

受扰 Hopfield 神经网络 L_2 增益稳定性分析*

叶华文¹, 戴冠中¹, 王 红², 罗永红³

(1. 西北工业大学 自动控制系, 西安 710072; 2. 南开大学 数学科学学院, 天津 300071;

3. 新疆军区弹药试验站 导弹室, 乌鲁木齐 830002)

摘要: 运用研究控制系统有限增益稳定的方法, 讨论受扰 Hopfield 神经网络关于扰动的增益 L_2 稳定. 所给条件不但保证受扰网络 L_2 增益稳定, 且总能保证网络未受扰时唯一平衡点的存在性和全局渐近稳定性; 文中结论还包含从扰动到状态的 L_2 增益估计, 它们用网络有关参数明确表达.

关键词: Hopfield 神经网络; L_2 增益稳定; 全局渐近稳定

中图分类号: TP183

文献标识码: A

L_2 -gain stability analysis of perturbed Hopfield neural networks

YE Hua-wen¹, DAI Guan-zhong¹, WANG Hong², LUO Yong-hong³

(1. Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China;

2. College of Mathematics Science, Nankai University, Tianjin 300071, China;

3. Ammo Experimental Station of Xinjiang Military Area, Wulumuqi 830002, China)

Abstract: The gain L_2 -stability of perturbed Hopfield neural networks is investigated by using methods of studying finite-gain stability of control systems. Sufficient conditions are provided under which not only L_2 -gain stability of perturbed networks but also existence and global asymptotically stability of unique equilibrium of the corresponding unperturbed networks are guaranteed. In addition, the L_2 -gain from perturbation to state is estimated, which is formulated by networks' parameters.

Key words: Hopfield neural networks; L_2 -gain stability; global asymptotically stability

1 引言(Introduction)

Hopfield 网络是一种重要的人工神经网络, 在优化计算、模式识别和联想记忆等方面应用广泛. 由于稳定性是网络正常工作的前提, 因此, 自文献[1,2]发表以来, Hopfield 网络稳定性研究吸引了众多的研究者. 文献[3~11]就网络的局部和全局稳定性给出了一系列重要结果, 它们的研究目的大致上都是, 确定网络权矩阵和活化函数的特性, 若有时滞则还估计时滞限, 以保证网络具有一定的稳定特性. 总的来看, 这些文献都关注网络平衡状态的收敛性. 本文将考察扰动对网络状态有界性的影响, 运用研究控制系统有限增益稳定的方法, 给出受扰 Hopfield 网络关于扰动 L_2 增益稳定的充分条件. 这些条件不但保证受扰网络关于扰动 L_2 增益稳定, 即小信号扰动不会破坏状态的有界性, 且总能保证网络未受扰时唯一平衡点的存在性和全局渐近稳定性. 值得指出的, 与大多数有关 Hopfield 稳定的文献相比, 我们

的研究对网络活化函数的要求有着较小的保守性. 首先, 只要求活化函数 Lipschitz 连续而不必可微; 其次, 活化函数可以无界.

2 网络模型及唯一平衡点的存在性(Networks model and existence of its unique equilibrium)

Hopfield 网络由下面的微分方程描述^[14]

$$\dot{x} = -Dx + Hg(x) + J. \quad (1)$$

这里 $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_i > 0$, $H = \{H_{ij}\}$ 为 $n \times n$ 常矩阵, $J = (J_1, \dots, J_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 为输入常向量; 活化函数 $g(x) = (g_1(x_1), \dots, g_n(x_n))^T$, 满足 $g_i(0) = 0$; 对任意 $\eta \in \mathbb{R}$, 存在常数 k_{i1}, k_{i2} ($0 \leq k_{i1} < k_{i2} < \infty$), 有 $k_{i1}\eta^2 \leq g_i(\eta)\eta \leq k_{i2}\eta^2$. 这意味着每个 g_i 单调非减, 导数有界.

Hopfield 网络用于优化计算、模式识别和联想记忆时应具有的一个重要特性是, 它关于每个给定

* 基金项目: 国家自然科学基金(19771066), 西北工业大学重点学科建设项目和西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室资助项目.
收稿日期: 2000-04-10; 收修改稿日期: 2001-04-27.

的输入 J 有一个唯一平衡点,即不出现伪平衡点(spurious equilibrium).关于其判定条件,文献[14]有下面的重要结果(参见该文推论1).

引理 1^[14] 矩阵 D 和活化函数 g 具有上述特点,且 $\lambda_{\max}(\frac{H+H^T}{2}) < \min_{1 \leq i \leq n} (d_i/k_{i2})$, 则网络(1)对每个输入 J 有一个唯一平衡点.

此结论没有要求活化函数严格单增有界,文献[6]却有此要求,文献[15]不要求活化函数有界但强调严格单增.根据引理1,可以证得下面的结论:

引理 2 矩阵 D 和活化函数 g 具有上述特点的网络(1),如果还有下面条件之一成立,则对每个输入 J 网络有一个唯一平衡点.

A1) $Q = -D + \frac{k_2 d_l}{d_s} \frac{H+H^T}{2} + (\frac{k_2 d_s}{2 d_l} + \frac{d_l}{2 k_2 d_s}) I, \lambda_{\max}\{Q\} = -a, HH^T - \frac{H+H^T}{2}$ 半负定.其中 $a > 0, d_l = \max_{1 \leq i \leq n} (d_i), d_s = \min_{1 \leq i \leq n} (d_i), k_2 = \max_{1 \leq i \leq n} (k_{i2})$;

A2) H 对称负定;

A3) $r > 0, \frac{H+H^T}{2} + rI$ 半负定;

A4) $(H+H^T) + HH^T$ 半负定.

证 假设 A2), A3), A4) 任有一个成立,由引理1,立即知道结论正确,因为总有

$$\lambda_{\max}(\frac{H+H^T}{2}) \leq 0.$$

假设 A1) 成立,由 $HH^T - \frac{H+H^T}{2}$ 半负定得到 $\lambda_{\max}(\frac{H+H^T}{2}) \geq 0$, 但 $\lambda_{\max}\{Q\} = -a$ 意味着 $-D + \frac{k_2 d_l}{d_s} \frac{H+H^T}{2}$ 负定,由此易验证 $\lambda_{\max}(\frac{H+H^T}{2}) < \min_{1 \leq i \leq n} (d_i/k_{i2})$. 证毕.

在本文第三部分将看到,引理2的条件正是保证网络在不同受扰形式下 L_2 增益稳定的充分条件.

为后面分析方便,下面推导出网络(1)的等价形式.设 x_0 为网络(1)的平衡点,即 $-Dx_0 + Hg(x_0) + J = 0$, 定义 $z = x - x_0$, 则网络动态如下描述:

$$\dot{z} = -Dz + HG(z). \quad (2)$$

$$G(z) = (G_1(z_1), \dots, G_n(z_n))^T =$$

$$g(z + x_0) - g(x_0).$$

为了通常习惯,仍记(2)中的 z 作 x , 即有

$$\dot{x} = -Dx + HG(x). \quad (3)$$

可验证 $G_i(0) = 0$; 对任意 $\eta \in \mathbb{R}$,

$$k_{i1} \eta^2 \leq G_i(\eta) \eta \leq k_{i2} \eta^2.$$

k_{i1}, k_{i2} 即前面刻画 g_i 的常数.此时原点为网络(3)的平衡点.

往下讨论网络(1),只需考察其等价形式(3),并约定:

A5) $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), d_i > 0 (1 \leq i \leq n)$;

A6) 对 $i = 1, \dots, n$, 对任意 $\eta \in \mathbb{R}$, 存在常数 $k_{i1}, k_{i2} (0 \leq k_{i1} < k_{i2} < \infty)$, 有

$$k_{i1} \eta^2 \leq G_i(\eta) \eta \leq k_{i2} \eta^2.$$

3 受扰 Hopfield 网络的 L_2 增益稳定 (L_2 -gain stability of perturbed Hopfield networks)

首先,给出 L_2 增益稳定的定义.考察控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

这里 $x \in \mathbb{R}^n$, 控制 $u \in \mathbb{R}^m, f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 关于 (x, u) 局部 Lipschitz 连续.

定义 1^[12] 称系统(4)有 L_2 增益小于等于 M , 如果对于任何 $u \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^m)$, 系统(4)相应于 u 的解 x 也属于 $L_2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, 而且 $\|x\|_{L_2} \leq M \|u\|_{L_2}$. 满足此不等式的最小 M 值也称为系统(4)的 L_2 增益.这里 $\|\cdot\|_{L_2}$ 表示

$$\|x\|_{L_2} = (\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt)^{1/2}, x \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^n).$$

如果把系统(4)中的输入 u 看作扰动,则有

定义 2^[12] 称系统(4)关于扰动 u 是 L_2 增益稳定的,如果 $\|x\|_{L_2} \leq M \|u\|_{L_2}$, 且 M 为有限值.

下面我们来分析 Hopfield 网络关于扰动的 L_2 增益稳定性.我们知道,如果受到小信号扰动,网络的状态即发散为无穷,这样的网络将很难正常工作,因此,对小信号扰动的不敏感性,也即这里关于扰动 L_2 增益稳定性,应该是网络最基本的品质.下面将给出 Hopfield 网络在不同受扰形式下关于扰动 L_2 增益稳定的几个充分判据.后面的证明要用到如下引理:

引理 3^[13] 对任何实数 $r > 0$, 对向量 X, Y , 下式成立:

$$X^T Y + Y^T X \leq r X^T X + \frac{1}{r} Y^T Y.$$

考察 Hopfield 网络(3)的受扰形式

$$\begin{cases} \dot{x} = -Dx + HG(x + u) + v, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

这里 $u, v \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, 分别为内部和外部扰动.

定理 1 如果假设 A1), A5), A6) 成立, 则网络

(5)关于扰动 u, v 为 L_2 增益稳定,且下式成立:

$$\|x\|_{L_2} \leq \sqrt{\frac{k_2 d_s}{2ad_l}} \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{L_2}.$$

证 设置 Lyapunov 函数 $U = \frac{1}{2} x^T x$, 求 U 沿式

(5)的解的时间导数,运用引理 3,得到

$$\begin{aligned} \dot{U} = & -x^T D x + x^T H G(x+u) + x^T v = \\ & -x^T D x + \frac{1}{2} [(H^T x)^T G(x+u) + \\ & G^T(x+u)(H^T x)] + x^T v \leq \\ & -x^T D x + \frac{1}{2} [rx^T H H^T x + \frac{1}{r} G^T(x+u) G(x+u)] + x^T v. \end{aligned}$$

令 $r = \frac{2k_2 d_l}{d_s}$, 并利用假设 A6) 和 A1) 可得

$$\begin{aligned} \dot{U} \leq & -x^T D x + \frac{k_2 d_l}{d_s} x^T H H^T x + \\ & \frac{d_s}{4k_2 d_l} G(x+u)^T G(x+u) + x^T v \leq \\ & -x^T D x + \frac{k_2 d_l}{d_s} x^T H H^T x + \\ & \frac{k_2 d_s}{2d_l} (x^T x + u^T u) + x^T v \leq \\ & -x^T D x + \frac{k_2 d_l}{d_s} x^T H H^T x + \frac{k_2 d_s}{2d_l} (x^T x + \\ & u^T u) + \frac{d_l}{2k_2 d_s} x^T x + \frac{k_2 d_s}{2d_l} v^T v \leq \\ & x^T [-D + \frac{k_2 d_l}{d_s} \frac{H+H^T}{2} + (\frac{k_2 d_s}{2d_l} + \\ & \frac{d_l}{2k_2 d_s}) I] x + \frac{k_2 d_s}{2d_l} (u^T u + v^T v). \end{aligned}$$

由假设 A1) 知

$$\dot{U} + ax^T x \leq \frac{k_2 d_s}{2d_l} (u^T u + v^T v).$$

上式两边从 0 到 $t \geq 0$ 积分,考虑到 $U(x(0)) = 0$, $U(x(t)) \geq 0$, 从而

$$a \int_0^t x^T x ds \leq \frac{k_2 d_s}{2d_l} \int_0^t (u^T u + v^T v) ds.$$

因为 $u, v \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, 上式中令 $t \rightarrow \infty$, 即

$$\|x\|_{L_2} \leq \sqrt{\frac{k_2 d_s}{2ad_l}} \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{L_2}.$$

证毕.

注 不难验证,没有扰动时,定理 1 的条件可保证网络全局渐近稳定.事实上,当沿着(3)的解求径向无界 Lyapunov 函数 $U = \frac{1}{2} x^T x$ 的时间导数,可得

$$\begin{aligned} \dot{U} \leq & x^T (-D + \frac{k_2 d_l}{d_s} \frac{H+H^T}{2} + \frac{k_2 d_s}{4d_l}) x \leq \\ & - (a + \frac{k_2 d_s}{4d_l} + \frac{d_l}{2k_2 d_s}) x^T x. \end{aligned}$$

由文献[6]的 Theorem A1,立即知道论断正确.这说明,定理 1 的条件不但保证网络关于内外扰动 L_2 增益稳定,且可保证网络未受扰时的全局渐近稳定性.另外,由引理 2 还知道,所给条件也保证了未受扰网络唯一平衡点的存在.顺便提及,定理 1 没有对活化函数提出严格单增有界可微等要求.

在上面 L_2 增益估计式中, a 由 $-\lambda_{\max}[-D + \frac{k_2 d_l}{d_s} \frac{H+H^T}{2} + (\frac{k_2 d_s}{2d_l} + \frac{d_l}{2k_2 d_s}) I]$ 确定,这说明矩阵 D, H 和活化函数增益都影响着 L_2 增益的大小.如果加强对活化函数的限制,分析网络只存在外部或内部扰动的情况,我们可以更清楚地看到,矩阵 D, H , 活化函数增益以及 L_2 增益之间的制约关系.此时我们规定活化函数严格单增,即假设:

A6)' 对 $i = 1, \dots, n$, 存在常数 $k_{i1}, k_{i2}, 0 < k_{i1} < k_{i2} < \infty$, 使得对任意 $\eta \in \mathbb{R}$, 有

$$k_{i1} \eta^2 \leq G_i(\eta) \eta \leq k_{i2} \eta^2.$$

考察 Hopfield 网络(3)的受扰形式

$$\dot{x} = -Dx + HG(x) + p, \quad x(0) = 0. \quad (6)$$

这里 $p \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ 为未知的外部扰动.

定理 2 满足假设 A5), A6)' 的受扰网络(6), 如果假设 A2), A3) 任有一个成立, 则网络(6)关于扰动 L_2 增益稳定.假设 A2) 成立时增益估计为

$$\|x\|_{L_2} \leq \sqrt{\frac{k_2}{4d_s k_1^2 \lambda_{\min}(-H)}} \|p\|_{L_2},$$

假设 A3) 成立时增益估计为

$$\|x\|_{L_2} \leq \sqrt{\frac{1}{4d_s k_1 r}} \|p\|_{L_2},$$

这里 $k_1 = \min_{1 \leq i \leq n} (k_{i1})$.

证 假设 A2) 成立时的证明. 设置 Lyapunov 函

数 $V = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} G_i(s) ds$, $G_i(\cdot)$ 为网络活化函数 $G(\cdot)$

的元. 求 V 沿式(6)的解的时间导数, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(6)} = & -G^T(x) D x + G^T(x) H G(x) + G^T(x) p \leq \\ & -G^T(x) D x + G^T(x) H G(x) + \\ & \frac{1}{2} (\frac{1}{r} G^T(x) G(x) + r p^T p) \leq \\ & G^T(x) H G(x) + \frac{r}{2} p^T p + \\ & [-G^T(x) D x + \frac{1}{2r} G^T(x) G(x)]. \end{aligned}$$

若 $r = \frac{k_2}{2d_s}$, 则 $-G^T(x)Dx + \frac{1}{2r}G^T(x)G(x) \leq 0$.

事实上

$$\begin{aligned} & -G^T(x)Dx + \frac{1}{2r}G^T(x)G(x) = \\ & -G(x)^TDx + \frac{d_s}{k_2}G(x)^TG(x) \leq \\ & -G(x)^TDx + d_sG(x)^Tx \leq 0. \end{aligned}$$

因此

$$\dot{V}_{(6)} \leq G^T(x)HG^T(x) + \frac{k_2}{4d_s}P^TP.$$

上式两边从 0 到 $t \geq 0$ 积分, 考虑到 $V(x(0)) = 0$, $V(x(t)) \geq 0$, 从而

$$\int_0^t x^T x ds \leq \frac{k_2}{4d_s k_1^2 \lambda_{\min}(-H)} \int_0^t p^T p ds.$$

因为 $p \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, 上式中令 $t \rightarrow \infty$, 即

$$\|x\|_{L_2} \leq \sqrt{\frac{k_2}{4d_s k_1^2 \lambda_{\min}(-H)}} \|p\|_{L_2}.$$

假设 A3) 成立时的证明方法同上, 从略. 证毕.

考察网络只存在内部扰动. 即如下受扰形式

$$\dot{x} = -Dx + HG(x + u), \quad x(0) = 0. \quad (7)$$

其中 $u \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ 为未知内部扰动. 类似定理 2 的证明, 可以得到结论

定理 3 如果式(7)满足假设 A4), A5), A6)', 则网络(7)关于扰动 L_2 增益稳定, 且增益估计为:

$$\|x\|_{L_2} \leq \sqrt{\frac{k_2^2}{2k_1 d_s}} \|u\|_{L_2}.$$

4 结论(Conclusion)

运用研究控制系统有限增益稳定的方法, 本文讨论受扰 Hopfield 网络关于扰动的 L_2 增益稳定, 并对 L_2 增益参数进行了估计. 本文得到的 L_2 增益稳定结果可以帮助我们从总体上把握受扰网络状态的变化, 即在什么条件下小信号扰动不会导致状态的发散, 增益估计式也有助于设计时调节网络参数, 以尽量削弱扰动的影响. 给出网络关于扰动 L_2 增益稳定的更弱的充分条件和更精细的 L_2 增益估计, 值得进一步研究.

参考文献(References)

[1] Hopfield J J, Tank D W. Neurons with graded response have collec-

tive computational properties like those of two - state neurons [J].

Proc. Nat. Acad. Sci., 1984, 79: 3088 - 3092

[2] Hopfield J J, Tank D W. Computing with neural circuits: a model [J]. Science, 1986, 233: 625 - 633

[3] Li J H, Michel A N. Qualitative analysis of a class of neural networks [J]. IEEE Trans. Circ. Syst., 1988, 35(8): 976 - 985

[4] Michel A N, Farrel J A, Porod W. Qualitative analysis of neural networks [J]. IEEE Trans. Circ. Syst., 1989, 36(2): 229 - 243

[5] Forti M, Manetti S, Marini M. A condition for global convergence of a class of symmetric neural circuits [J]. IEEE Trans. Circ. Syst., 1992, 39(6): 480 - 483

[6] Forti M. On global asymptotic stability of a class of nonlinear systems arising in neural networks theory [J]. J. Differential Equations, 1994, 113: 246 - 264

[7] Fang Y, Kincaid T G. Stability analysis of dynamical neural networks [J]. IEEE Trans. Neural Networks, 1996, 7(4): 996 - 1006

[8] Liang Xuebin, Wu Lide. On the global exponential stability of Hopfield-type neural networks and its applications [J]. Science In China (Series A), 1995, 25(5): 523 - 532

[9] Marcus C M, Westervelt R M. Stability of analog neural networks with delay [J]. Physical Review A, 1989, 39(1): 347 - 359

[10] Zhang Yi, Zhong Shouming, Wang Li. Global stability of neural networks with infinite delays [J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(2): 197 - 202

[11] Driessche P V, Zou X. Global attractivity in delayed Hopfield neural networks models [J]. SIAM J. Applied Mathematics, 1998, 58(6): 1878 - 1890

[12] Liu W, Chitour Y, Sontag E D. On finite-gain stabilizability of linear systems subject to input saturation [J]. SIAM J. Contr. Optim., 1996, 34(4): 1190 - 1219

[13] Wang Y, Xie L. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems [J]. Systems and Control Letters, 1992, 19(1): 139 - 149

[14] Juang J. Stability analysis of Hopfield-type neural networks [J]. IEEE Trans. Neural Networks, 1999, 10(6): 1366 - 1374

[15] Guan Z, Chen G, Qin Y. On equilibria, stability and instability of Hopfield neural networks [J]. IEEE Trans. Neural Networks, 2000, 11(2): 534 - 540

本文作者简介

叶华文 1968 年生, 现为西北工业大学自动控制系博士后. 主要研究方向为非线性控制系统反馈镇定和稳定自适应控制.

Email: yehua wen@163.com

戴冠中 1937 年生, 毕业于哈尔滨军事工程学院. 现为西北工业大学校长, 教授, 博士生导师. 研究领域为大系统理论, 智能控制, 信息融合, 并行分布计算与处理等.

王 红 见本刊 2002 年第 2 期第 634 页.

罗永红 1963 年生, 1983 年毕业于廊坊导弹学院, 现为新疆军区弹药试验站导弹室工程师. 多次获得军队科技进步奖, 目前的研究领域: 导弹控制系统, 计算机硬件, 神经网络等.