

文章编号: 1000-8152(2002)04-03-0647

积分二次约束线性系统的 H_∞ 控制器设计: 一种 LMI 方法

胡中骥, 施颂椒, 翁正新

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘要: 基于动态耗散理论, 给出了具有积分二次约束线性系统稳定和具有 L_2 有限增益的充分条件. 导出了积分二次约束线性系统 H_∞ 状态反馈和动态输出反馈降阶控制器的设计方法, 并转化为多个线性矩阵不等式, 利用 LMI 工具箱求解.

关键词: H_∞ 控制; 积分二次型约束; 线性矩阵不等式; 状态反馈; 输出反馈

中图分类号: TP273

文献标识码: A

H_∞ controller design for linear systems with integral quadratic constraints: an LMI approach

HU Zhong-ji, SHI Song-jiao, WENG Zheng-xin

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Based on dissipativity theory, sufficient conditions for stability and bounded- L_2 gain of linear systems with integral quadratic constraints were presented. The design methods of static state feedback controller and dynamic reduced-order output feedback controller for linear systems with integral quadratic constraints were derived. All the problems were converted to linear matrix inequalities that can be solved by the LMI toolbox in Matlab.

Key words: H_∞ control; integral quadratic constraints (IQC); linear matrix inequality (LMI); state feedback; output feedback

1 引言 (Introduction)

对某些工业系统进行建模, 往往会碰到系统有些环节既不能线性化, 其非线性特性又不能精确描述, 但可用不等式描述的函数集表示. 对这一类系统, 可以统一地以积分二次约束来表示. 前苏联学者发现^[1,2], 积分二次型约束既可描述系统的增益信息, 又可以描述系统的相位信息, 还可以描述系统输入输出的结构信息, 故它能描述范围广泛的一类非线性环节.

对具有积分二次约束非线性环节的线性系统, 研究其 H_∞ 控制问题, 可以采用文[3~5]中提出的一般方法. 如文[3]指出在系统状态和扰动输入可量测时, 其 H_∞ 控制问题可转化为一个 HJI (Hamilton-Jacobi Inequality) 求解. 文[4]考虑当可量测信息为状态变量和扰动输入的函数时, 可通过量测反馈使系统内稳定和具有局部干扰衰减. 对控制输入和干扰输入仿射的对象, 它的局部干扰衰减问题可以化为两个 HJE (Hamilton-Jacobi Equation) 求解. 文[5]

讨论了量测反馈设计问题中的分离性原则以及系统内稳定且具 H_∞ 干扰衰减的必要条件. 所有这些结果都归结到 HJI 和 HJE 的求解. 但要解 HJI 和 HJE, 目前还很困难.

为了避免求解的困难, 本文提出了基于 LMI 的求解方法. 导出了积分二次约束线性系统 H_∞ 状态反馈控制器的可解条件以及它的输出反馈降阶控制器的可解条件. 本文充分利用了积分二次约束环节控制变量可量测和部分可量测的信息, 从而减少保守性.

2 问题描述 (Problem statement)

考察如下形式具有二次积分约束非线性环节的线性系统:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_p p + B_u u + B_w w, \\ q = C_q x + D_{qp} p + D_{qu} u + D_{qw} w, \\ z = C_z x + D_{zp} p + D_{zu} u + D_{zw} w, \\ y = C_y x + D_{yp} p + D_{yw} w. \end{cases} \quad (1)$$

上式中, $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $(q, p) \in \mathbb{R}^{n_q} \times \mathbb{R}^{n_p}$ 为系统非线性环节的输入和输出, $(u, y) \in \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_y}$

为系统的控制输入和输出, $(w, z) \in \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_z}$ 为外部干扰信号及其观测信号. 设系统中非线性环节为: $p = \Psi(q, t)$, 其中 $\Psi(q, t)$ 为满足下面积分二次型约束(IQC)的非线性函数, 即对 $\forall q \in \mathbb{R}^{n_q}$, 有:

$$\int_0^t [\Psi^T(q, t) q^T(t)] \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12}^T & \pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(q, t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \geq 0, \quad (2)$$

其中 $\pi = \pi^T = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12}^T & \pi_{22} \end{bmatrix}$. 式(2)可以表示范围很广的一类非线性约束, 特殊的 IQC 有以下几种:

a) 有限增益类. 令

$$\pi = \begin{bmatrix} -I & \\ & \alpha^2 I \end{bmatrix}, \alpha > 0,$$

式(2)变为 $\int_0^t (p^T p - \alpha^2 q^T q) dt \leq 0$;

b) 无源类. 令

$$\pi = \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix},$$

式(2)变为 $\int_0^t p^T q dt \geq 0$, 此时 $n_q = n_p$;

c) 耗散类. 令

$$T = \begin{bmatrix} A^T P + PA + \lambda C_q^T \pi_2 C_q & PB_p + \lambda (C_q^T \pi_{12}^T + C_q^T \pi_2 D_{qp}) & PB_w + C_q^T \pi_2 D_{qw} & C_z^T \\ B_p^T P + \lambda (\pi_{12} C_q + D_{qp}^T \pi_2 C_q) & \lambda (\pi_{11} + D_{qp}^T \pi_{12}^T + \pi_{12} D_{qp} + D_{qp}^T \pi_2 D_{qp}) & \lambda (\pi_{12} D_{qw} + D_{qp}^T \pi_2 D_{qw}) & D_{zp}^T \\ B_w^T P + \lambda D_{qw}^T C & \lambda (D_{qw}^T \pi_{12}^T + D_{qw}^T \pi_2 D_{qp}) & -\gamma^2 I + \lambda D_{qw}^T \pi_2 D_{qw} & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zp} & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0.$$

3.2 状态反馈(State-feedback)

定理 2 考虑系统 Σ 中, $\pi_2 > 0$, 如存在实数 γ

$> 0, \lambda \geq 0$ 和适维矩阵 $Q > 0, K_p, Y$ 使得式(3)成

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} QA^T + AQ + B_u Y + Y^T B_u^T & \bar{B}_p + \lambda Y^T D_{qu}^T \pi_{12}^T + \lambda QC_q^T \pi_{12}^T & B_w & QC_z^T + Y^T D_{zu}^T & QC_q^T + Y^T D_{qu}^T \\ \bar{B}_p^T + \lambda \pi_{12} D_{qu} Y + \lambda \pi_{12} C_q Q & \lambda (\pi_{11} + \bar{D}_{qp}^T \pi_{12}^T + \pi_{12} \bar{D}_{qp}) & \lambda \pi_{12} D_{qw} & \bar{D}_{zp}^T & \bar{D}_{qp}^T \\ B_w^T & \lambda D_{qu}^T \pi_{12}^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T & D_{qw}^T \\ C_z Q + D_{zu} Y & \bar{D}_{zp} & D_{zw} & -I & 0 \\ C_q Q + D_{qu} Y & \bar{D}_{qp} & D_{qw} & 0 & -(\lambda \pi_2)^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (3)$$

3.3 输出反馈(Output feedback)

定理 3 考虑系统 Σ 中, $\pi_2 > 0$, 如存在实数 γ

$< 0, \lambda \geq 0$ 和适维矩阵 $X, Y > 0$ 使得式(4), (5)成

$$M_B \begin{bmatrix} YA^T + AY & YC_z^T & YC_q^T & B_p & B_w \\ C_z Y & -I & 0 & D_{zp} & D_{zw} \\ C_q Y & 0 & -(\lambda \pi_2)^{-1} & D_{qp} + \pi_2^{-1} \pi_{12}^T & D_{qw} \\ B_p^T & D_{zp}^T & D_{qp}^T + \pi_{12} \pi_2^{-1} & \lambda (\pi_{11} - \pi_{12} \pi_2^{-1} \pi_{12}^T) & 0 \\ B_w^T & D_{zw}^T & D_{qw}^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} M_B^T < 0, \quad (4)$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.5I & \\ 0.5I & -\eta I \end{bmatrix}, \eta > 0,$$

式(2)变为 $\int_0^t (p^T q - \eta q^T q) dt \leq 0$;

d) 结构 IQC. 令

$$\pi = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{22}$ 均为对角阵.

3 主要结果(Main results)

3.1 H_∞ 稳定性(H_∞ Stability)

系统 Σ 内稳定且具有有限 L_2 增益 $\gamma (\gamma > 0)$ 是指: 1) 当 $w = 0$ 时, 系统在平衡点 $x(t) = 0$ 处渐近稳定; 2) 当 $x(0) = 0$ 时, 对 $\forall t \geq 0$, 有

$$\int_0^t (z^T(s) z(s) - \gamma^2 w^T(s) w(s)) ds \leq 0.$$

系统 H_∞ 稳定性问题是指系统输入 $u = 0$ 时系统内稳定且有有限 L_2 增益. 对此, 有以下定理.

定理 1 对系统 Σ , 如存在 $P > 0, \lambda \geq 0$, 使得下面线性矩阵不等式成立, 则系统 Σ 内稳定且具有有限 L_2 增益 γ .

立, 则状态反馈

$$u = Kx + K_p p, K = YQ^{-1}$$

能使系统内稳定且具有有限 L_2 增益 γ .

立, 则如下动态输出反馈控制器 Σ_c 能使系统内稳定且具有有限 L_2 增益 γ . 而且, 输出反馈控制器的阶次可以取为 $\text{Rank}(X - Y^{-1})$.

$$M_C \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB_w & C_z^T & C_q^T \\ B_w^T X & -\gamma^2 I & D_{zw}^T & D_{qw}^T \\ C_z & D_{zw} & -I & 0 \\ C_q & D_{qw} & 0 & -(\lambda\pi_2)^{-1} \end{bmatrix} M_C^T < 0, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$M_B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u \\ D_{zu} \\ D_{qu} \end{bmatrix} \\ I \end{bmatrix}, \quad M_C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix} \\ I \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y + B_{cp} p, \\ u = C_c x_c + D_c y + D_{cp} p. \end{cases}$$

4 仿真(Simulation)

为了验证本文结果,我们做以下仿真.假定系统积分二次环节控制变量可量测,令系统各矩阵取值如下:

$$\begin{bmatrix} A & B_p & B_u & B_w \\ C_q & D_{qp} & D_{qu} & D_{qw} \\ C_z & D_{zp} & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & D_{yp} & D_{yu} & D_{yw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

可解得状态反馈控制器为

$$u = [-9.9985 \quad -0.0827] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 0.0017 \cdot p.$$

相应的最优干扰衰减系数为

$$\lambda_{\min\text{-state}} = 1.490e - 001.$$

状态反馈闭环系统仿真结果如图 1 所示,其中 $p(t) = \sin(q(t))$. 外干扰信号的幅值为 1,频率为 50.

输出反馈控制器为

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{x}_c = \begin{bmatrix} -2.8595 & -19.1025 \\ 5.6410 & -6.6851 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} -8.6284 \\ 30.4788 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -0.8703 \\ 3.0518 \end{bmatrix} p, \\ u = [-0.1016 \quad 0.7011] x_c - 4.7358 \cdot y - 0.4731 \cdot p, \end{cases}$$

相应的最优干扰衰减系数为

$$\lambda_{\min\text{-output}} = 5.332e - 002,$$

仿真结果图略.

从理论计算和实际的仿真结果都可以看出,求得的状态反馈和输出反馈控制器,都能使闭环系统

具有良好的干扰衰减性能.

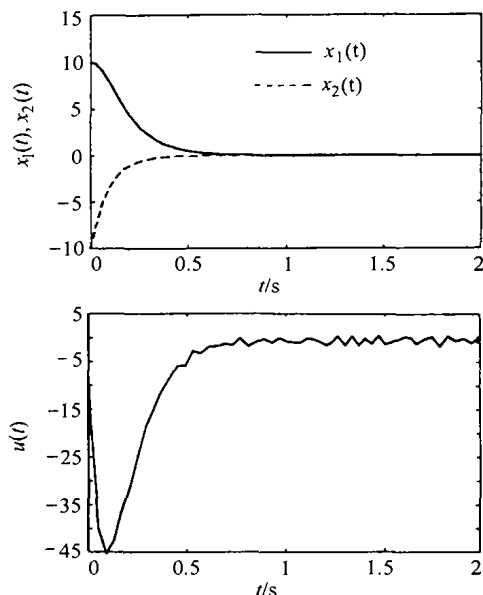


图 1 仿真结果

Fig. 1 Simulation result

5 结论(Conclusion)

对具有积分二次型非线性环节的线性系统,如果它的非线性环节控制变量可量测,或部分可量测,则可以利用这一信息来进行系统的状态反馈和输出反馈设计,使得闭环系统内稳定且具有 L_2 有限增益.无论对状态反馈,还是降阶输出反馈设计,它们的可解条件都可以用线性矩阵不等式表示.从而,可以利用 LMI 计算工具求解综合问题.

参考文献(References)

- [1] Yakubovich V A. Nonconvex optimization problem: the infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic constraints [J]. Systems and Control Letters, 1992, 19(1): 13 - 22
- [2] Megretski A, Rantzer A. System analysis via integral constraints [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1997, 42(6): 819 - 829
- [3] Van der Schaft A J. On a state space approach to nonlinear H_∞ control [J]. Systems and Control letters, 1991, 16(1): 1 - 8
- [4] Isidori A, Astolfi A. Disturbance attenuation and control via measurement feedback in nonlinear systems [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1992, 37(9): 1283
- [5] Willems J C. Dissipative dynamical systems, Part I: general theory [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1972, 45(3): 321 - 351

本文作者简介

胡中骥 1973 年生,上海交通大学自动化系博士研究生.主要研究方向为鲁棒控制和 H_∞ 控制, LMI.

施颂椒 1933 年生,上海交通大学自动化系教授,博士生导师.主要研究方向:鲁棒控制,自适应控制及其应用等.

翁正新 1966 年生,上海交通大学自动化系副教授,博士.主要研究方向:鲁棒控制,模糊控制及其应用等.