

一类非线性系统观测器与算例

张 敏^{1,2}, 罗 安¹, 沈洪远², 王 京²

(1. 中南大学 信息学院, 长沙 410083; 2. 湘潭工学院 信息与电气工程系, 湖南湘潭 411201)

摘要: 给出了非线性系统状态观测器的一种提法, 对所给非线性系统作了必要的假设. 对非线性系统状态观测器存在的条件进行了分析, 进而讨论了一类非线性系统观测器的构造方法, 并给出了算例.

关键词: 非线性系统; 观测器; 构造

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Observer for a class of nonlinear system and an example

ZHANG Min^{1,2}, LUO An¹, SHEN Hong-yuan², WANG Jing²

(1. Institute of Information, Central South University, Changsha 410083, China;

2. Department of Information & Electric Engineering, Xiangtan Polytechnic University, Hunan Xiangtan 411201, China)

Abstract: A concept of the observer for the nonlinear systems is given and essential assumptions are given for the nonlinear systems. The existing condition of observer for nonlinear systems is analyzed and moreover the construction method of observers for a class of the nonlinear systems is discussed. An example is given.

Key words: nonlinear system; observer; construction

1 引言(Introduction)

自能控性、能观性的概念引入线性控制系统以来, 系统状态观测器的构造方法成为控制理论重要研究课题. 对定常线性系统观测器的设计, 其理论和方法是成熟的, 但对于非线性系统却不同, 首先, 非线性系统的能观性是一个局部的特性; 第二, 线性系统的能观性与系统输入无关, 只取决于系统本身的结构, 而非线性系统的能观性不但与系统结构有关, 同时还与系统输入有关, 这从非线性系统能观性的定义^[1]中不难看出. 一般地, 对于非线性系统, 可能存在某些不适当的输入, 使系统成不能观的. 因此, 对于非线性系统, 需要有强加条件(可称为一致能观性), 以保证系统在任意可能输入或状态反馈控制下能保持状态的可区分性(即能观性)不变. 基于这种一致能观性, 人们对非线性系统的状态观测器进行了大量研究, 提出了多种方案. 文献[2], [3], [4]对单输入、单输出非线性系统构造了观测器. 文献[5]对一类非线性系统(输出是状态的一部分)构造了观测器. 本文将对一类特定非线性系统构造观测器.

2 非线性系统状态观测器的提法和假设 (Definition and assumptions of observer for

nonlinear systems)

本文研究的对象为下列形式的仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (1)$$

式中 $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$, f 为 n 维向量场, $G(x)$ 为适当矩阵.

假设 1 存在一开的连通紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 系统(1)的零输入系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1')$$

在 Ω 上是一致能观的^[2].

假设 2 系统(1)对任意输入都能观, 即在任意的时间区间 $[0, T]$ 内, 对任意可测的有界输入 $u(t)$, 系统的初始状态由输入 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 唯一决定.

定义 1 当系统(1)满足假设 1 和 2 时, 称系统(1)对任意输入一致能观.

考虑单输出系统 ($m = 1$), 由系统(1)的一致能观性不难得出下述论断: 若系统(1)是一致能观的, 则它必与下述系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} u = \\ F'(x) + G'(x)u, \\ y = cx = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]x \end{cases} \quad (2)$$

微分同胚,即在系统(1),(2)间存在一同胚变换,在单输出情形下,可按以下方式选取.为免混淆,将(2)中的坐标 $x = [x_1 \cdots x_n]$ 改写为 $z = [z_1 \cdots z_n]$,选取变换 $x \rightarrow z$ 为

$$z = \Phi = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}.$$

这样

$$\begin{aligned} F'(z) &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \\ G'(z) &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) \right|_{x=\Phi^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

对系统(2)构造模型系统如下:

$$\dot{\hat{x}} = F'(\hat{x}) + G'(\hat{x})u - H(c\hat{x} - y). \quad (3)$$

定义 2 对系统(2),在状态 x_0 的某一邻域 V (在包含 x_0 的某一开的连通紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中),存在矩阵 H ,对所构造的模型系统(3),若状态 $(\hat{x} - x)$ 渐近收敛,则系统(3)称为系统(2)的局部状态观测器(重构器,估计器). $\hat{x}$ 称为 x 的渐近估计, $(\hat{x} - x)$ 为估计误差.

假设 3 设 $x_{i-} = [x_1 \cdots x_i]^T$,在系统(2)中的每个映射 g_i 为

$g_i: R^i \rightarrow \mathbb{R}^p, [x_1 \cdots x_i]^T \rightarrow g_i^T(x_1, \dots, x_i), i = 1, \dots, n$ 满足全局 Lipschitz 条件.

3 状态观测器的构造(Construction of observer of states)

定理 设对任意输入,系统(2)是一致能观的,并满足假设 3,在系统(3)中置 $H = S^{-1}c^T$,使其成为

$$\dot{\hat{x}} = F'(\hat{x}) + G'(\hat{x})u - S^{-1}c^T(c\hat{x} - y). \quad (4)$$

式中 S 是方程 $\theta S + A^T S + SA = c^T c$ 的解, θ 为足够大的参数, $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \delta_{i,j-1}$ (δ 为克罗内克符号),则对 $0 \leq \|u\| < \infty$ 的可测有界输入 u ,式(4)为系统(2)的观测器, $\hat{x}$ 为 x 的渐近估计,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x} - x(t)\| = 0.$$

证 考虑误差 $\varepsilon = \hat{x} - x$, 式(4)减式(2),并由

式(4)的具体形式,可得

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} = \\ &\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \\ \varphi(\hat{x}) \end{bmatrix} + G'(\hat{x})u - S^{-1}c^T(c\hat{x} - cx) - \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi(x) \end{bmatrix} - G'(x)u = \\ &\begin{bmatrix} \hat{x}_2 - x_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n - x_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \\ &S^{-1}c^T c(\hat{x} - x) + (G'(\hat{x}) - G'(x))u = \\ &\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} (\hat{x} - x) - S^{-1}c^T c(\hat{x} - x) + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(\hat{x}) - \varphi(x) \end{bmatrix} + (G'(\hat{x}) - G'(x))u. \end{aligned}$$

由此,得误差方程

$$\dot{\varepsilon} = (A - S^{-1}c^T c)\varepsilon + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(\hat{x}) - \varphi(x) \end{bmatrix} + (G'(\hat{x}) - G'(x))u. \quad (5)$$

考虑

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varepsilon^T S \varepsilon) &= 2\varepsilon^T S \dot{\varepsilon} = \\ &2\varepsilon^T S A \varepsilon - 2(c\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^T S(k(\hat{x}, u) - k(x, u)). \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} k(x, u) &= \begin{bmatrix} k_1(x_{1-}, u) \\ \vdots \\ k_n(x_{n-}, u) \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(\hat{x}) - \varphi(x) \end{bmatrix} + (G'(\hat{x}) - G'(x))u = \\ &\begin{bmatrix} (g_1(\hat{x}_1) - g_1(x_1))u \\ \vdots \\ (g_{n-1}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}) - g_{n-1}(x_1, \dots, x_n))u \\ (g_n(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) - g_n(x_1, \dots, x_n))u + \varphi(\hat{x}) - \varphi(x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$k_i(x_{i-}, u): \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 系数为 k_i . 由于 S 是

$$\theta S + A^T S + SA = c^T c$$

的解, 由式(6)得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\epsilon^T S \epsilon) &= -2\theta \epsilon^T S \epsilon - 2\epsilon^T A^T S \epsilon + \\ &2\epsilon^T S(k(\hat{x}, u) - k(x, u)). \end{aligned} \quad (7)$$

令

$$\|x\|_s = (x^T S x)^{1/2},$$

于是

$$\epsilon^T S \epsilon = \|\epsilon\|_s^2,$$

$$\|k(\hat{x}, u) - k(x, u)\|^2 =$$

$$(k(\hat{x}, u) - k(x, u))^T S (k(\hat{x}, u) - k(x, u)).$$

考虑式(7), 由 Schwartz 不等式, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\epsilon^T S \epsilon) &\leq \\ \theta \|\epsilon\|_s^2 + 2 \|\epsilon\|_s \|k(\hat{x}, u) - k(x, u)\|. \end{aligned}$$

考虑

$$\frac{d}{dt}(\epsilon^T S \epsilon) = \frac{d}{dt} \|\epsilon\|_s^2 = 2 \|\epsilon\|_s \frac{d}{dt} \|\epsilon\|_s,$$

并由 Euclid 范数 $\|\cdot\|$ 的定义, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\epsilon\|_s &\leq \\ -\theta \|\epsilon\|_s + \left[\sum_{i,j} S_{i,j}^2 \epsilon_i \epsilon_j (k_i(\hat{x}_{i-}, u) - \right. \\ &\left. k_i(x_i, u))(k_j(\hat{x}_{j-}, u) - k_j(x_j, u)) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

置 $k = \sup_i k_i$, $S = \sup_{i,j} |S_{i,j}|$, 得到

$$\frac{d}{dt} \|\epsilon\|_s \leq -\theta \|\epsilon\|_s + c_1 k n s \|\epsilon\|_s.$$

θ 可选择得充分大, 这样, 可得到

$$\frac{d}{dt} \|\epsilon\|_s \leq -\gamma \|\epsilon\|_s, \text{ 对任意 } \gamma > 0. \quad (8)$$

考虑方程

$$\frac{d}{dt} \|\epsilon'\|_s = \gamma \|\epsilon'\|_s.$$

其解为

$$\|\epsilon'\|_s = \|\epsilon'\|_0 e^{-\gamma t}. \quad (9)$$

于是

$$\|\epsilon\|_s \leq \|\epsilon'\|_0 e^{-\gamma t},$$

$$\|\epsilon\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \|\epsilon\|_s \leq \|\epsilon'\|_0 e^{-\gamma t},$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0. \quad (10)$$

由此可得定理的结论: 所构造的系统(4)为系统

(2)的渐近观测器.

寻求系统(1)与系统(2)间的一微分同胚映射, 在此映射下, 即可由系统(2)的状态观测器(4)得到系统(1)的状态观测器.

4 算例 (An example)

为简化分析起见, 讨论下列形式的单输入、单输出系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 - x_1 u, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 x_2 + (0.1 - x_2)u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (11)$$

设系统输入满足 $0 < u_{\min} < u(t) \leq u_{\max} < 1$. 选择函数 $F(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 如下

$$F(x): \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

显然, $F(x)$ 为局部微分同胚. 对所给系统进行坐标变换: $\tilde{x} = F(x)$, 得到如下系统:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + g_1(\tilde{x}_1)u, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \varphi(\tilde{x}) + g_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)u. \end{cases} \quad (12)$$

式中, $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2]^T$, 而

$$g_1(\tilde{x}_1) = -\tilde{x}_1, \quad \varphi(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}_2^2}{\tilde{x}_1} - 2\tilde{x}_1 \tilde{x}_2,$$

$$g_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1(0.1 - \frac{2\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1}).$$

在二维情形下, 可得

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 2\theta & \theta^2 \\ \theta^2 & \theta^3 \end{bmatrix}.$$

由上述构造非线性状态观测器的方法, 可得系统(12)的状态观测器

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \frac{\hat{x}_2^2}{\hat{x}_1} - 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{x}_1 \\ \hat{x}_1(0.1 - \frac{2\hat{x}_2}{\hat{x}_1}) \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 2\theta \\ \theta^2 \end{bmatrix} (\hat{x} - y). \quad (13)$$

由坐标变换 $\tilde{x} = F(x)$ 的逆变换, 可得原系统的观测器方程

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 \hat{x}_2 - \hat{x}_1 u - 2\theta(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{\hat{x}}_2 = -2\hat{x}_1 \hat{x}_2 + (0.1 - \hat{x}_2)u + (-\frac{1}{\hat{x}_1} \theta^2 + \frac{2\hat{x}_2}{\hat{x}_1} \theta)(\hat{x}_1 - y). \end{cases} \quad (14)$$

不难推得, 所构造的观测器对原系统的状态估计误差是渐近收敛的.

5 结论(Conclusion)

本文对非线性系统的状态观测器给出了适当定义,讨论了一类非线性系统观测器构造的条件,给出了这类非线性系统观测器的构造方法.由以上讨论可知,按照所给出的方法构造的状态观测器是适当的,即状态估计误差渐近收敛.

参考文献(References)

- [1] Cheng Daizhan. Geometric Theory of Nonlinear Systems [M]. Beijing: Science Press, 1993 (in Chinese)
- [2] Gauthier J P, Hammouri H, Othman S. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1992, 37(6): 875 - 880
- [3] Kabore P, Othman S, Mchenna T F, et al. Observer-based fault diagnosis for a class of nonlinear systems-application to a free radical copolymerization reaction [J]. Int. J. Control, 2000, 73(9): 787 -

803

- [4] Shim H, Seo J H. Non-linear output feedback stabilization on a bounded region of attraction [J]. Int. J. Control, 2000, 73(5): 416 - 426
- [5] Farza M, Hammouri H, Othman S, et al. Nonlinear observers for parameter estimation in bioprocesses [J]. Chemical Engineering Science, 1997, 52(23): 4251 - 4267

本文作者简介

张 敏 1963 年生. 硕士, 湘潭工学院信息与电气工程系副教授, 在读博士研究生. 研究方向为非线性系统控制, 电力系统控制理论与技术.

罗 安 1957 年生. 博士, 中南大学信息工程学院教授, 博士生导师. 研究方向为现代电力系统控制理论与技术, 故障诊断理论与方法, 智能控制.

沈洪远 1959 年生. 硕士, 湘潭工学院信息与电气工程系副教授, 在读博士研究生. 研究方向: 智能控制, 过程控制与仪表.

王 京 1969 年生. 工程师. 从事电工与电子技术的教学与研究工作.

下 期 要 目

离散时间系统混合 l_1/H_∞ -控制问题	郝 飞, 楚天广, 黄 琳
RBF 网的动态设计方法	魏海坤, 丁维明, 宋文忠, 徐嗣鑫
汽车综合性能检测线的建模与短期调度	陈昌领, 袁德成, 邵惠鹤, 孙 鹏
机器人 LFT 变增益 H_∞ 控制	虞忠伟, 陈辉堂
离散事件动态系统的结构	林怡青, 毛宗源
一类非线性 MIMO 系统的直接自适应模糊鲁棒控制	刘国荣, 万百五
一类非线性微分-代数系统的 L_2 -增益分析及状态反馈 H_∞ 控制	朱建栋, 程兆林, 李树荣
具有状态时滞线性系统对时滞参数的自适应控制	姜偕富, 费树岷, 冯纯伯
动态非线性连续时间系统的小波神经网络辨识	张兆宁, 喻文焕, 郁惟镛
机器人作业的离散事件建模与控制方法	李 杰, 韦 庆, 常文森
免疫遗传算法及在新产品投入计划中的应用	汪定伟, 于海斌
参数摄动混杂离散系统的鲁棒稳定性	张 霓, 吴铁军
钢管材质计算机在线分检系统及其核心算法	蒋式勤, 胡国四, 萧蕴诗, 吴启迪
应用神经网络和遗传算法的智能电网综合补偿控制的研究	杨 建, 罗 安, 涂春鸣, 赵 巍
基于连接模型的局部优化算法在水域污染监测数据融合系统中的应用	韩 斌, 吴铁军, 杨明晖
地震波阻抗参数混沌控制反演	李家俊, 田 凯, 李文秀, 孟繁举, 任贵珍