

不确定线性系统迭代学习控制器的设计*

许顺孝¹, 杨富文²

(1. 集美大学 信息工程学院, 厦门 361021; 2. 福州大学 电气工程系, 福州 350002)

摘要: 推导出采用闭环动态迭代学习律的不确定线性系统收敛充分条件, 把它转化为系统输出反馈 H_∞ 控制问题, 然后用线性矩阵不等式(LMI)方法系统设计迭代学习控制器, 控制器具有鲁棒性较强、阶次较低等优点. 最后仿真结果表明该设计方法的有效性.

关键词: 迭代学习; 不确定性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Synthesis of an iterative learning controller for uncertain linear systems

XU Shun-xiao¹, YANG Fu-wen²

(1. School of Information Engineering, Jimei University, Xiamen 361021, China;

2. Department of Electrical Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: A sufficient condition of convergence for the uncertain linear system with closed-loop iterative learning law is derived. Based on this condition, it is shown that the synthesis of an iterative learning controller can be reformulated as a synthesis of an H_∞ (sub)optimal controller which can be solved based on LMI approach. As a result, The designed controller is robust and lower order. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: iterative learning; uncertainties; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

迭代学习控制由 Arimoto 等人^[1]首次提出完整的控制算法, 并引起人们的广泛关注^[2]. 现在, 大部分文章都集中在推导迭代学习控制系统收敛的充分条件, 关于如何设计迭代学习控制器, 保证系统收敛的讨论很少, 设计时考虑系统不确定性的更少. Moon 等人^[3]和 Roover^[4]用鲁棒控制理论的 μ 设计方法设计不确定线性系统开环迭代学习控制器, 但控制器阶次都偏高. 本文运用鲁棒控制理论的 LMI 方法^[5]设计不确定线性系统闭环迭代学习控制器, 控制器的阶次较低, 并且同时可镇定系统、改善暂态性能和抑制非周期性干扰.

2 问题描述及转化(Problem statement and transformation)

考虑下述系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_h x_1(t) + B_h u_1(t), \\ y_1(t) = C_h x_1(t), \quad x_1(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $u_1(t) \in \mathbb{R}^p$, $y_1(t) \in \mathbb{R}^q$, 分别为

系统的状态、控制输入和输出向量, $A_h = A_{0h} + \Delta A_h$, $B_h = B_{0h} + \Delta B_h$, $[\Delta A_h \quad \Delta B_h] = DQ[E_1 \quad E_2]$, $A_{0h}, B_{0h}, C_h, D, E_1, E_2$ 分别为具有适当维数的常数矩阵, $Q \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 为 Lebesgue 可测元的不确定矩阵, 并满足:

$$Q^T Q \leq I_j. \quad (2)$$

下面, 给出迭代学习控制律及相应的收敛条件.

引理 1 若 $P(s)$ 为能镇定能观测系统(1)的传递函数, 系统的输入、输出对应为 $U(s), Y(s)$, 学习控制律为

$$U_{k+1}(s) = (U_k(s) + K(s)E_{k+1}(s)), \quad (3)$$

并且满足零初始条件: $y_k(0) = y_d(0)$, $\forall k, k$ 为迭代次数. 在 L_2 范数意义下系统收敛 ($\lim_{k \rightarrow \infty} (y_d(t) - y_{1k}(t)) = 0$) 的充分条件为

$$\|F(s)\|_\infty = \|(1 + P(s)K(s))^{-1}\|_\infty < 1. \quad (4)$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 为 H_∞ 范数, $K(s)$ 为控制器, I 为适当维数的单位矩阵.

* 基金项目: 国家自然科学基金(69974010), 教育部高校骨干教师基金(DQ2000-14)和福建省自然科学基金(F97009)资助项目.

收稿日期: 2000-06-28; 收修改稿日期: 2001-01-31.

证 (略).

为了保证 $P(s)$ 或 $K(s)$ 严格正则时, 引理 1 能成立, 其条件改为

$$\|F_1(s)\|_\infty = \|(I + P(s)K(s))^{-1}W(s)\|_\infty < 1. \quad (5)$$

其中 $W(s)$ 为截止频率大于系统期望频宽的低通滤波器, 并且系统各输出的滤波器相互独立即:

$$W(s) = \text{diag}(W_1(s), \dots, W_q(s)).$$

构造图 1 所示的反馈控制系统, 使其传递函数 $T_{zw}(s) = F_1(s)$.

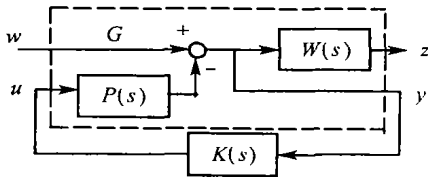


图 1 反馈控制系统框图

Fig. 1 Diagram of feedback control system

若滤波器 $W(s)$ 的状态空间实现为

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_w x_2(t) + B_w u_2(t), \\ y_2(t) = C_w x_2(t) + D_w u_2(t). \end{cases} \quad (6)$$

其中 $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u_2(t), y_2(t) \in \mathbb{R}^q$, 分别为滤波器的状态、输入和输出向量. 那么系统 G 状态空间实现为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t), \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $x(t) = [x_2(t) \quad x_1(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $w(t), z(t), y(t) \in \mathbb{R}^q$, 分别为系统 G 的状态、控制输入和干扰输入、受控输出和可测输出向量.

$$A = \begin{bmatrix} A_w & B_w C_h \\ 0 & A_h \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} B_w \\ 0_{n_2 \times q} \end{bmatrix}, D_{11} = D_w,$$

$$B_2 = [0_{n_2 \times p} \quad -B_h]^T, C_1 = [C_w \quad D_w C_h],$$

$$C_2 = [0_{q \times n_2} \quad -C_h], C_{11} = D_w, D_{21} = I_q.$$

这样我们把问题归纳为:

问题 设计系统(7)的 H_∞ 输出反馈为 $u(s) = k(s)y(s)$ 使得闭环系统渐近稳定, 并且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma, \gamma = 1$. 那么 $K(s)$ 就是所要求的迭代学习控制器.

3 主要结果(Main results)

定理 1 系统(7)采用输出反馈 $u(s) = k(s)y(s)$ 使得闭环系统渐近稳定, 并且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件: 存在常数 $\epsilon > 0$, 正定对称阵 R, S 使得下面三式成立.

$$\Theta^T \begin{bmatrix} RA_0^T + A_0 R & RE_{\Delta 1}^T & B_1 & D_{\Delta} & C_1^T R \\ E_{\Delta 1} R & -\epsilon^2 I & 0 & 0 & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma I & 0 & D_{11}^T \\ D_{\Delta}^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon^2} I & 0 \\ C_1 R & 0 & D_{11} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \Theta < 0,$$

$$\Psi^T \begin{bmatrix} A_0^T S + SA_0 & SB_1 & SD_{\Delta} & C_1^T & E_{\Delta 1}^T \\ B_1^T S & -\gamma I & 0 & D_{11}^T & 0 \\ D_{\Delta}^T S & 0 & -\epsilon^2 I & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 & -\gamma I & 0 \\ E_{\Delta 1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon^2} I \end{bmatrix} \Psi < 0,$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0.$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_w & B_w C_h \\ 0 & A_{0h} \end{bmatrix}, D_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0_{02 \times i} \\ D \end{bmatrix},$$

$$B_{20} = [0_{n_2 \times p} \quad -B_{0h}]^T, E_{\Delta 1} = [0_{j \times n_2} \quad E_1],$$

$$\Theta = \text{diag}(N_R, I), \Psi = \text{diag}(N_S, I),$$

N_R, N_S 分别为 $[B_{20}^T \quad -E_1^T]^T, [C_2 \quad D_{21}]^T$ 的正交补.

证 设控制器的传递函数为

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K,$$

那么图 1 所示系统的传递函数 $F_1(s)$ 为

$$F_1(s) = C_{CL}(sI - A_{CL})^{-1}B_{CL} + D_{CL}. \quad (8)$$

其中

$$A_{CL} = A_i + BB_i K C_u, D_{CL} = D_{11},$$

$$B_{CL} = B_i + BB_i K D_2, C_{CL} = [C_1 \quad 0_{q \times k}],$$

$$A_i = \text{diag}(A, 0_k), BB_i^T = \text{diag}(B_2, I_k),$$

$$B_i = [B_1 \quad 0_{k \times q}]^T, D_2 = [0_{k \times q} \quad D_{21}]^T,$$

$$C_u = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+p) \times (k+q)}.$$

根据文献 6 的引理 1 和实有界引理^[5], 系统(8)渐近稳定, 且 $\|F_1(s)\|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件存在: $\epsilon > 0$ 和正定对称阵 P 使得下式成立.

$$\Phi + \Sigma \Pi K \Omega^T + \Omega K^T \Pi^T \Sigma^T < 0, \quad (9)$$

这里

$$\Phi = \begin{bmatrix} A_{00}^T P + PA_{00} & PB_i & PD_{0\Delta} & C_{CL}^T & E_{0\Delta 1}^T \\ B_i^T P & -\gamma I & 0 & D_{11}^T & 0 \\ D_{0\Delta}^T P & 0 & -\epsilon^2 I & 0 & 0 \\ C_{CL} & D_{11} & 0 & -\gamma I & 0 \\ E_{0\Delta 1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon^2} I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, D_{0\Delta} = \begin{bmatrix} D_\Delta \\ 0_{k \times i} \end{bmatrix}, \\
 B_{200} &= \begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I_K & 0 \end{bmatrix}, \\
 E &= [E_{0\Delta 1} + E_{0\Delta 2} K C_u \quad E_{0\Delta 2} K D_2 \quad 0], \\
 E_{0\Delta 1} &= [E_{\Delta 1} \quad 0_{j \times k}], \\
 E_{0\Delta 2} &= [0_{j \times k} \quad -E_2], \\
 \Sigma &= \text{diag}(P, I, I, I, I), \\
 \Pi &= [B_{200}^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad E_{0\Delta 2}^T]^T, \\
 \Omega &= [C_u \quad D_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.
 \end{aligned}$$

接下来沿用证明定理 4.2^[5]的思路,定理 1 即可得证.

下面是控制器求解步骤:

- 1) 依据期望给定,选取滤波器得系统 G ;
- 2) 调整 ϵ 求得满足定理 1 的 R, S ;
- 3) 求满足下式的列满秩矩阵 M, N :

$$MN^T = I - RS;$$

- 4) 由下式求取矩阵 P :

$$\begin{bmatrix} S & I \\ N^T & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & M^T \end{bmatrix};$$

- 5) 由式(9)根据引理 3.1^[5]求得 K .

4 仿真实例(Simulation example)

不稳定系统:

$$\begin{aligned}
 A_{0h} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{0h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\
 C_h &= [1 \quad 3], E_1 = [1 \quad 1], E_2 = 1, Q = 1.
 \end{aligned}$$

期望信号为:

$$y_d(t) = \sin(\pi t) + \sin(2\pi t), t \in [0, 1]$$

秒.选取一阶滤波器

$$W(s): A_w = -10, B_w = 1, C_w = 10, D_w = 0,$$

采用控制律(3):

$$K = \begin{bmatrix} -3.93 & 2 & 484.96 \\ -0.92 & -9.7 & 1528.21 \\ -0.2 & 0.2 & 47.61 \end{bmatrix},$$

$$\epsilon = 2300, \gamma = 0.9349$$

输入、系统和动态反馈控制器的初态都为零.进行下面两种仿真,结果如图 2 所示:

- 1) 按上述参数进行仿真;
- 2) 另令 $Q = \sin(2\pi t)$.

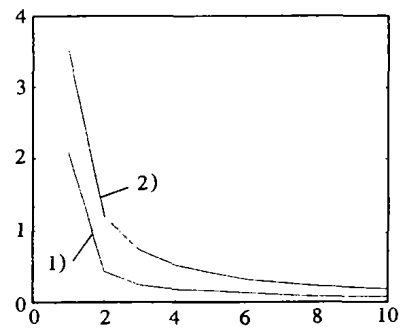


图 2 系统跟踪误差均方差

Fig. 2 Tracking error mean square of system

5 结论(Conclusions)

我们推导了不确定线性系统闭环迭代学习收敛的充分条件,把它转化为典型的系统输出反馈 H_∞ 控制问题,最后用 LMI 方法系统地设计学习控制器.仿真表明控制器能镇定不稳定系统,系统收敛速度率较高;控制器鲁棒性很强,系统参数连续变化,系统的收敛速率不受影响;控制器阶次较低,仅为 2,但 ϵ 值较难于确定.

参考文献(References)

- [1] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of dynamic systems by learning: a new control theory for servomechanism or mechatronics systems [A]. Proc. 23th IEEE Conf. Decision and Control [C]. Las Vegas, Nevada, U.S.A, 1984, 1064 - 1069
- [2] Moore K L. Iterative learning control—an expository overview [J]. Applied Computational Controls, Signal Processing, and Circuits, 1998, 1(1): 425 - 488
- [3] Moon J H, Doh T Y, Chung M J. A robust approach to iterative learning control design for uncertain systems [J]. Automatica, 1998, 34(8): 1001 - 1004
- [4] de Roover D. Synthesis of a robust iterative learning control using an H_∞ approach [A]. Proc. 36th IEEE Conf. Decision and Control [C]. Kobe, Japan, 1996, 3044 - 3049
- [5] Gahinet P, Apkarian P. An LMI-based parameterization of all H_∞ controllers with applications [A]. Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control [C]. San Antonio, Texas, 1994, 656 - 661
- [6] Su H Y, Chu J. Robust H_∞ control for linear time-varying uncertain time-delay systems via dynamic output feedback [J]. Int. J. Systems Science, 1999, 30(10): 1093 - 1107

本文作者简介

许顺孝 1965 年生.1990 年在上海海运学院获硕士学位.现为集美大学信息工程学院副教授.福州大学电气工程系在职博士生.主要研究方向是迭代学习控制,过程控制.

杨富文 1963 年生.1990 年在华中理工大学自动控制系获博士学位.现为福州大学电气工程系教授,博士生导师.主要研究方向是 H_∞ 控制与滤波,信号处理,迭代学习控制以及自动化工程应用研究.