

时滞非线性随机大系统的指数稳定性*

沈 轶, 张玉民, 廖晓昕

(华中科技大学 控制科学与工程系, 武汉 430074)

摘要: 建立了一般随机泛函微分方程 p 阶均值指数稳定与几乎必然指数稳定的新型判据, 然后应用所得判据到具有可变多时滞的非线性随机大系统, 得到了这种随机大系统时滞无关的均方指数稳定与几乎必然指数稳定的代数判据.

关键词: 时滞; 随机大系统; 指数稳定性

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Exponential stability of nonlinear stochastic large-scale systems with delays

SHEN Yi, ZHANG Yi-min, LIAO Xiao-xin

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: We establish a new criteria of p -order moment exponential stability and the almost sure exponential stability for stochastic functional differential equation. Applying the derived criteria to nonlinear stochastic large-scale systems with variable multi-delay, we get the algebraic criteria of the delay-independent mean square exponential stability and the almost sure exponential stability for this type of stochastic large-scale systems.

Key words: delay; stochastic large-scale system; exponential stability

1 引言(Introduction)

时滞随机大系统是实际工程技术和社会经济中经常遇到的一种大系统, 它具有规模庞大、结构复杂、功能综合、目标多样、因素众多等特点. 关于时滞随机大系统的稳定性的研究的代表性的工作有文献[1~4], 其中文献[1]利用 Razumikhin 方法得到了时滞随机大系统的稳定性判据; 文献[2]利用随机泛函微分方程新的稳定性定理, 并采用适当的 Lyapunov 泛函, 得到了时滞线性随机大系统的时滞相关的均方渐近稳定的判据; 文献[4]对互联结构中既有随机扰动、又有时滞影响的随机大系统, 采用 Lyapunov 函数与比较原理, 给出了这种随机大系统时滞无关的均方渐近稳定性判据, 从现有文献来看, 对时滞随机大系统的稳定性研究主要集中在时滞的线性随机大系统的均方渐近稳定性上, 而对于变时滞的非线性随机大系统的稳定性研究却很少人考虑, 但实际工程中非线性的问题是不可避免的, 线性仅仅是实际系统的近似表达, 因而对具有可变时滞的非线性随机大系统的研究是很有必要的. 在这种背景下, 本

文建立了具有多个可变时滞的非线性随机大系统的时滞无关的均方指数稳定性与几乎必然指数稳定性的充分条件. 为得到这些充分条件, 首先利用时滞微分不等式, 建立了一般随机泛函微分方程的 p 阶均值指数稳定性与几乎必然指数稳定性的判据.

为建立本文的结果, 先给出某些基本记号与条件, 记 (Ω, F, P) 为一完备的概率空间, 用 Ex 表 x 的期望. 对任意给定的, 记 $J = [-\tau, 0]$, $C^n = C(J, \mathbb{R}^n)$ 表示所有连续函数 $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ 组成的, 并被赋予上确界范数 $\|\varphi\| = \sup_{t \in J} |\varphi(t)|$ 的 Banach 空间. 若 $x = C([-\tau, +\infty), \mathbb{R}^n)$, $\forall t \geq 0$, x_t 由 $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in J$ 来定义, 则 $x_t \in C^n$ 分别表示所有 $S[C^n]$ 和 $S[C_+]$ 值随机变量构成的系, 其中 $C_+ = C(J, \mathbb{R}_+)$.

考虑下面的随机泛函微分方程

$$dx(t) = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)dw(t), x_0 = \varphi_0. \quad (1)$$

式中 $dx(t)$ 是 Itô 意下的随机增量, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x_t)$ 与 $g(t, x_t)$ 分别是 $n \times 1$ 和 $n \times m$ 矩阵, $w(t)$ 是

* 基金项目: 国家自然科学基金(60074008)资助项目.

收稿日期: 1999-01-19; 收修改稿日期: 2002-04-01.

具有独立分量的 m 维标准 Wiener 过程, $\varphi_0 \in S[C^n]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$: $f(t, 0) \equiv 0, g(t, 0) \equiv 0$, 满足文献[4]中条件 H1) ~ H3).

考虑下面的一维泛函微分方程

$$\dot{u}(t) = h(t, u(t), u_t), u_0 = \Psi_0. \quad (2)$$

式中, u_t 由 $u_t(s) = u(t+s), s \in J, t \geq 0$ 来定义, $\Psi_0 \in C_+, h \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times C_+, \mathbb{R})$, 任意 $\Psi \in C_+$, $\|\Psi\| = \sup_{t \in J} |\Psi(t)|$, 用 $u(t) = u(t; \Psi_0)$ 表示方程(2)通过 $(0, \Psi_0)$ 的任一解, 且设方程(2)有平凡解 $u(t) \equiv 0$.

设函数 $V \in C([- \tau, +\infty] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}$ 存在且对于任意 $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ 连续, 由 Itô 公式, 对方程(1), 有

$$dV(t, x) = LV(t, x, \varphi)dt + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g(t, \varphi)dw(t),$$

其中

$$LV(t, x, \varphi) \triangleq \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f(t, \varphi) + \frac{1}{2} \text{trace} \sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x} \sigma. \quad (3)$$

这里 $\varphi \in C^n$.

对于方程(2)及函数 V , 我们设

A1) $V \in C([- \tau, +\infty] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}$ 对任意 $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ 存在且连续, 并对任意 $(t, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C^n$, 有

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g(t, \varphi) \leq \beta(t) \left[1 + \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^\alpha ds\right],$$

$$LV(t, \varphi(0), \varphi) \leq h(t, V(t, \varphi(0))),$$

$$V(t+s, m\varphi(s))s \in J.$$

其中 $\beta \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), 1 \leq \alpha \leq 4, L$ 是式(3)中定义的分算子;

A2) $h \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times C_+, \mathbb{R})$, $h(t, u, v)$ 对每个 $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 关于 v 不减, $r(t) = r(t; \Psi_0)$ 是式(2)定义在 $t \geq 0$ 上的最大解, 且 $\forall t \in \mathbb{R}_+, u \in S[C_+], v \in S[C^n]$ 有

$$E[h(t, u, v)] \leq h(t, Eu, Ev).$$

A3) 存在 $k_1, k_2 > 0$ 及 $p \geq 2$, 使 $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$:

$$k_1 |x|^p \leq V(t, x) \leq k_2 |x|^p.$$

关于方程(1)与方程(2)指数稳定的定义参见文献[5].

引理 1^[4] 设条件 A1), A2) 成立, 并设对方程

(1) 的解 $x(t) = x(t; \varphi_0), EV(t, x(t))$, 在 $t \geq -\tau$ 上存在, 则当 $EV(s, \varphi_0(s)) \leq \Psi_0(s), s \in J$ 时, 必有

$$EV(t, x(t)) \leq r(t), t \geq 0.$$

2 随机泛函微分方程指数稳定的新型判据 (New criteria of exponential stability for stochastic functional differential equations)

定理 1 设条件 A1), A2) 和 A3) 满足, 则方程(2)的平凡解指数稳定蕴涵方程(1)的平凡解 p 阶均值指数稳定与几乎必然指数稳定.

证 设 $x(t) = x(t; \varphi_0)$ 是方程(1)的解, 由条件 A3), 有

$$0 \leq k_1 E |x(t)|^p \leq EV(t, x(t)) \leq k_2 E |x(t)|^p, t \geq -\tau. \quad (4)$$

因此 $EV(t, x(t))$ 在 $t \geq -\tau$ 上存在, 由引理 1 知, 当

$$EV(s, \varphi_0(s)) \leq \Psi_0(s), s \in J \quad (5)$$

时, 有

$$EV(t, x(t)) \leq r(t), t \geq 0, \quad (6)$$

式中 $r(t) = r(t, \Psi_0)$ 是方程(2)通过 $(0, \Psi_0)$ 的最大解, 由于方程(2)的平凡解是指数稳定的, 故存在 $\alpha > 0, \beta_0 > 0$ 使 $\forall \Psi_0 \in C^n$ 有

$$|u(t)| \leq \beta_0 \|\Psi_0\| e^{-\alpha t}, t \geq 0, \quad (7)$$

式中 $u(t) = u(t; \Psi_0)$ 是系统(2)通过 $(0, \Psi_0)$ 的解, 选取 $\Psi_0(s) = k_2 E |\varphi_0(s)|^p, s \in J$ 条件 A3) 知, 式(5)成立, 因此式(6)成立. 故由式(4) ~ (7), 有

$$E |x(t)|^p \leq \beta E \|\varphi_0\|^p e^{-\alpha t}, t \geq 0. \quad (8)$$

下面证明方程(1)的平凡解是几乎必然指数稳定的. 由 f, g 满足文献[4]中条件 H3) 知, 存在定义在 J 上的一个有界测度 μ , 使 $\forall (t, \varphi_1), (t, \varphi_2) \in \mathbb{R}_+ \times C^n$, 有

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| + \|g(t, \varphi_1) - g(t, \varphi_2)\| \leq \int_{-\tau}^0 |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| d\mu(s).$$

故由 Holder 不等式, 对任意 $(t, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C^n$, 有

$$\begin{aligned} E |f(t, \varphi)|^p &\leq E \left[\int_{-\tau}^0 \varphi(s) d\mu \right]^p \leq \\ &\left[\int_{-\tau}^0 d\mu \right]^{p-1} \int_{-\tau}^0 E |\varphi(s)|^p d\mu \leq \\ &M \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E |\varphi(s)|^p, \end{aligned}$$

其中 $M = \left[\int_{-\tau}^0 d\mu \right]^p$. 同理 $\forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C^n$, 有 $E \|g(t, \varphi)\|^p \leq M \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E |\varphi(s)|^p$, 由 F 范数与谱范数的关系^[6], 可推出存在 $M_0 > 0$, 使

$$E[\text{trace}^T(t, \varphi) g(t, \varphi)]_2^p \leq$$

$$M_0 \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E |\varphi(s)|^p. \quad (9)$$

故对任意 $(t, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C^n$, 有

$$E |f(t, \varphi)|^p + E [\text{trace } g^T(t, \varphi) g(t, \varphi)]^{\frac{p}{2}} \leq (M + M_0) \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E |\varphi(s)|^p.$$

由式(8), 式(9)及文献[7], 易推出方程(1)的平凡解几乎必然指数稳定. 证毕.

推论 1 对随机泛函数微分方程(1), 设

I) 存在二次连续可微的函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ 及 $k_1, k_2 > 0$, 有

$$k_1 |x|^2 \leq V(x) \leq k_2 |x|^2.$$

II) 存在 $a_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, N$), 使

$$LV(x(t), x_t) \leq -a_0 V(x(t)) + \sum_{i=1}^N a_i V(x(t - \delta_i(t))).$$

式中 $\delta_i(t) \in C(\mathbb{R}_+, [0, \tau])$, $\tau > 0$, $i = 1, \dots, N$. 若

$a_0 > \sum_{i=1}^N a_i V(x(t - \delta_i(t)))$. 则方程(1)的平凡解均方指数稳定, 且几乎必然指数稳定.

证 考虑确定性一维微分差分方程

$$\dot{u}(t) = -a_0 u(t) + \sum_{i=1}^N a_i u(t - \delta_i(t)). \quad (10)$$

若能证明方程(10)的平凡解指数稳定, 则由定理 1, 可推出方程(1)的平凡解均方指数稳定, 也几乎必然指数稳定. 下面证明方程(10)的平凡解指数稳定, 为此作 Lyapunov 函数 $\bar{V}(u) = u^2$, $u \in \mathbb{R}$, 则对任意 $(u, v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, 有

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(u) (-a_0 u + \sum_{i=1}^N a_i v_i) &= \\ 2u (-a_0 u + \sum_{i=1}^N a_i v_i) &\leq \\ (-2a_0 + \sum_{i=1}^N a_i) \bar{V}(u) + \sum_{i=1}^N a_i \bar{V}(v_i). \end{aligned}$$

由已知条件, 有 $2a_0 - \sum_{i=1}^N a_i > \sum_{i=1}^N a_i$, 从而由文献[7]可推出系统(10)的平凡解指数稳定. 证毕.

3 时滞非线性随机大系统的指数稳定性

(Exponential stability of nonlinear stochastic large-scale systems with delays)

考虑下面的随机泛函微分方程描述的具有可变多时滞的非线性随机大系统

$$dx_i(t) = f_i(x_i(t))dt + \sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}(x_i(t))dw_{ij}(t) +$$

$$\sum_{k=1}^N f_{ik}(x_k(t - \delta_i(t)))dt, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11)$$

式中, $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ 是每个子系统的状态变量,

$f_i \in C(\mathbb{R}^{n_i}, \mathbb{R}^{n_i})$, $g_{ij} \in C(\mathbb{R}^{n_i}, \mathbb{R}^{n_i})$, $f_{ik} \in C(\mathbb{R}^{n_k}, \mathbb{R}^{n_i})$,

$\delta_i(t) \in C(\mathbb{R}_+, [0, \tau])$, $\tau > 0$,

$w_i = (w_{i1}, \dots, w_{im_i})^T$, $w_i = \{w_i(t), t \geq 0\}$

是一个定义在完全概率空间 (Ω, F, P) 上具有独立分量的 m_i 维标准的 Wiener 过程, 并且设 $f_i(0) = 0$, $g_{ij}(0) = 0$, $f_{ik}(0) = 0$. 随机大系统(11)的 N 个孤立子系统为

$$dx_i(t) = f_i(x_i(t))dt + \sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}(x_i(t))dw_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (12)$$

定理 2 设存在 $n_i \times n_i$ 维正定阵 P_i , 正数 α_i , $\lambda_i, \mu_i, \mu_{ik}$ ($i, k = 1, \dots, N$), 使 $\forall x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ($i = 1, \dots, N$) 满足

$$\text{I) } 2x_i^T P_i f_i(x_i) + \sum_{j=1}^{m_i} \text{trace } g_{ij}^T(x_i) P_i g_{ij}(x_i) \leq -\lambda_i |x_i|^2.$$

$$\text{II) } 2x_i^T(t) P_i f_{ik}(x_k(t - \delta_i(t))) \leq \mu_i |x_i(t)|^2 + u_{ik} |x_k(t - \delta_i(t))|^2.$$

$$\text{III) } a_0 > \sum_{i=1}^N a_i \text{ 这里}$$

$$a_0 = \min_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{\lambda_i - Nu_i}{\lambda_M(P_i)} \right\} > 0,$$

$$a_i = \alpha_i \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \frac{\mu_{ik}}{\alpha_k \lambda_m(P_k)} \right\} > 0,$$

则时滞随机大系统(11)的平凡解均方指数稳定, 也几乎必然指数稳定.

证 对每个孤立子系统(12), 作 Lyapunov 函数

$$V_i(x_i) = x_i^T P_i x_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (13)$$

式中, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ 对每个 V_i 有

$$\lambda_m(P_i) |x_i|^2 \leq V_i(x_i) \leq \lambda_M(P_i) |x_i|^2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (14)$$

记 L_i 为孤立子系统(12)由式(3)确定的微分算子, 则由条件 I), 有

$$L_i V_i(x_i(t)) \leq -\lambda_i |x_i|^2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (15)$$

由式(14), 式(15)与推论 1 可推出, 孤立子系统(12)的平凡解均方指数稳定, 也几乎必然指数稳定.

对非线性随机大系统(11), 作 Lyapunov 函数

$$V(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i V_i(x_i). \quad (16)$$

式中, α_i 由定理 2 的假设给出, V_i 由式(13)确定, 对

式(16),由式(14),有

$$k_1 |x|^2 \leq V(x) \leq k_2 |x|^2. \quad (17)$$

式中

$$k_1 = \min_{1 \leq i \leq N} \{\alpha_i \lambda_m(P_i)\} > 0,$$

$$k_2 = \max_{1 \leq i \leq N} \{\alpha_i \lambda_M(P_i)\}.$$

于是由 Itô 公式,对非线性随机大系统(11),有

$$\begin{aligned} LV(x(t)) = & \sum_{i=1}^n \alpha_i \{L_i V_i(x_i(t)) + \\ & 2 \sum_{k=1}^N x_i^T(t) P_i f_{ik}(x_k(t - \delta_i(t)))\} \leq \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i (-\lambda_i |x_i(t)|^2 + N \mu_i |x_i|^2 + \\ & \sum_{k=1}^N \mu_{ik} |x_k(t - \delta_i(t))|^2) \leq \\ & -a_0 V(x(t)) + \sum_{i=1}^N a_i V_i(x(t - i(t))). \quad (18) \end{aligned}$$

式中, $a_0, a_i (i = 1, \dots, N)$ 由定理的条件 III) 给出, 由式(17), 式(18)与推论 1 可推出, 非线性随机大系统(11)的平凡解均方指数稳定, 且几乎必然指数稳定. 证毕.

对于由下面随机泛函微分方程描述的具有可变多时滞的线性随机大系统

$$\begin{aligned} dx_i(t) = & A_i x_i(t) dt + \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} x_j(t) dw_{ij}(t) + \\ & \sum_{k=1}^N A_{ik} x_k(t - \delta_i(t)) dt, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ 是每个子系统的状态变量, A_i 和 B_{ij} 为 $n_i \times n_i, i = 1, \dots, N$ 的常矩阵, A_{ik} 为 $n_i \times n_k$ 常矩阵, $\delta_i(t) \in C(\mathbb{R}_+, [0, \tau]) (\tau > 0), w_i = (w_{i1}, \dots, w_{im_i})^T, w_i = \{w_i(t), t \geq 0\}$ 是一个定义在完全概率空间 (Ω, F, P) 上具有独立分量的 m_i 维标准的 Wiener 过程. 对线性随机大系统(19), 从定理 2 我们有推论

推论 2 对线性随机大系统(19), 若存在正数 $\alpha_i, n_i \times n_i$ 维正定阵 P_i 和 $Q_i, i = 1, \dots, N$, 满足:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij}^T P_i B_{ij} = -Q_i, \\ & i = 1, \dots, N; \end{aligned}$$

$$\text{II)} \quad a_0 - \sum_{i=1}^N a_i > 0, \text{ 这里}$$

$$a_0 = \min_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{\lambda_m(Q_i)}{2\lambda_M(P_i)} \right\},$$

$$a_i = \frac{2N\alpha_i}{\lambda_m(Q_i)} \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \frac{|P_i A_{ik}|^2}{\alpha_k \lambda_m(P_k)} \right\},$$

$$i = 1, \dots, N.$$

则线性随机大系统(19)的平凡解均方指数稳定, 也几乎必然指数稳定.

注 文献[4]在系统(19)中 $\delta_i(t)$ 为常数时, 在推论 2 的条件之下, 证明了系统(19)的平凡解是均方渐近稳定的. 从而推论 2 推广了文献[4]的结果.

参考文献(References)

- [1] Chang M H. Stability of interconnected stochastic delay system [J]. Applied Mathematics and Computation, 1985, 16(3): 277 - 295
- [2] Deng Feiqi, Feng Zhaoshu, Liu Yongqing. Mean-square stability and feedback stabilization of linear delay stochastic systems [J]. Control Theory and Applications, 1996, 13(4): 441 - 447 (in Chinese)
- [3] Feng Zhaoshu, Deng Feiqi, Liu Yongqing. Stability of time-varying large-scale delay stochastic systems: Vector Lyapunov function method [J]. Control Theory and Applications, 1996, 13(3): 371 - 375 (in Chinese)
- [4] Liu Yongqing, Feng Zhaoshu. Large-scale dynamic systems theory and applications (vol. 4) [M]. Guangzhou: SCUT Press, 1992 (in Chinese)
- [5] Mao X, Shah A. Exponential stability of stochastic differential delay equations [J]. Stochastics and Stochastics Reports, 1997, 60(2): 135 - 153
- [6] Chen Guanrong. Matrix Theory and Applications [M]. Peking: High Education Press, 1990 (in Chinese)
- [7] Liao Xiaoxin. Theory and Applications of Stability for Dynamic Systems [M]. Peking: National Defense Industry Press, 2000 (in Chinese)

本文作者简介

沈 轶 1964 年生. 1998 年获华中科技大学工学博士学位. 1999 年至 2001 年在华中科技大学从事博士后研究, 现为该校控制系副教授. 已发表论文 20 余篇. 研究领域: 随机系统, 神经网络. Email: zhyminus@sohu.com

张玉民 1971 年生. 华中科技大学控制科学与工程系博士. 研究领域: 非线性系统, 神经网络.

廖晓昕 1938 年生. 华中科技大学控制系教授, 博士生导师. 已在《中国科学》、《国际控制论杂志》等刊物上发表论文 100 余篇, 中英文著作 5 部. 研究领域: 神经网络, 非线性控制系统.