

凹槽滤波反馈控制混沌系统*

蔡朝洪 徐振源 须文波

(江南大学 信息与控制学院, 无锡 214036)

摘要: 通过对具有扰动作用的平面 Hamilton 混沌动力系统增加一线性的反馈控制器——凹槽滤波器, 基于 Melnikov 方法这一混沌的微扰判据给出合适的反馈控制器参数, 引导系统从混沌运动转化为期望的低周期运动, 并采用平均理论作了稳定性分析. 数值仿真结果将进一步证实本文的结论.

关键词: 混沌; Hamilton 系统; 凹槽滤波器; Melnikov 方法; 稳定性

中图分类号: TP271.62; TP271.9

文献标识码: A

Notch filter feedback control for chaotic systems

CAI Chao-hong, XU Zhen-yuan, XU Wen-bo

(School of Information & Control Engineering, Southern Yangtze University, Jiangsu Wuxi 214036, China)

Abstract: A new method is presented to achieve control over chaotic motion in the perturbed planar Hamiltonian system using notch filter output feedback control. Based on Melnikov's method which is perturbation criteria for chaos, the suitable parameters of notch filter are computed to direct the chaotic motion towards desired low-period motion, the average method, moreover, is introduced to analyze the stability of the controlled system. And numerical simulation results are provided to demonstrate the effectiveness of Melnikov's analysis.

Key words: chaos; Hamiltonian system; notch filter; Melnikov's method; stability

1 引言(Introduction)

混沌是由确定性非线性系统产生对于初值极为敏感而具有内禀随机性和长期预测不可能性的往复非周期运动. 控制混沌运动的目的之一是把系统从混沌运动转化为性能较佳的低周期运动. 自 1990 年, Ott, Grebogi 和 Yorke 通过参数微扰法(即 OGY 法)成功地实现混沌控制以来, 混沌控制这一课题迅速引起了人们的广泛注意和研究, 学者们已提出了许多控制混沌的方法, 如改进 OGY 法, 传统的反馈控制法, 延迟反馈控制法, 弱周期扰动动力系统参数法, 传递与转移控制法, 自适应控制法以及神经网络控制法等^[1]. 但是, 这些控制混沌的文献较多是基于某个想法, 提出一种控制方案, 再作数值仿真实验, 而忽视从数学解析的角度来认识和控制混沌, 也缺少对被控系统的稳定性分析. 本文着重考虑一类具有扰动作用的平面 Hamilton 混沌动力系统, 在不改变原动力系统参数的前提下, 即系统参数一直固定在产生混沌的参数值上, 对系统增加一个线性的反馈控制器——凹槽滤波器, 引导系统从混沌运动转

化为期望的低周期运动, 从而达到控制混沌的目的.

物理学和力学中许多问题, 可以归结为讨论带有弱周期扰动项的具有同宿轨道或异宿圈的二阶常微分方程, Melnikov 方法就是用来判定的这类系统的二维庞加莱映射具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌的解析方法. 本文采用 Melnikov 方法, 计算出平面 Hamilton 混沌动力系统轨道的 Melnikov 函数的阈值条件, 从理论上指导选择合适的反馈控制器参数来控制混沌. 考虑到物理上的可实现性, 本文采用了非线性振动的平均分析方法, 对被控系统作了稳定性分析.

2 凹槽滤波反馈控制混沌系统的方案 (Technique of notch filter feedback control for chaotic dynamics)

2.1 平面 Hamilton 系统和 Melnikov 方法^[2] (Planar Hamilton system and Melnikov method)

讨论具有扰动作用的平面 Hamilton 动力系统

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

* 基金项目: 国家自然科学基金(19872044)资助项目.

收稿日期: 2000-11-23; 收修改稿日期: 2001-06-26.

其中

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, g(x, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ g_2(x, t) \end{pmatrix}$$

是充分光滑的函数,且在有界集上为有界, $g(x, t)$ 是 t 的周期函数,周期为 T . 对(1)有以下假设:

H1) 当 $\epsilon = 0$ 时,式(1)为一 Hamilton 系统,其 Hamilton 量为 $H(x_1, x_2)$, 满足

$$f_1 = \partial H / \partial x_2, f_2 = \partial H / \partial x_1.$$

H2) 当 $\epsilon = 0$ 时,式(1)存在一个双曲鞍点 p^0 以及一条连接 p^0 的同宿轨道

$$q^0(t) = (x_1^0(t), x_2^0(t)).$$

H3) 令 $\Gamma^0 = \{q^0(t) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{p^0\}$, 则在 Γ^0 内部充满一族以 k 为参数的周期轨道 $q^k(t) = (x_1^k(t), x_2^k(t))$, 其中, $k \in J \subset \mathbb{R}$.

H4) 记 $h_k = H(q^k(t))$. T_k 为 $q^k(t)$ 的周期, T_k 为 h_k 的可微函数,且在 Γ^0 内满足 $dT_k/dh_k > 0$ (或 $dT_k/dh_k < 0$).

定义庞加莱映射 $p'_\epsilon: \Sigma'_0 \rightarrow \Sigma'_0$ 为

$$\begin{aligned} p'_\epsilon(q_\epsilon(t_0, t_0)) = \\ \Pi(q_\epsilon(t_0 + T, t_0), \theta(T)) = \\ q_\epsilon(t_0 + T, t_0). \end{aligned}$$

其中 $q_\epsilon(t_0, t_0)$ 为式(1)的解, Π 表示投影到第一因子的映射.

对于同宿轨道 $q^0(t)$, 计算其 Melnikov 函数, 得到

$$\begin{aligned} M(t_0) = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^0(t)) \wedge g(q^0(t), t + t_0) dt, \end{aligned}$$

其中, $a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

引理 1 如果 $M(t_0)$ 具有不依赖 ϵ 的简单零点, 则对充分小的 ϵ , 式(1)的庞加莱映射 p'_ϵ 具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌.

对于周期轨道, ϵ 充分小, 可以设想(1)的次谐波和超次谐波周期解是由 $\epsilon = 0$ 时满足 $T_k = mT$ 和 $T_k = mT/n$ 的轨道在小扰动下生成的. 则可得周期轨道 $q^k(t)$ 的 Melnikov 函数:

$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT} f(q^k(t)) \wedge g(q^k(t), t + t_0) dt.$$

引理 2 $M^{m/n}(t_0)$ 在 $t_0 \in [0, T]$ 中存在不依赖于 ϵ 的简单零点, 且 $dT_k/dh_k \neq 0$, 则对充分小的 $\epsilon(n)$, 当 $0 < \epsilon \leq \epsilon(n)$ 时, 系统(1)所对应的庞加莱映射 p'_ϵ 存在周期 m 点.

2.2 控制系统的设计(The design of control systems)

系统处于周期运动时, 设主频率为 $\omega = 2\pi/T$,

系统输出也包括 $2\omega, 3\omega$ 等高次谐波. 当系统参数变化时, 系统输出也会出现频率小于 ω 的次谐波, 而次谐波的产生往往是系统出现混沌运动的先兆. 这样, 系统就出现了一条倍周期分叉通向混沌的道路. 从频谱的角度看, 可以对系统增加一凹槽滤波器以抑制次谐波的产生, 从而达到控制混沌的目的^[1]. 控制方框图如图 1 所示.

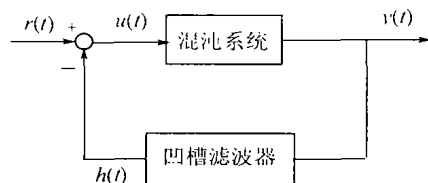


图 1 凹槽滤波反馈控制混沌系统

Fig. 1 Notch filter feedback control chao system

线性凹槽滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{H(s)}{Y(s)} = \\ P(s^2 + \omega_n^2)/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2). \end{aligned} \quad (2)$$

其中, ω_n 为凹槽滤波器的固有频率, ζ 为阻尼系数, P 为反馈增益, 其幅频 Bode 图如图 2 所示. 显然, 在 $\omega = \omega_n$ 处出现一凹槽, 恰是这一具有单一频率滤波的特性, 把系统从混沌运动滤成周期运动. 而与传统的负反馈控制相比, 如 $h(y) = Py$, 反馈增益 P 必须大到足以改变原系统的非线性特性; 从应用的角度看, 这是不太现实的. 相反, 利用凹槽滤波反馈控制器, 相对小的反馈增益即可实现引导系统从混沌运动转化为期望的低周期运动的目的.

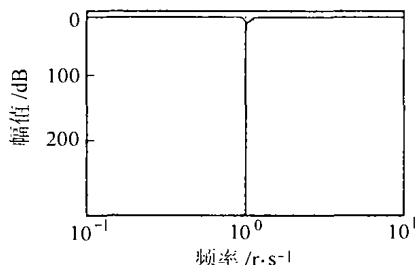


图 2 凹槽滤波器幅频 Bode 图

Fig. 2 Notch filter Bode magnitude

最后, 得到具有扰动作用的平面 Hamilton 混沌动力系统的被控模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + \epsilon g_1(x, t), \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \epsilon g_2(x, t) - h, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_n^2 x_3 - 2\zeta\omega_n x_4 + x_1. \end{cases} \quad (3)$$

其中, $h = Px_1(t) - 2\zeta\omega_n Px_4(t)$, 系统输出为 $y = x_1$. 令 $\zeta = \epsilon\tilde{\zeta}$, 为推算方便, 以下简记 $\tilde{\zeta}$ 为 ζ . 此时,

系统(3)前二式可写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + \varepsilon g_1(x, t), \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \varepsilon(g_2(x, t) + 2\zeta\omega_n P x_4 - P x_1/\varepsilon). \end{cases} \quad (4)$$

系统(3)后二式,即凹槽滤波器系统模型的等价方程为 $\ddot{x}_3 + \omega_n^2 x_3 + 2\varepsilon\zeta\omega_n \dot{x}_3 = x_1$. 其相应的线性齐次方程的通解为:

$$x_3 = e^{-\varepsilon\zeta\omega_n t} (C_1 \cos \sqrt{1-\varepsilon^2\zeta^2}\omega_n t + C_2 \sin \sqrt{1-\varepsilon^2\zeta^2}\omega_n t).$$

注意当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_3(t) \rightarrow 0$. 如果系统输出为周期闭轨,则可令通式 $x_1 = C \cos \rho t$, ρ 为周期输出的频率,求得方程 $\ddot{x}_3 + \omega_n^2 x_3 + 2\varepsilon\zeta\omega_n \dot{x}_3 = C \cos \rho t$ 的特解为

$$\begin{aligned} x_3 &= A \cos \rho t + B \sin \rho t = \\ &2C(\omega_n^2 - \rho^2) \cos \rho t / ((\omega_n^2 - \rho^2)^2 + (2\varepsilon\zeta\omega_n \rho)^2) + \\ &2\varepsilon C \zeta \rho \omega_n \sin \rho t / ((\omega_n^2 - \rho^2)^2 + (2\varepsilon\zeta\omega_n \rho)^2). \end{aligned}$$

基于系统输出与凹槽滤波器产生共振的原理,选择 ω_n ,使得 $\omega_n \rightarrow \rho$, $\omega_n^2 \rightarrow \rho^2 \rightarrow 0$. 则有

$$\begin{aligned} x_4 &= \dot{x}_3 = \\ &2\varepsilon C \zeta \rho \omega_n \cos \rho t / ((\omega_n^2 - \rho^2)^2 + (2\varepsilon\zeta\omega_n \rho)^2). \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= 2\varepsilon C \zeta \rho \omega_n / ((\omega_n^2 - \rho^2)^2 + (2\varepsilon\zeta\omega_n \rho)^2) = \\ &C / 2\varepsilon\zeta\omega_n, \end{aligned}$$

则 $x_4 = \tilde{B} \cos \rho t$.

2.3 基于 Melnikov 方法的控制系统分析 (The analysis of control systems based on Melnikov method)

下面给出基于 Melnikov 方法的控制系统的设计步骤:

先确定 ω ,使得 $\omega_n \rightarrow \rho$.

没有凹槽滤波器的控制时,即反馈增益 $P = 0$,被控系统(3)可简化为原系统(1),计算其同宿轨道 $q^0(t)$ 的 Melnikov 函数 $M_u(t_0)$,由引理 1 判定系统(1)的庞加莱映射 p_ε^0 具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌的参数条件.

存在凹槽滤波反馈控制时,即反馈增益 $P \neq 0$. 计算被控系统(4)的同宿轨道 $q^0(t)$ 的 Melnikov 函数 $M_c(t_0)$:

$$\begin{aligned} M_c(t_0) &= M_u(t_0) + P(2\zeta\omega_n \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) x_4 dt - \\ &\quad \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) x_1 dt). \end{aligned}$$

给定 ω_n ,由上式解析出 $M_c(t_0) \neq 0$ 的参数 P 和 ζ 的条件,即系统(4)的庞加莱映射 p_ε^0 具有 Smale 马蹄

变换意义下的混沌消失,系统的混沌运动将破坏,最终导致周期解.

最后,计算 Γ^0 内部周期轨道 $q^k(t)$ 的 Melnikov 函数 $M_c^{m/n}(t_0, P)$. 令

$$\begin{aligned} M_u^{m/n}(t_0, P) &= \int_0^{mT} f_1(x) g_2(q^k(t), t + t_0) dt - \\ &\quad f_2(x) g_1(q^k(t), t + t_0) dt, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} M_c^{m/n}(t_0, P) &= \\ M_u^{m/n}(t_0, P) &+ P(\int_0^{mT} 2\zeta\omega_n f_1(x) x_4(t + \\ &\quad t_0) dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{mT} f_1(x) x_1(t + t_0) dt). \end{aligned}$$

给定 ω_n ,由引理 2 计算出 $M_c^{m/n}(t_0, p) = 0$,即存在周期解的参数 P 和 ζ 的条件.

3 稳定性分析 (Analysis of stability)

前已述及在 Γ^0 内部存在一簇周期闭轨 $q^k(t)$. 在 Γ^0 内作一次作用量-角变量变换,再作小扰动变换和变量替换,经过平均处理得到平均方程的简化方程^[2]. 根据平均法理论^[3],平均系统的奇点就相当于系统(4)的周期闭轨,因而用平均系统对奇点的稳定性分析的结论可以用到系统(4)的周期闭轨上去.

当 $\frac{\partial}{\partial \phi}(M^{m/n}(t_0)) < 0$ 时,此时奇点为鞍点,则对应的周期闭轨是不稳定的;

当 $\frac{\partial}{\partial \phi}(M^{m/n}(t_0)) > 0$ 时,此时奇点为中心. 对中心不能只考虑式(4)的一次平均所得到的 $o(\sqrt{\varepsilon})$ 量级方程,需要更细致的分析,必须对式(4)进行二次平均,考虑 $o(\varepsilon)$ 量级方程.

二次平均后的系统的线性化矩阵 A 为:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} F'(\bar{\phi}) & \frac{1}{2\pi n} \frac{\partial}{\partial \phi}(M^{m/n}(t_0)) \\ \Omega'(I^{m,n}) + h\sqrt{\varepsilon}\Omega''(I^{m,n}) \cdot p & \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \phi}(G(\bar{\phi})) \end{pmatrix}.$$

其中, $M^{m/n}(t_0)$ 为周期轨道的 Melnikov 函数, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, $F = \frac{\partial I}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial I}{\partial x_2} g_2$, $G = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} g_2$, $F'(\bar{\phi})$ 和 $G(\bar{\phi})$ 分别是 $F' = \frac{\partial F}{\partial I}$ 和 G 的平均, p 为 I 的小扰动. 由文[3]知,系统(4)周期闭轨的稳定性可由矩阵 A 的迹 $\text{tr} A = \sqrt{\varepsilon} [F'(\bar{\phi}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(G(\bar{\phi}))]$ 来判定:

若 $\text{tr} A > 0$,则中心是源型(不稳定)的,对应的次谐解是不稳定的.

若 $\text{tr} A < 0$,则中心是汇型(稳定)的,对应的次

谐解是稳定的.

4 实例分析与数值仿真(Example analysis and numerical simulation)

本文着重考虑一个典型的具有扰动作用的平面 Hamilton 混沌动力系统——软弹簧 Duffing 振子

$$\ddot{y} + \delta \dot{y} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3 = F \cos \Omega t. \quad (5)$$

其中, $\Omega = 1 \text{ rad/s}$, $\delta = 0.168$, $F = 0.21$ 时系统出现混沌. 软弹簧 Duffing 振子方程在力学、物理学和化学中有着广泛的应用, 如结构振动, 船体的颠覆, 化学键的破坏等, 大部分横向波动方程的轴向张力扰动模型都可以转化为软弹簧 Duffing 振子模^[4].

对软弹簧 Duffing 振子施加凹槽滤波反馈控制器后, 得到被控系统的模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\delta x_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_1^3) + r(t) - h, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_n^2 x_3 - 2\zeta \omega_n x_4 + x_1. \end{cases} \quad (6)$$

其中, $h = Px_1(t) - 2\xi \omega_n Px_4(t)$, 系统的参考输入为 $r(t) = F \cos \Omega t$, 系统输出为 $y = x_1$. 令 $\delta = \varepsilon \tilde{\delta}$, $\zeta = \varepsilon \tilde{\zeta}$, $F = \varepsilon f$, 为计算方便, 以下分别简记 $\tilde{\delta}, \tilde{\zeta}$ 为 δ, ζ .

下面对被控系统作 Melnikov 分析:

先确定 ω_n , 使得 $\omega_n \rightarrow \rho$.

没有凹槽滤波反馈时, 被控系统可简化为原软弹簧 Duffing 振子方程, 其等价系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\varepsilon \delta x_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_1^3) + \varepsilon f \cos \Omega t. \end{cases} \quad (7)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 式(7)为一 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为:

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} \right).$$

式(7)存在一个双曲鞍点 p^0 以及一条连结 p^0 的同宿轨道 $q^0(t) = (x_1^0(t), x_2^0(t))$, 其中,

$$\begin{aligned} x_1^0(t) &= \sqrt{2} \operatorname{sech} \frac{t}{\sqrt{2}}, \\ x_2^0(t) &= -\operatorname{sech} \frac{t}{\sqrt{2}} \tanh \frac{t}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

在 Γ^0 内部充满一簇以 k 为参数的周期轨道 $q^k(t) = (x_1^k(t), x_2^k(t))$, 其中

$$x_1^k(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-k^2}} \operatorname{dn} \left(\frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{2-k^2}}, k \right),$$

$$x_2^k(t) = -\frac{k^2}{2-k^2} \operatorname{sn} \left(\frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{2-k^2}}, k \right) \operatorname{cn} \left(\frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{2-k^2}}, k \right).$$

其中, $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u$ 和 $\operatorname{dn} u$ 为雅可比椭圆函数, k 为椭圆函数的模, $0 < k < 1$, 轨道对应的周期为 $T_k = 2\sqrt{2}K(k)\sqrt{2-k^2}$, $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}$ 为第一类完全椭圆积分.

计算同宿轨道的 Melnikov 函数, 得到

$$\begin{aligned} M_u(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^0(t) [f \cos \Omega(t+t_0) - \delta x_2^0(t)] dt = \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{3} \delta + 2f \frac{\pi \Omega}{2 \cosh \Omega \pi / \sqrt{2}} \sin \Omega t_0. \end{aligned} \quad (8)$$

当参数满足

$$\frac{f}{\delta} > R^0(\Omega) = \frac{2\sqrt{2}}{3\Omega \pi} \cosh \Omega \pi / \sqrt{2}, \quad (9)$$

$M_u(t_0)$ 具有不依赖 ε 的简单零点, 则对充分小的 ε , 式(7)的庞加莱映射 p_ε^0 具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌.

存在凹槽滤波反馈控制时, 系统的混沌运动将破坏, 导致周期解. 对于同宿轨道 $q^0(t)$, 即当系统输出 $x_1 = x_1^0(t)$ 时, 求得其特解, 并代入计算系统同宿轨道的 Melnikov 函数:

$$\begin{aligned} M_c(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^0(t) [f \cos \Omega(t+t_0) - \delta x_2^0(t) - \\ &= \frac{Px_1^0(t)}{\varepsilon} + 2\xi \omega_n Px_4(t)] dt = \\ &= -\frac{4}{3} \sqrt{2} \delta + 2f \sin \Omega t_0 \frac{\Omega \pi}{\cosh \Omega \pi / \sqrt{2}} + \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\xi \omega_n Px_2^0(t) dx_3(t). \end{aligned} \quad (10)$$

当 $\zeta = 0.01$, $\omega_n = 1$ 时, 用 Mathematica 软件包算得式(10)中的 $\int_{-\infty}^{+\infty} x_2^0(t) dx_3(t)$ 值为 -1.0930 . 显然, 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\xi \omega_n Px_2^0(t) dx_3(t)$ 的引入, 使得式(10)的 Melnikov 函数 $M_c(t_0) \neq 0$, 所以系统的混沌运动将破坏, 导致周期解.

当系统输出为周期闭轨, 凹槽滤波器方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_3 + \omega_n^2 x_3 + 2\varepsilon \zeta \omega_n \dot{x}_3 &= \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-k^2}} \operatorname{dn} \left(\frac{t}{\sqrt{2}(2-k^2)}, k \right) &= \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-k^2}} \left(\frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^n} \cos \frac{n\pi}{K} \frac{t}{\sqrt{2}(2-k^2)} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $q = e^{-\pi K'/K}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, $K'(k) = K(k')$,

上式右端包含无穷多个周期函数。

现在,计算系统周期闭轨道的 Melnikov 函数:

$$\begin{aligned} M_c^{m/n}(t_0, \delta, f, P) = & \int_0^{mT} x_2^{k(m,n)}(f \cos \Omega(t + t_0) - \delta x_2^{k(m,n)} - \\ & \frac{P}{\epsilon} x_1^{k(m,n)} + 2\zeta \omega_n \bar{B} P \cos \rho(t + t_0)) dt = \\ & -\delta J_1(m, n) - f \sin \Omega t_0 J_2(m, n, \Omega) - \\ & 2\zeta \omega_n \bar{B} P \sin \rho t_0 J_2(m, n, \rho) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_1(m, n) = & 2\sqrt{2}(2 - k^2(m, n))E(k(m, n))/(2 - k^2(m, n))^{3/2} - \\ & 4\sqrt{2}k'(m, n)K(k(m, n))/(2 - k^2(m, n))^{3/2}, \end{aligned}$$

$$J_2(m, n, \Omega) = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ 2\pi \Omega \operatorname{sech} \frac{\pi m k'(k(m, n))}{K(k(m, n))}, & n = 1, \end{cases}$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

为第二类完全椭圆积分,轨道对应的周期 $T_k =$

$$2K(k)\sqrt{2}\sqrt{2 - k^2} = 2m\pi/\Omega n.$$

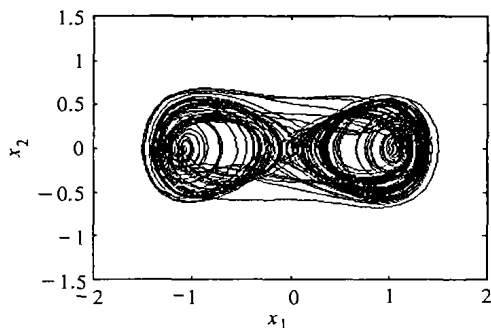
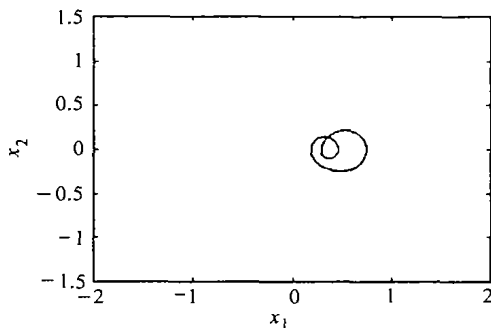
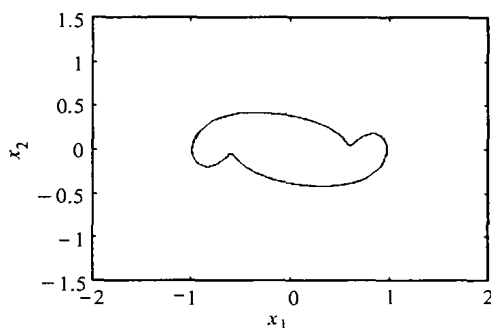
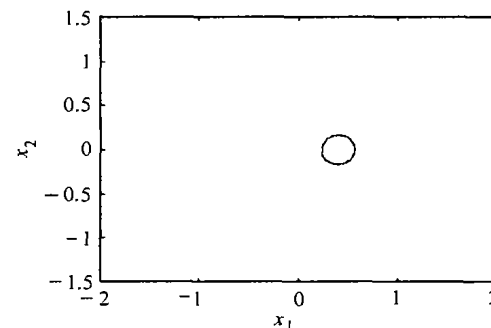


图3 Duffing振子的混沌吸引子和被控系统的周期解

Fig. 3 Numerical simulation of original system and controlled system



(a) 周期2轨道 ($P=0.39$)



(b) 周期1轨道 ($P=0.40$)

图4 Duffing振子的被控系统的周期2和周期1解

Fig. 4 Period-2 orbit and period-1 orbit in the controlled Duffing's system

下面给出依上述解析的参数条件而选择的反馈控制器参数的数值仿真,由式(10)解得, $P \geq 0.28$

欲使 $M_c^{m/n}(t_0, \delta, f, P) = 0$, 须 $n = 1$. 显然,选择合适的 P 和 ζ , 被控系统(6)将存在共振的次谐周期解。

关于稳定性分析,对于本文的软弹簧 Duffing 振子方程,有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi}(M_c^{m/n}(t_0)) = & (-f \cos \Omega t_0 \frac{\Omega}{\Omega_{m,n}} J_2(m, n, \Omega) - \\ & 2\zeta \omega_n \bar{B} P \cos \rho t_0 \frac{\rho}{\Omega_{m,n}} J_2(m, n, \rho)), \end{aligned}$$

对于鞍点,本文不予考虑;对中心,必须计算 $\operatorname{tr} A$ 的值,因为计算过程比较复杂而省略.其计算结果为:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A = \sqrt{\epsilon} \left[\overline{F'(\phi)} + \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{G(\phi)}) \right] = \\ - \frac{\sqrt{\epsilon} \delta}{mT} \frac{1}{\Omega(I)} \frac{\partial}{\partial I} [J_1(m, n)] \Big|_{I_{m,n}}. \end{aligned}$$

上式中 $\Omega(I) > 0$, $J_1(m, n)$ 表示周期闭轨所围的面积,与作用量 I 成正比. 所以, $\frac{\partial}{\partial I} [J_1(m, n)] \Big|_{I_{m,n}} > 0$. 也就是 $\operatorname{tr} A < 0$, 则被控系统的输出将存在稳定的周期闭轨。

时,系统的混沌将破坏.数值仿真中,取 $\zeta = 0.01$, 则 $P = 0.3$ 时,被控系统出现低周期解;原系统与被控

系统的仿真图如图 3 所示. 进一步增大控制增益, $P = 0.39$ 时, 被控系统出现 Γ^0 内的稳定的周期 2 解; $P = 0.40$ 时, 被控系统出现 Γ^0 内的稳定的周期 1 解; 仿真图如图 4 所示. 当系统输出为周期 1 解时, 即 $\Omega = \rho = \omega_n = 1, k \approx 0, k' \approx 1, q = 1.9039 \times 10^{-5}$, 周期 1 轨道的周期约为 2π , 仿真中可以通过示波器观察得到验证. 由式(11)可得:

$$x_4 = \frac{4\pi q}{K(1+q)} \cdot \frac{\epsilon}{4\epsilon^2 \zeta \omega_n} \cos(t) \approx 0.0914 \cos(t) + o(\epsilon^2). \quad (12)$$

对于周期 1 轨道的存在, 式(12)证实了理论与实验结果基本上是相符的, 不作细述.

5 结论(Conclusions)

以往的文献提出的传统控制方法, 较多地在控制目标附近作局部线性近似, 这种方法是有缺陷的. 本文利用凹槽滤波反馈控制器, 把非周期的同宿轨道反馈到原系统中, 然后再“滤出”一个低周期解输出, 从混沌微扰判据的数学解析角度来认识和控制混沌, 并作了稳定性分析和数值仿真. 结果表明, 对具有扰动作用的平面 Hamilton 混沌动力系统, 可以通过增加一个简单的凹槽滤波器来引导系统从混沌运动转化为期望的低周期运动, 物理上易于实现, 且施加能量小 ($P = 0.3$).

另外, 我们还利用凹槽滤波反馈控制器, 推广应用于一类典型的混沌系统, 如 Duffing-Holmes 振子、强迫布鲁塞尔振子、Lorenz 系统、复数洛仑兹-哈肯超混沌系统等混沌动力系统, 成功地引导系统从混沌运动转化为期望的低周期运动, 显得简单而

有效, 且控制代价非常小. 这说明该方法具有一定的普适性, 具有良好的潜在应用前景. 对于 Lorenz 系统, 按照广义 Hamilton 系统的理论, 原有的三维系统在一定条件下可在辛叶(二维超平面)上约化为广义的二维的 Hamilton 系统, 上述的基于 Melnikov 方法的控制系统的解析设计方法仍然适用, 数学证明要复杂得多, 我们将另文给出.

参考文献(References)

- [1] Grantham W J, Athalye A M. Notch filter control for k -period motion in a chaotic system [A]. Judd K, Mees AI, Teo K L, Vincent T L, ed. Control and Chaos [M]. Boston: Birkhäuser, 1997, 142 - 157
- [2] Liu Zengrong. Perturbation Criteria for Chaos [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technology Education Publishing House, 1994 (in Chinese)
- [3] Greenspan B D, Holmes P J. Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillations [J]. SIAM. J. Math. Anal., 1984, 15(1): 69 - 97
- [4] Kim J H, Stringer J. Applied Chaos [M]. San Francisco: John Wiley & Sons Ltd., 1990

本文作者简介

蔡朝洪 1977 年生. 现为江南大学信息与控制学院硕士研究生. 目前研究方向为混沌控制. Email: ch_cai@sina.com

徐振源 1946 年生. 1981 年于北京大学数学力学系获理学硕士学位. 江南大学数理研究所教授. 研究方向为非线性, 混沌动力学控制与无穷维动力学.

须文波 1946 年生. 1981 年于清华大学自控系获工学硕士学位. 江南大学信息与控制学院教授. 博士生导师. 研究方向为集散控制与非线性控制应用.