07-04; 收修改稿日期: 2001-05-29.

个顾客正在接受或等待服务,则只有其中某个顾客被服务完离开系统后,其他顾客才可以进入系统.

根据缓冲器 B_i 容量 b_i 的大小,系统可以分为刚性连接循环排队网络($b_i = 0, i = \overline{1, m}$)、柔性连接循环排队网络($b_i = \infty, i = \overline{1, m}$)和具有有限缓冲器的循环排队网络(b_i 为有限值).对具有有限缓冲器的系统可以化为刚性连接系统,即视容量为 b_i 的缓冲器 B_i 为 b_i 个服务时间为 0 的服务器的串联.

2.2 状态方程(State equation)

设 $\mathbb{R}$ 为实数域, $\epsilon = -\infty$, 令 $\bar{R} = \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$. 在 $\bar{R}$ 上定义两个新运算:加法 $\oplus$ 和乘法 $\otimes$ 如下:

$a \otimes b = a + b$, $a \oplus b = \max\{a, b\}$, $\forall a, b \in \bar{R}$. 其中“+”为通常的实数加法.定义了上述两个新运算的 $\bar{R}$ 称为极大代数.在不引起混淆的情况下,记 $a \cdot b = a \otimes b$.令 $e = 0$, 易知, e, ϵ 分别是极大代数上的单位元和零元.类似可以定义向量与矩阵的极大代数乘法和加法.以下非特别声明,皆为极大代数意义下的描述和运算.文[4]对一般串并行生产线、反馈生产线建立了数学模型,基于该文的结果,下面给出循环排队网络的状态方程描述.

设服务器 M_i 对第 k 个顾客 J_k 的服务时间为 $P_i[k, \theta_i]$, 其中 θ_i 为控制参数.记顾客 J_k 的服务时间为

$$P(k, \theta) = [P_1(k, \theta_1), P_2(k, \theta_2), \dots, P_m(k, \theta_m)],$$

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T.$$

我们做如下假设: $P_i(k, \theta_i)$ 关于 i 和 k 独立,关于 k 同分布; $P(k, \theta)$ 的分布为 $\prod_{i=1}^m F_i(t_i, \theta_i)$, 其中 $F_i(t_i, \theta_i)$ 是 $P_i(k, \theta_i)$ 的分布函数.记

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T,$$

$$P(\theta, \xi) = (g_1(\theta_1, \xi_1), \dots, g_m(\theta_m, \xi_m)),$$

其中 $g_i(\theta_i, \xi_i) = F_i^{-1}(t_i, \theta_i, \xi_i)$, ξ_i 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布.设顾客数为 N (足够大), 顾客 J_k 在 m 个服务器上的服务时间可表示为

$$P^k(\theta, \xi) = (g_1(\theta_1, \xi_{1k}), g_2(\theta_2, \xi_{2k}), \dots, g_m(\theta_m, \xi_{mk})).$$

记 $\xi^k = (\xi_{1k}, \xi_{2k}, \dots, \xi_{mk})$, $\xi = (\xi^k, 1 \leq k \leq N)$, 那么每个 ξ 即为系统的一个样本点.

设 $X_i[k]$ 为 J_k 在服务器 M_i 上服务完成后离开的时间.假定服务器是刚性连接, 托盘个数 $K = h$. 不难得到

$$\begin{cases} X_1[k+1] = P_1[k+1]X_1[k] \oplus P_1[k+1]X_{m+h-1}[k] \oplus X_2[k], \\ X_i[k+1] = P_{1i}[k+1]X_1[k] \oplus \dots \oplus P_i[k+1]X_i[k] \oplus P_{1i}[k+1]X_{m+h-1}[k] \oplus X_{i+1}[k], 1 < i \leq m, \\ X_{m+l}[k+1] = X_{m+l-1}[k], 1 \leq l \leq h-1. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $P_{ij}[k] = P_i[k]P_{i+1}[k] \dots P_j[k]$. 把式(2.1)写成矩阵与向量形式为

$$X[k+1] = A[k+1]X[k]. \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{cases} X[k] = (X_1[k], X_2[k], \dots, X_m[k], X_{m+1}[k], \dots, X_{m+h-1}[k])^T; \\ A[k] = \begin{bmatrix} A_{11}[k] & A_{12}[k] \\ A_{21}[k] & A_{22}[k] \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} A_{11}[k] &= \begin{bmatrix} P_1[k] & e & \epsilon \\ P_{12}[k] & P_2[k] & e \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{1m}[k] & P_{2m}[k] & \dots & P_m[k] \end{bmatrix}_{m \times m}, \\ A_{12}[k] &= \begin{bmatrix} P_1[k] \\ \epsilon & P_{12}[k] \\ \vdots \\ P_{1m}[k] \end{bmatrix}_{m \times (h-1)}, \quad A_{21}[k] = \begin{bmatrix} \epsilon & e \\ \epsilon & \epsilon \end{bmatrix}_{(h-1) \times m}, \\ A_{22}[k] &= \begin{bmatrix} \epsilon & & & \\ e & \epsilon & & \epsilon \\ & e & \epsilon & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon & & e & \epsilon \end{bmatrix}_{(h-1) \times (h-1)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

记第 k 个顾客离开第 m 个服务器的时间为系统的输出时间, 则 $y[k] = X_m[k]$. 记 $[\epsilon, \dots, \epsilon, e, \epsilon, \dots, \epsilon]^T X[k] = CX[k]$, 其中 $C = [\epsilon, \dots, \epsilon, e, \epsilon, \dots, \epsilon]^T$, 因此系统的状态方程为

$$\begin{cases} X[k+1] = A[k+1]X[k], \\ y[k] = CX[k]. \end{cases} \quad (2.5)$$

设 $X[0] = X_0$, 则有 $X[N] = A_N X_0$, 其中

$$A_N = A[N]A[N-1] \dots A[1] = \prod_{k=1}^N A[k]. \quad (2.6)$$

从而

$$y[N] = CX[N] = CA_N X_0. \quad (2.7)$$

3 循环排队网络的稳定性 (Stability of cyclic queue network)

定义 1 对循环排队网络系统(2.5), 如果存在常数 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_i[k])^{\otimes 1/k} = \lambda_i$ a. s., 则称系统是状态稳定的. 进一步, 如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$, 则称系统是稳定的.

定义 2 对循环排队网络系统(2.5), 如果存在常数 λ , 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} (y[k])^{\otimes 1/k} = \lambda$ a. s., 则称系统是输出稳定的.

文[1]通过矩阵 $A[k]$ 的加权有向图研究了系统的稳定性, 给出了判别矩阵 $A[k]$ 不可约的简单方法. 利用文[1]的方法可得

引理 1 循环排队网络状态方程(2.5)中, 矩阵 $A[k]$ 是不可约的.

定理 1 由系统(2.5)所描述的循环排队网络是稳定的.

由 $y[k] = X_m[k]$, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y[k])^{\otimes 1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (X_m[k])^{\otimes 1/k}, \text{ a. s. ,}$$

所以有

推理 1 状态方程(2.5)描述的循环排队网络输出稳定.

稳定性的满足为对循环排队网络的扰动分析奠定了基础.

4 循环排队网络的关键路径与扰动分析 (Critical path and perturbation analysis of cyclic queue network)

4.1 关键路径分析 (Critical path analysis)

首先研究图 1 所示循环排队网络中事件之间的连接关系. 记 $O_{i,k}$ 表示顾客 J_k 在服务器 M_i 上接受服务这一事件, $S(O_{i,k}), m(O_{i,k}), F(O_{i,k})$ 分别表示 $O_{i,k}$ 的开始服务时间、服务时间和服务完成时间, 则 $P_i[k, \theta_i] = m(O_{i,k})$ a. s. .

若 $X_i[k-1] = S(O_{i,k})$, 则在事件 $O_{i,k}$ 发生之前服务器 M_i 没有空闲时间. 若 $F(O_{i,k}) = X_i[k]$, 那么 $O_{i,k}$ 没有阻塞, 此时 $X_i[k] = F(O_{i,k}) = P_i[k]S(O_{i,k})$. 若 $X_i[k] > F(O_{i,k})$, 那么 $O_{i,k}$ 有阻塞, 且由式(2.1)有 $X_i[k] = X_{i+1}[k-1]$, 因此 $X_i[k]$ 由 $X_{i+1}[k-1]$ 决定. 类似地, 当 $O_{i+1,k-1}$ 有阻塞时, $X_{i+1}[k-1]$ 由 $X_{i+2}[k-2]$ 决定. 依次类推, 可得

$X_i[k] \geq X_{i+1}[k-1] \geq \dots \geq X_{i+l(i,k)}[k-l(i,k)]$, 其中 $l(i,k) = \min\{m-i, k\}$. 由于第 m 个服务器与第 1 个服务器相连且托盘是顺序调度使用的, 因

此当 $i+l(i,k) = m+1$ 时, 令 $i+l(i,k) = 1$; 当 $k-l(i,k) = 0$ 时, 令 $k-l(i,k) = h+1$. 称 $O_{i+1,k-1}, O_{i+2,k-2}, \dots, O_{i+l(i,k),k-l(i,k)}$ 为 $O_{i,k}$ 的拟同时事件.

称 $O_{i-1,k}$ 及其拟同时事件为 $O_{i,k}$ 的紧连事件, 若 $O_{i',k'}$ 是 $O_{i,k}$ 的紧连事件, 则记作 $O_{i',k'} < O_{i,k}$. 易知“ $<$ ”定义了事件集上的一个偏序关系. 若 $O_{i',k'}$ 是 $O_{i,k}$ 的紧连事件, 且 $S(O_{i,k}) = F(O_{i',k'}) = X_{i'}[k']$, 则称 $O_{i',k'}$ 是 $O_{i,k}$ 的真紧连事件. 特别地, 由于循环排队网络中第一个机器与最后一个机器相连, 则 $k > m$ 时, 事件 $O_m, k-m$ 为 $O_{1,k}$ 的紧连事件. 特别地, 由于循环排队网络中第一个机器与最后一个机器相连, 则 $k > m$ 时, 事件 $O_m, k-m$ 为 $O_{1,k}$ 的紧连事件.

对于任意两个事件 $O_{i',k'}, O_{i,k}$, 若存在事件串 $O_1, O_2, \dots, O_l$ 满足 $O_1 = O_{i',k'}, O_l = O_{i,k}, O_{r-1} < O_r (r = 2, \dots, l)$, 称 $\omega = O_1 O_2 \dots O_l$ 为从 $O_{i',k'}$ 到 $O_{i,k}$ 的一条路径, 如果 O_{r-1} 是 O_r 的真紧连事件, 则称 ω 为从 $O_{i',k'}$ 到 $O_{i,k}$ 的一条关键路径, 记为 $\omega^*(i', k'; i, k)$. 令 $m(\omega)$ 为路径 ω 上服务时间, 显然有 $m(\omega) = \otimes_{r=1}^l m(O_r)$. 由以上分析容易得到

命题 1 设 $\omega^*(i', k'; i, k)$ 为从 $O_{i',k'}$ 到 $O_{i,k}$ 的关键路径, 若 $O_{i',k'}$ 无空闲, $O_{i,k}$ 无阻塞, 则 $m(\omega^*(i', k'; i, k)) = X_i[k] - X_{i'}[k'] + P_{i'}[k']$.

4.2 扰动分析原理 (Principle of perturbation analysis)

设顾客数为 N , 则循环排队网络服务一个顾客所需的平均时间为

$$T(N, \theta) = \frac{1}{N} y[N, \theta] = \frac{1}{N} X_m[N, \theta], \quad (4.1)$$

其中 $\theta = \{\theta_i, i = 1, \dots, m\}$, 其均值为

$$ET(N, \theta) = \frac{1}{N} EX_m[N, \theta]. \quad (4.2)$$

下面的讨论始终假定满足下列假设条件:

假设 1 $g_i(r_{ik}, \theta_i + \Delta\theta_i) - g_i(r_{ik}, \theta_i) =$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} g_i(r_{ik}, \theta_i) + O(\Delta\theta_i, r_{ik}), \text{ W.P.1.}$$

假设 2 $\lim_{\Delta\theta_i \rightarrow 0} \frac{EO(\Delta\theta_i, r_{ik})}{\Delta\theta_i} = 0$.

扰动分析的理论基础是用 $E\left(\frac{T(N, \theta_0 + \Delta\theta) - T(N, \theta_0)}{\Delta\theta_0}\right)$ 作为 $\frac{\partial ET(N, \theta_0)}{\partial \theta_0}$ 的估计^[5], 此估计无偏的充要条件是

$$\frac{\partial ET(N, \theta_0)}{\partial \theta_0} = E \frac{\partial T(N, \theta_0)}{\partial \theta_0}, \quad \theta_0 \in \theta. \quad (4.3)$$

Cao X.R. 在文[10]中对一般性能函数 $L(\theta, \xi)$

给出了式(4.3)成立的条件, Tu F. S. 在文[3]利用这个条件严格证明了, 式(4.3)在存储空间无限和有限两种情况下, 对于串行生产线都成立. 本文这里证明了式(4.3)对于循环排队网络也是成立的.

循环排队网络(2.5), 其状态初值为 $X_0 = [e, \epsilon, \dots, \epsilon]^T$, 由式(2.6)知

$$y[N] = C \cdot X[N] = C \cdot A_N \cdot X_0 = a_{m1}^N,$$

其中 a_{m1}^N 为 A_N 的第 $m \times 1$ 元素, 因而

$$T(N, \theta) = \frac{1}{N} X_m[N, \theta] = \frac{1}{N} a_{m1}^N.$$

在式(2.3)中, A_{21} 和 A_2 与 k 无关, 是常数阵, 因此有

$$A[k] = \begin{bmatrix} A_1[k] & A_{12}[k] \\ A_{21}[k] & A_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1[k] & A_{12}[k] \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}.$$

令

$$\dot{A}[k] = \begin{bmatrix} \dot{A}_1[k] & \dot{A}_{12}[k] \\ \dot{A}_{21}[k] & \dot{A}_2[k] \end{bmatrix},$$

则 a_{m1}^k 为 $m \times m$ 阶矩阵 $\dot{A}_1[k]$ 的第 $m \times 1$ 元素, 因此, 考察 a_{m1}^k 的性质, 只需计算 $\dot{A}_1[k]$. 利用数学归纳法可得, 对 $k \in \overline{1, N}$,

$$\begin{aligned} \dot{A}_1[k] &= A_1[k] \cdot A_1[k-1] \cdots A_1[1] \oplus \\ &\quad \Sigma C_k \cdot A_i[k] \cdot A_{i-1}[k-1] \cdots A_i[1]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $A_i[k]$ 可能取值为 A_1, A_{12} 或 E , 其中 E 为极大代数意义下的单位阵. 文[3]用归纳法证得式(4.4)右边第1项对应的矩阵的每个元素是 $P_i[k]$ 经过有限次加法 $\oplus$ 和乘法 $\otimes$ 而得到的. 由于 A_1, A_{12} 是以 $P_i[k]$ 的有限次加法 $\oplus$ 和乘法 $\otimes$ 形式的运算值为元素, 因此我们也可以归纳证得式(4.4)右边第2项对应矩阵的每个元素也可表示为 $P_i[k]$ 经过有限次加法 $\oplus$ 和乘法 $\otimes$ 的形式, 只是证明过程更复杂. 因此 $m \times m$ 阶矩阵 $\dot{A}_1[N]$ 的每个元素都可以表示成 $P_i[k]$ 的有限次加法 $\oplus$ 和乘法 $\otimes$ 形式, 于是 $T(N, \theta) = \frac{1}{N} a_{m1}^N$ 也由 $P_i[k]$ 经过有限次加法 $\oplus$ 和乘法 $\otimes$ 得到. 由文[5]的定理 2.2 可以得如下定理

定理 2 循环排队网络(2.5), 在假设 1 和假设 2 下, 其性能函数满足

$$\frac{\partial ET(N, \theta_0)}{\partial \theta_0} = E \frac{\partial T(N, \theta_0)}{\partial \theta_0}, \quad \theta_0 \in \theta. \quad (4.5)$$

该定理为扰动分析方法在循环排队网络上的应用奠定了理论基础.

4.3 扰动分析的计算 (Computing of perturbation analysis)

循环排队网络(2.5), 定义其性能函数为

$J_N(\theta) = E_\xi[y[N, \xi]/N] = E_\xi[X_m[N, \theta, \xi]/N]$, 即 N 个顾客在循环排队网络系统上平均服务时间的期望. 若 $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(\theta) = J(\theta)$ 存在, 则称 $1/J(\theta)$ 为该系统的生产率. 其中 $X_m(N, \theta, \xi)$ 是独立随机变量 $g(\gamma, \theta) = \{g_i(\gamma_{ik}, \theta_i), i \in \overline{1, m}, k \in \overline{1, N}\}$ 的函数. 不失一般性, 仅设参数 θ_1 在 θ_1^0 处扰动, 其它参数固定不变, 此时可将 $X_m(N, \theta, \xi)$ 记为 $X_m(N, \theta_1, g)$. 由定理 2 知, 在满足假设 1 和假设 2 条件时,

$$\frac{\partial ET(N, \theta^0)}{N \partial \theta^0} = \frac{\partial EX_m(N, \theta_1^0, g)}{N \partial \theta_1} = E \frac{\partial X_m(N, \theta_1^0, g)}{N \partial \theta_1},$$

则取 N 充分大时, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial ET(N, \theta^0)}{\partial \theta_1} &= E \left\{ \frac{\partial X_m(N, \theta_1^0, g)}{N \partial \theta_1} \right\} \approx \\ &\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \left(\frac{X_m[N, \theta_1^0 + \Delta \theta_1, g^i] - X_m[N, \theta_1^0, g^i]}{\Delta \theta_1} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中 $X_m[N, \theta_1^0, g^{(i)}]$ 经随机采样得到. M 为独立采样次数.

基于本文所讨论的关键路径, 可以使上述扰动分析方法进一步简化.

在样本 u 下, 系统(2.5) 通常为非随机系统, 假定系统正规, 即系统的关键路径唯一. 由 $O_{1,1}$ 到 $O_{m,N}$ 的关键路径为 $\omega^* = O_1 O_2 \cdots O_{m+N}$, 令 $O_t = O_{i,j_t}, t \in \overline{1, m+N}$, 则由命题 1 知,

$$\begin{aligned} X_m[N, \theta_1^0, u] &= m(\omega^*) = \sum_{i=1}^{m+N} m(O_i) = \\ &\sum_{i=1}^{m+N} m(O_{i,j_i}) = \sum_{i=1}^{m+N} P_i(j_i) = \sum_{i=1}^{m+N} g_i^{-1}[\theta_i^0, u_i[k_i]]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中 $u_i[k_i]$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布. 当 θ_1^0 扰动变为 $\theta_1^0 + \Delta \theta_1$ 时, 相应的服务时间变为 $\bar{P}_1[k] = P_1[k] + \Delta_1[k], k \in \overline{1, N}$, 其中 $\Delta_1[k] = g_1^{-1}[\theta_1^0 + \Delta \theta_1, u_1[k]] - g_1^{-1}[\theta_1^0, u_1[k]]$. 当 $\Delta \theta_1$ 足够小时, 所引起的服务时间的改变 $\Delta_1[k]$ 也足够小, 则存在 $\epsilon > 0$, 当 $|\Delta \theta_1| \leq \epsilon$ 时, 关键路径不改变, 说明式(4.7) 在 θ_i 的一个小邻域内总成立, 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(N, \theta^0)}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial X_m(N, \theta_1^0, u)}{N \partial \theta_1} = \\ &\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m+N} \left(\frac{\partial g_i^{-1}(\theta_i^0, u_i[k_i])}{\partial \theta_1} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

这样就可以直接求得 $\frac{\partial T(N, \theta^0)}{\partial \theta_1}$, 也就得到 $\frac{\partial ET(N, \theta^0)}{\partial \theta_1}$.

4.4 仿真实例 (Simulation examples)

考虑图 1 所示的具有 4 个服务器的循环排队网络系统,各服务器前的存储容量都为 1,托盘个数 $h = 6$. 各服务器服务时间的概率分布见表 1.

取仿真的顾客数量 $N = 100,000$, 针对 3 组不同参数值,利用式(4.8)的计算方法估计性能函数对各参数的灵敏度.表 2 给出了仿真结果,其中的灵敏度值是 20 次独立实验的平均值,估计方差也一起列出.在第 1 组参数下,系统有较严重阻塞;在第 2 组参数下,系统经常饥饿;在第 3 组参数下,系统运行正常.

表 2 关键路径—扰动分析方法估计灵敏度的仿真结果

Table 2 Simulated results of sensitivity based on critical path and perturbation analysis

项目	参数	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
第 1 组	参数值 θ_i	100	14	17.5	144
	估计 $\frac{\partial J}{\partial \theta_i}$	0.0942969	19.7281	5.26791	0.38274
	估计方差	2.50724e - 6	4.67692e - 3	4.41304e - 5	6.79765e - 7
第 2 组	参数值 θ_i	145.5	6	16.5	146
	估计 $\frac{\partial J}{\partial \theta_i}$	0.564165	0.0436164	7.41172	0.436246
	估计方差	5.82844e - 6	6.68082e - 5	8.172e - 5	3.97095e - 7
第 3 组	参数值 θ_i	144	12	17.5	144
	估计 $\frac{\partial J}{\partial \theta_i}$	0.107107	11.185	9.64057	0.382192
	估计方差	1.89103e - 6	1.10671e - 3	9.09912e - 5	1.93073e - 7

5 结束语 (Conclusion)

本文针对循环排队网络系统,分析了系统的稳定性,通过关键路径研究了扰动分析方法,得到了一种估计梯度的新算法.在随机系统的参数优化中,R-M 类的算法占主导地位,在这类算法中梯度估计是关键,好的估计可决定寻优算法的优劣.本文提出的方法对循环排队网络的仿真分析研究具有重要的意义.

参考文献 (References)

- [1] Cohen G, Dubois D, Quadrant J P, et al. A linear-system-theoretic view of discrete-event process and its use for performance evaluation in manufacturing [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1985, 30 (3): 210 - 220
- [2] Tu Fengsheng. Modeling and performance evaluation of series production systems [J]. Acta Automatica Sinica, 1990, 16(6): 495 - 502 (in Chinese)
- [3] Tu Fengsheng, Sun Yonghua. Stochastic lines systems over Max-algebra and a perturbation analysis of DEDS [J]. Acta Automatica Sinica, 1992, 18(6): 716 - 719 (in Chinese)
- [4] Tu Fengsheng. The model, stabilization and perturbation analysis for production lines [J]. Control Theory & Applications, 1993, 10(2): 143 - 152 (in Chinese)
- [5] Ho Y C, Cao X R. Perturbation analysis of discrete event dynamic systems [M]. Boston: Kluwer Academic Pub., 1991

表 1 各服务器服务时间的概率分布

Table 1 Probability distributions

of service time on every station

服务器	分布函数	逆变换	参数
M_1	$F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}}$	$P_1(\theta_1, j_t) = -\theta_1 \log(1 - u_{1,j_t})$	θ_1
M_2	$F_2(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2^2}}$	$P_2(\theta_2, j_t) = -\theta_2^2 \log(1 - u_{2,j_t})$	θ_2
M_3	$F_3(x) = \frac{x - \theta_3}{\theta_3^2 - \theta_3}$	$P_3(\theta_3, j_t) = \theta_3 + (\theta_3^2 - \theta_3) u_{3,j_t}$	θ_3
M_4	定长分布	$P_4(\theta_4, j_t) = \theta_4$	θ_4

- [6] Tu Fengsheng, Qi Jinghuan. The state equation description of production lines with buffers and its performance analysis [J]. Journal of System Science & Mathematics Sciences, 1991, 11(2): 177 - 186 (in Chinese)
- [7] Tu Fengsheng. Critical paths and perturbation analysis of discrete event dynamic systems [J]. Journal of System Sciences & Mathematics Sciences, 1996, 16(4): 318 - 325 (in Chinese)
- [8] Liu Zikuan, Tu Fengsheng. Critical path and sensitivity analysis of stochastic serial production lines [J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(2): 264 - 268 (in Chinese)
- [9] Cohen J E. Sub-additivity, generalized products of random matrices and Operation research [J]. SIAM Rev., 1988, 30(1): 69 - 86
- [10] Cao X R. Convergence of parameter sensitivity estimates in a stochastic experiment [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1995, 30 (9): 845 - 853

本文作者简介

李勇建 1973 年生. 1997 年于山东工业大学自动化系获硕士学位. 现为南开大学自动化系博士研究生. 研究领域: DEDS 仿真与优化, CIMS 理论及其优化方法及调度理论与应用等. Email: yjli@se.cuhk.edu.hk

涂肇生 1937 年生. 南开大学自动化系教授. 博士生导师. 现从事 CIMS、DEDS 理论及其在制造系统、通讯理论中的应用. Email: tufs@nankai.edu.cn

贾春福 1967 年生. 1996 年于南开大学计算机与系统科学系获得博士学位. 研究领域: 调度理论, 先进制造系统, CIMS 及其优化理论与方法. Email: cfjia@nankai.edu.cn