

## 一类结构不确定性的离散时滞大系统的分散镇定\*

关新平<sup>1</sup>, 龙承念<sup>1</sup>, 华长春<sup>1</sup>, 段广仁<sup>2</sup>

(1. 燕山大学 电气工程学院, 秦皇岛 066004; 2. 哈尔滨工业大学 控制工程系, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 研究了一类离散时滞大系统的时滞相关鲁棒分散镇定问题, 系统的不确定与标称系统具有结构相似性. 通过构造性的差分格式, 将时滞相关鲁棒分散镇定控制器的存在条件转化为一列线性矩阵不等式的可行解问题. 提出了控制时滞及控制器的时滞鲁棒性概念, 在获得分散镇定控制器的同时给出了鲁棒时滞上界的求解, 因此比现有文献的结果更具有实际应用价值.

**关键词:** 差分格式; 分散镇定; 控制时滞

**中图分类号:** TP271<sup>+</sup>.8

**文献标识码:** A

## Decentralized stabilization of discrete time-delay large-scale systems with structured uncertainties

GUAN Xin-ping<sup>1</sup>, LONG Cheng-nian<sup>1</sup>, HUA Chang-chun<sup>1</sup>, DUAN Guang-ren<sup>2</sup>

(1. Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinghuangdao 066004, China;

2. Department of Control Engineering, Harbin University of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The paper focuses on the problem of robust decentralized stabilization for discrete time-delay systems with structured uncertainties. By constructing difference format approach, the existing condition of robust decentralized stabilization controller for discrete time-delay systems can be checked by the solvability of a couple of linear matrix inequalities. The concept of controlling time-delay and the time-delay robustness of derived decentralized controller are firstly proposed and a method of seeking the size of time-delay bound is presented with the solving for decentralized stabilization controller simultaneously. Consequently, our results are more valuable in application than that of the existing results.

**Key words:** difference format; decentralized stabilization; controlling time-delay

### 1 引言(Introduction)

随着系统的复杂性增加, 时滞大系统的分散镇定问题引起了众多学者的兴趣<sup>[1~4]</sup>. 分散镇定的优点是设计量小, 可靠性强, 经济效益好. 但现有的文献结果均为时滞无关的, 因此其保守性较大. 如文献[1~3]研究了连续时滞大系统的时滞无关分散镇定问题, 文[4]则进一步研究了离散时滞大系统的分散镇定问题, 但其也是时滞无关的且没有考虑系统的不确定性. 实际工程中, 子系统之间的耦合时滞往往会给系统的稳定性能及其它性能指标产生很大的影响, 但据作者所知, 该方向尚未有相关结果. 为此本文在假设时滞是可控的前提下, 提出控制时滞的新思想. 这类控制问题均可归结为时滞相关问题. 通过构造性的差分格式, 将不确定性的离散时滞大系统的时滞相关分散镇定控制器的求解转化为一列线性矩阵不等式的可行解问题. 对时滞相关控制, 不仅要求求取的控制器与系统的时滞信息相关, 还要求所

获得的分散控制器对时滞具有一定的鲁棒性, 即控制器在一定的时滞区间内都能镇定该系统. 本文的优点是能直接利用线性矩阵不等式(LMI)中的 EVP (generalized eigenvalue problem), 在获得分散镇定控制的同时给出了时滞上界的数值求解方法.

### 2 对象描述及定义(Plant description and definition)

考虑由如下  $N$  个子系统组成的不确定互连离散时滞系统

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + \\ \quad \sum_{j=1}^N A_{ji} x_j(k-h_{ji}) + B_{pi} p_i(k), \\ \Sigma_a: q_i(k) = C_{qi} x_i(k) + D_{qi} u_i(k) + \sum_{j=1}^N C_{qji} x_j(k-h_{ji}), \\ p_i(k) = (\Delta q_i)(k). \end{array} \right. \quad (1)$$

\* 基金项目: 国家杰出青年基金(69925308)与国家自然科学基金(60174010)资助项目.

收稿日期: 2000-10-23; 收修修改稿日期: 2001-07-02.

其中  $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $p_i(k) \in \mathbb{R}^{s_i}$ ,  $q_i(k) \in \mathbb{R}^{t_i}$ ,  $z_i(k) \in \mathbb{R}^{l_i}$  分别表示相应维数的向量. 互连时滞  $h_{ji} \geq 0$ . 系统的不确定描述为结构相似集合, 线性时变算子  $\Delta$  满足如下条件

$$p_i(k)'p_i(k) \leq q_i(k)'q_i(k),$$

且其可描述为如下集合

$$\Pi = \{\Delta: \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r), \\ \Delta_i: \mathbb{R}^{t_i} \rightarrow \mathbb{R}^{s_i}, \lambda_{\max}(\Delta_i' \Delta_i) \leq 1\}, \quad (2)$$

则可将系统(1)描述如下

$$\Sigma_b: x_i(k+1) = \bar{A}_{pi}x_i(k) + \sum_{j=1}^N \bar{A}_{ji}x_j(k-h_{ji}) + \bar{B}_{pi}u_i(k). \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_{pi} &= A_i + B_{pi}\Delta C_{qi}, \\ \bar{B}_{pi} &= B_i + B_{pi}\Delta D_{qi}, \\ \bar{A}_{ji} &= A_{ji} + B_{pi}\Delta C_{qji}. \end{aligned}$$

常见的时变范数有界参数不确定性描述为如下形式<sup>[5,6]</sup>

$$\Delta(k) = HF(k)E, F(k)'F(k) \leq I.$$

易见此种描述为本文不确定结构描述的特例, 且本文的描述更易被工程界所接受.

本文将基于对象(3)进行鲁棒分散镇定控制器设计, 且该控制器的可行解条件是时滞相关的. 为此, 先给出如下的定义

**定义 1** 如果对每个子系统存在局部静态状态反馈控制律

$$u_i(k) = K_i x_i(k) \quad (4)$$

使得所导出的闭环复合系统

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= (\bar{A}_i + \bar{B}_{pi})x_i(k) + \sum_{j=1}^N \bar{A}_{ji}x_j(k-h_{ji}), \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

是稳定的, 其中  $\bar{A}_i = A_i + B_i F_i$ ,  $\bar{B}_{pi} = B_{pi} \Delta (C_{qi} + D_{qi} F_i)$ ,  $\bar{A}_{ji} = A_{ji} + B_{pi} \Delta C_{qji}$ . 若这样的控制律(4)存在, 则称系统是分散能镇定的, 相应的控制律(4)称为是系统(3)的分散稳定化控制律.

### 3 主要结果(Main results)

对闭环复合系统(5), 考虑以下的 Lyapunov 泛函

$$V(x(k)) = \sum_{i=1}^N V_i = \sum_{i=1}^N x_i(k)^T P_i x_i(k), \quad (6)$$

并构造如下的差分格式

$$\begin{cases} \Delta V_k^0 = V(x_{k+1}) - V(x_k), \\ \Delta V_k^1 = V(x_{k+1}) - V(x_{k-1}), \\ \Delta V_k^H = V(x_{k+1}) - V(x_{k-H}). \end{cases} \quad (7)$$

为证明定理 1, 基于构造性差分格式(7)给出如下的 Claim.

**Claim** 对系统(5)所给出的 Lyapunov 泛函(6), 若有

$$\sum_{l=0}^H \Delta V_k^l < 0, \quad (8)$$

则有  $\Delta V_k^0 < 0$ .

证 反证法. 假设不真, 即对  $\forall k(k = -H, \dots, +\infty)$ ,  $\Delta V_k^0 \geq 0$  成立, 那么可知  $V(x_k)$  是单调递增的. 此时可导出  $\Delta V_k^l \geq 0, l = 1, \dots, H$ , 即  $\sum_{l=0}^H \Delta V_k^l \geq 0$ , 与式(8)相矛盾, 因此结论得证.

**注 1** 由 Lyapunov 稳定性理论及 Claim, 若式(8)成立, 则系统(5)是渐近稳定的.

**定理 1** 若存在正数  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{N+1})$ , 正定对称阵  $X_i$  及矩阵  $Y_i$ , 使得如下的 LMIs 成立, 则称系统(3)是分散可镇定的. 相应的局部状态反馈控制律为  $u_i(k) = Y_i X_i^{-1} x(k)$ .

$$\begin{bmatrix} -X_i + (N+1)\epsilon_j B_{pi} B_{pi}^T & \Xi_1 & 0 \\ * & \Xi_2 & \Xi_{3j} \\ * & * & -\epsilon_j / (N+1) \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

其中  $*$  可由对称矩阵块而得,  $j = 1, \dots, N+1$ .

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= [A_i X_i + B_i Y_i \quad A_{1i} X_1 \quad \dots \quad A_{Ni} X_N \quad 0], \\ \Xi_2 &= \text{blockdiag} \left\{ -\frac{N X_i}{H_i} \quad -\frac{X_1}{H_i} \quad \dots \quad -\frac{X_N}{H_i} \quad -\frac{(N-1) X_i}{H_i} \right\}, \\ \Xi_{31}^T &= [C_{qi} X_i + D_{qi} Y_i \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0], \\ \Xi_{3j}^T &= \left[ 0 \quad \underbrace{\dots}_{j-1} 0 \quad C_{q(j-1)i} X_{j-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right], \end{aligned}$$

$$j = 2, \dots, N+1.$$

$$H_i = \sum_{j=1}^N h_{ij}, \quad h_i = \min_j h_{ij}.$$

证 基于 Lyapunov 泛函(6)及差分格式(7)可得下式

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{h_j} \Delta V_k^l &\leq \\ \sum_{i=1}^N & \left[ \left( \sum_{j=1}^N h_{ij} \right) x_i^T(k+1) P_i x_i(k+1) - \right. \\ & N x_i(k)^T P_i x_i(k) - (N-1) x_i(k-h_i)^T P_i x_i(k-h_i) \left. \right] - \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N x_i(k-h_{ij})^T P_i x_i(k-h_{ij}) = \\ & \sum_{i=1}^N H_i W^T \Psi W. \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$W = [x_i(k)^T \quad x_1(k - h_{1i})^T \quad \cdots \quad x_N(k - h_{Ni})^T \quad x_i(k - h_i)^T]^T,$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i - NP_i/H_i & \bar{A}_i^T P_i \bar{A}_{1i} & \cdots & \bar{A}_i^T P_i \bar{A}_{Ni} & 0 \\ \bar{A}_{1i}^T P_i \bar{A}_i & \bar{A}_{1i}^T P_i \bar{A}_{1i} - \frac{P_1}{H_i} & \cdots & \bar{A}_{1i}^T P_i \bar{A}_{Ni} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_{Ni}^T P_i \bar{A}_i & \bar{A}_{Ni}^T P_i \bar{A}_{1i} & \cdots & \bar{A}_{Ni}^T P_i \bar{A}_{Ni} - \frac{P_N}{H_i} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1)P_i/H_i \end{bmatrix}.$$

因此,如果  $\Psi < 0$ , 则据 Lyapunov 稳定定理及 Claim 可知系统是渐进稳定的.

对  $j = 1$ , 由式(9)及 Schur 补引理可得

$$\begin{bmatrix} -X_i + (N+1)\varepsilon_1 B_{pi} B_{pi}^T & \Xi_1 \\ * & \Xi_2' \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

其中

$$\Xi_2' = \text{blockdiag} \left\{ U - \frac{X_1}{H_i} \quad \cdots \quad -\frac{X_N}{H_i} \quad -\frac{(N-1)X_i}{H_i} \right\},$$

$$U = -\frac{NX_i}{H_i} + (N+1)\varepsilon_1^{-1} (C_{qi} X_i + D_{qi} Y_i)^T (C_{qi} X_i + D_{qi} Y_i).$$

令

$$\Phi = \begin{bmatrix} -X_i & \Xi_1 \\ * & \Xi_2 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_1 = \text{blockdiag} \{ B_{pi} B_{pi}^T \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \},$$

$$\Pi_2 = \text{blockdiag} \{ 0 \quad (C_{qi} X_i + D_{qi} Y_i)^T (C_{qi} X_i + D_{qi} Y_i)^T \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \},$$

则式(11)等价于下式

$$\Gamma^T (\Phi + (N+1)\varepsilon_1 \Pi_1 + (N+1)\varepsilon_1^{-1} \Pi_2) \Gamma < 0. \quad (12)$$

若存在  $\varepsilon_1 > 0$ , 则下不等式成立

$$\left( \Gamma^T \frac{\Phi}{N+1} \Gamma \right)^2 > 4 \Gamma^T \Pi_1 \Gamma \Gamma^T \Pi_2 \Gamma.$$

其中  $\Gamma = (\Gamma_1^T, \Gamma_2^T, \cdots, \Gamma_{N+3}^T)^T$ . 则根据 Cauchy-Schwartz 不等式及算子  $\Delta$  特性(2), 对所有的不确定性  $\Delta$ , 下不等式成立

$$\left( \Gamma^T \frac{\Phi}{N+1} \Gamma \right)^2 > 4 (\Gamma_2^T B_{pi} \Delta (C_{qi} X_i + D_{qi} Y_i) \Gamma_1)^2. \quad (13)$$

由式(12)显然可得  $\Gamma^T \Phi \Gamma < 0$ , 则下式成立

$$\Gamma^T \frac{\Phi}{N+1} \Gamma < -2 \Gamma_1^T B_{pi} \Delta (C_{qi} X_i + D_{qi} Y_i) \Gamma_2. \quad (14)$$

同理, 对  $j = 2, \cdots, N+1$  由式(9)可得

$$\Gamma^T \frac{\Phi}{N+1} \Gamma < -2 \Gamma_1^T B_{pi} \Delta (C_{q(j-1)i} X_{j-i}) \Gamma_{j+1}, \quad (15)$$

即

$$\Gamma^T \Phi \Gamma < -2 \Gamma_1^T B_{pi} \Delta (C_{qi} X_i + D_{qi} Y_i) \Gamma_2 - \sum_{j=2}^{N+1} 2 \Gamma_1^T B_{pi} \Delta (C_{q(j-1)i} X_{j-i}) \Gamma_{j+1}. \quad (16)$$

式(16)可变换成式(17)

$$\Gamma^T \begin{bmatrix} -X_i & \Xi_1' \\ * & \Xi_2 \end{bmatrix} \Gamma < 0. \quad (17)$$

其中

$$\Xi_1' = [(A_i + B_{pi} \Delta C_{qi}) X_i + (B_i + B_{pi} \Delta C_{qi}) Y_i \quad (A_{1i} + B_{pi} \Delta C_{q1i}) X_1 \quad \cdots \quad (A_{Ni} + B_{pi} \Delta C_{qNi}) X_N \quad 0].$$

此时令  $X_i = P_i^{-1}$ ,  $K_i = Y_i X_i^{-1}$ , 则由式(17)及 Schur 补引理可得  $\Psi < 0$ , 由此定理得证.

**注 2** 定理 1 把离散时滞大系统(3)的鲁棒分散镇定控制器的存在性转化为  $(N+1)$  个联立线性矩阵不等式的可行解问题并同时给出了时滞相关分散稳定化控制器设计方法, 对线性矩阵不等式(9)可用 Matlab 中的 LMItool 工具箱求解. 注意到 LMIs 的个数并不是随着子系统的增多而增多, 而是与大系统中含不确定参数子系统的个数有关, 若子系统的不确定参数可忽略不计, 则所需求解的 LMIs 的个数将大为减少.

实际工程不仅要求所设计的控制器是时滞相关的, 还要求所设计的控制器在某一时滞区间内具有鲁棒性. 假设耦合时滞是可控的, 定理 2 在给出分散控制器的求解的同时给出了其鲁棒时滞上界的求解. 定义如下的 ATD (average time-delay)

$$H_{iATD} = H_i/N.$$

**定理 2** 若以下 EVP (generalized eigenvalue problem) 有解  $(\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_{N+1}^*, X_i^*, Y_i^*)$ , 则系统(3)对任何  $H_{iATD}$  满足  $0 \leq H_{iATD} \leq H_{iATD}^*$  可分散镇定, 此时控制律为  $u_i^*(k) = Y_i^* X_i^{*-1} x_i(k)$ , 相应的鲁棒时滞上界为  $H_{iATD}^*$ .

利用 LMI Toolbox 中的函数 `gevp()` 解如下的 EVP

$$\begin{cases} A_j(\chi) < 1/H_{iATD} B_j(\chi), \\ B_j(\chi) > 0, j = 1, 2, \dots, N+1. \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$A_j(\chi) = \begin{bmatrix} -X_i + (N+1)\varepsilon_j B_{pi} B_{pi}^T & \Xi_1 & 0 \\ * & 0 & \Xi_{3j} \\ * & * & -\varepsilon_j/(N+1) \end{bmatrix},$$

$$B_j(\chi) = \text{blockdiag} \left\{ 0 \quad -X_i \quad -\frac{X_1}{N} \quad \dots \right. \\ \left. -\frac{X_N}{N} \quad -\frac{(N-1')X_i}{N} \quad 0 \right\}.$$

**注3** 只需注意到  $\sum_{i=1}^N H_i x_i(k+1)^T P_i x_i(k+1)$  是随着  $H_i$  单调递增的, 则式(10)对任何  $NH_{iATD}$  满足  $0 \leq NH_{iATD} \leq H_i$  均成立, 此时定理2可由定理1的结论直接导出.

**注4** 一大类实际系统需要寻求时滞对系统稳定性及其他相关性能指标的影响, 如经济管理系统, 决策者可在保证经济性能指标的前提下, 利用定理2所给的结论, 求出相关的时滞信息量, 从而做出决策. 定理2的最大贡献在于给出了一种数值求解鲁棒时滞上界的方法, 这也是研究时滞相关控制的意义所在, 从而可更进一步探索时滞现象的本质.

#### 4 数值例子(Numerical example)

考虑如下参数描述的离散时滞大系统(1)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, A_{31} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{33} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_{p1} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_{p2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{p3} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}^T, C_{q1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_{q2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}^T, C_{q3} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_{q11} = [0 \ 0], C_{q12} = [0.1 \ 0.3],$$

$$C_{q13} = [0.5 \ 1], D_{q1} = 0.4,$$

$$C_{q21} = [0.3 \ 1], C_{q22} = [0.6 \ 0.4],$$

$$C_{q23} = [0.1], D_{q2} = 0.4,$$

$$C_{q31} = [0.7 \ 0.5], C_{q32} = [0 \ 0],$$

$$C_{q33} = [1 \ 0], D_{q3} = 0.5.$$

应用式(19)解 EVP, 可得分散镇定控制器及相应的鲁棒时滞上界

$$K_1 = [-0.8397 \ -0.5889], 0 \leq H_{1ATD} \leq 2.1287,$$

$$K_2 = [-2.1190 \ -0.8251], 0 \leq H_{2ATD} \leq 1.9652,$$

$$K_3 = [-3.7493 \ -0.9652], 0 \leq H_{3ATD} \leq 9.7039.$$

#### 5 结论(Conclusion)

本文基于线性矩阵不等式方法, 给出了离散不确定时滞大系统的时滞相关分散控制器的参数设计方法. 系统的不确定性描述为结构不确定性. 提出了控制时滞的思想, 所获得的分散控制器对时滞具有鲁棒性. 数值算例说明了本文提出方法的有效性.

#### 参考文献(References)

- [1] Wang W J, Mau L G. Stabilization and estimation for perturbed discrete time-delay large-scale systems [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1997, 42(9): 1277-1282
- [2] Hu Z. Decentralized stabilization of large-scale interconnected systems with delay [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, 39(2): 180-182
- [3] Cheng Guoding, Yu Li. Decentralized stabilization of interconnected dynamical time-delay systems [J]. Control and Decision, 2000, 15(1): 92-94 (in Chinese)
- [4] Yu Li. Decentralized stabilization of a class of large-scale linear discrete time-delay systems [J]. Control Theory and Applications, 2000, 17(1): 125-127 (in Chinese)
- [5] Garcia G. Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. Systems and Control Letters, 1994, 22(5): 327-339
- [6] Guan X P, Lin Z Y, Duan G R. Robust guaranteed cost control for discrete-time uncertain systems with delay [J]. IEE Proc. Part D- Control Theory and Application, 1999, 146(6): 332-338

#### 本文作者简介

关新平 见本刊2002年第1期第130页.

龙承念 见本刊2002年第2期第219页.

华长春 1979年生. 现为燕山大学自动化硕士生. 主要研究兴趣为非线性系统鲁棒控制.

段广仁 见本刊2002年第1期第130页.