

参数摄动混杂离散系统的鲁棒稳定性*

张 霓¹, 吴铁军²

(1. 浙江工业大学 自动化系, 杭州 310032; 2. 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 杭州 310027)

摘要: 采用线性矩阵不等式(LMI)方法研究离散事件状态转移条件为状态依赖的参数摄动线性混杂离散系统的鲁棒稳定性问题, 提出此类系统全局鲁棒渐近稳定性判定定理, 基于分段 Lyapunov 函数给出了一般混杂离散系统在 Lyapunov 意义下局部稳定的判定定理, 该定理可将线性混杂离散系统的稳定性问题转化为 LMI 问题, 在此基础上提出了参数摄动线性混杂离散系统在 Lyapunov 意义下局部鲁棒稳定的充分条件.

关键词: 混杂系统; 鲁棒稳定性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust stability of hybrid discrete systems with parameter perturbation

ZHANG Ni¹, WU Tie-jun²

(1. Department of Automation, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China;

2. National Laboratory for Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: With the linear matrix inequality (LMI) method, this paper investigates the robust stability of general linear hybrid discrete systems with parameter perturbation. The sufficient conditions for global robust asymptotic stability are proposed. Based on the multiple Lyapunov functions, the sufficient conditions are presented for local Lyapunov stability of general hybrid discrete systems. By applying the result, the stability problems of the linear hybrid discrete systems can be formulated as the LMI problems. Furthermore, the sufficient conditions are derived for local robust Lyapunov stability of the linear hybrid discrete systems with parameter perturbation.

Key words: hybrid systems; robust stability; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

近几年来, 混杂系统的分析与控制已成为计算机科学和控制科学的研究热点. 混杂系统是由离散事件动态系统与连续时间动态系统或离散时间动态系统相互混合、相互作用而形成的统一动态系统. 这种混合性在控制系统中普遍存在: 如机器人、容错飞行控制以及工业生产过程的调度、监控等. 混杂系统通常可分为两类: 一类由连续时间动态系统和离散事件动态系统构成, 称为混杂连续系统; 另一类由离散时间动态系统和离散事件动态系统构成, 称为混杂离散系统. 目前, 有关混杂系统方面的研究主要针对混杂连续系统进行, 对混杂离散系统的研究则比较少. 由于控制系统中数字计算机的普遍应用, 混杂离散系统在实际中广泛存在, 因此非常有必要对其进行深入研究.

在混杂离散系统稳定性研究领域, Branicky^[1]将传统 Lyapunov 理论向混杂系统扩展, 采用多个 Lyapunov 函数判断混杂离散系统的稳定性, 给出了混杂离散系统在 Lyapunov 意义下稳定的充分条件. Soh^[2]通过分析系统状态转移矩阵的特征根来判定参数不确定周期线性混杂离散系统的稳定性, 这种方法对于非周期混杂系统并不适用.

本文研究离散事件状态转移条件为状态依赖的参数摄动线性混杂离散系统, 由于这类系统具有非周期离散事件状态切换序列, 其鲁棒稳定性分析方法需特别加以研究. 本文提出了此类系统全局鲁棒渐近稳定的判定条件, 基于分段 Lyapunov 函数给出了该类系统在 Lyapunov 意义下局部鲁棒稳定的充分条件.

2 系统描述(System description)

考虑如下参数摄动线性混杂离散系统:

* 基金项目: 浙江省教育厅科技项目基金(2000432)资助项目.

收稿日期: 2000-12-26; 收修改稿日期: 2001-12-07.

$$x(k+1) = (A(m(k)) + \Delta A(m(k), k))x(k), \quad (1)$$

$$m(k^+) = \phi(x(k), m(k)). \quad (2)$$

其中, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为离散时间状态, $m(k) \in M = \{m_1, \dots, m_N\}$ 为离散事件状态, ϕ 为离散事件状态转移函数. $A(m(k))$ 为适维矩阵, 当 $m(k) = m_i$ 时, $A(m(k)) = A_i$, 且 $A_i \in \{A_1, \dots, A_N\}$. $\Delta A(m(k), k)$ 为时变参数摄动阵, 当 $m(k) = m_i$ 时, $\Delta A(m(k), k) = \Delta A_i(k)$, 其中 $\Delta A_i(k) \in \{\Delta A_1, \dots, \Delta A_N(k)\}$, 并满足:

$$\Delta A_i(k) = E_i \Sigma_i(k) F_i, \text{ 且 } \sum_i^T(k) \Sigma_i(k) \leq 1.$$

式中, E_i, F_i 均为已知定常阵, $\Sigma_i(k)$ 为未知时变函数阵.

不失一般性, 本文假设线性混杂离散系统离散时间状态空间的原点(以下简称原点)为平衡点, 即: 若对某个 $k_e \geq 0$ 有 $x(k_e) = 0$, 则对于任意 $k \geq k_e, x(k) \equiv 0$.

3 全局鲁棒渐近稳定性(Global robust asymptotic stability)

定义 1 若参数摄动线性混杂离散系统(1), (2)的平衡点 $x(k) = 0$ 对于任意初始混杂状态(以下简称初始状态)是鲁棒渐近稳定的, 则该平衡点是全局鲁棒渐近稳定的.

引理 1^[3] 设 E, Σ, F 是具有适当维数的矩阵, 则对任意常数 $\epsilon > 0$ 及所有满足 $\Sigma \Sigma^T \leq I$ 的矩阵 Σ , 以下不等式成立:

$$E \Sigma F + F^T \Sigma^T E^T \leq \epsilon E E^T + \epsilon^{-1} F^T F.$$

定理 1 参数摄动线性混杂离散系统(1), (2)原点全局鲁棒渐近稳定的充分条件是: 对所有 $i \in \{1, \dots, N\}$, 存在适当正数 $\epsilon_i > 0$ 和一个正定对称矩阵 P 使得如下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} P - \epsilon_i^{-1} F_i^T F_i & -A_i^T P & 0 \\ -PA_i & P & PE_i \\ 0 & E_i^T P & \epsilon_i^{-1} I \end{bmatrix} > 0. \quad (3)$$

证 选取函数 $V(x(k)) = x^T(k) P x(k)$, 其中 P 为正定对称阵, 则 $V(x(k))$ 正定. 采用 $V(x(k))$ 作为混杂离散系统(1), (2)在整个混杂状态空间中的能量函数. 由于:

$$\Delta V(x(k)) = x^T(k) (A_i + E_i \Sigma_i(k) F_i)^T P (A_i + E_i \Sigma_i(k) F_i) x(k) - x^T(k) P x(k).$$

由矩阵的 Schur 补^[4]可知, $\Delta V(x(k)) < 0$ 等价于:

$$\begin{bmatrix} P & -(A_i + E_i \Sigma_i(k) F_i)^T \\ -(A_i + E_i \Sigma_i(k) F_i) & P^{-1} \end{bmatrix} > 0.$$

对上式分别左乘和右乘矩阵 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$, 可得:

$$\begin{bmatrix} P & -A_i^T P \\ -PA_i & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma_i^T(k) \begin{bmatrix} 0 & E_i^T P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ PE_i \end{bmatrix} \Sigma_i(k) \begin{bmatrix} F_i & 0 \end{bmatrix} > 0.$$

因为 $\Sigma_i^T(k) \Sigma_i(k) \leq I$, 由引理 1 可知: 上式成立, 若存在常数 $\epsilon_i > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} P - \epsilon_i^{-1} F_i^T F_i & -A_i^T P \\ -PA_i & P - \epsilon_i PE_i E_i^T P \end{bmatrix} > 0.$$

由矩阵的 Schur 补可知, 该式等价于式(3).

因此如果式(3)对所有 $i \in \{1, \dots, N\}$ 都成立, 那么无论该混杂系统的离散事件状态切换次序如何都有 $\Delta V(x(k)) < 0$.

因为混杂离散系统(1), (2)是一个自治系统, 其离散事件状态的转移条件又是状态依赖的, 所以该混杂系统的离散事件状态切换次序完全由初始状态决定. 既然 $\Delta V(x(k)) < 0$ 对该混杂系统的任何离散事件状态切换次序都成立, 那么这也就意味着对于任意初始状态, $\Delta V(x(k)) < 0$ 成立.

又因为当 $\|x(k)\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(x(k)) \rightarrow \infty$, 所以此时参数摄动线性混杂离散系统(1), (2)的原点是全局鲁棒渐近稳定的.

4 局部鲁棒 Lyapunov 稳定性(Local robust Lyapunov stability)

在某些混杂离散系统中, 其离散时间动态子系统并不都是稳定的, 但通过合理的切换可使整个混杂系统保持稳定, 也就是说这些混杂离散系统的稳定性只对某些特殊的离散事件状态切换序列成立. 对于一个已设计好的混杂离散系统(1), (2)来说, 离散事件状态切换次序由初始状态决定, 所以, 如果混杂离散系统包含不稳定的离散时间子系统, 那么其稳定性只可能对某些初始状态成立, 即该混杂离散系统的稳定性是局部的. 本节采用分段 Lyapunov 函数对这种情况进行研究.

4.1 混杂离散系统的局部 Lyapunov 稳定性(Local Lyapunov stability of hybrid discrete systems)

考虑如下一般混杂离散系统:

$$x(k+1) = f(x(k), m(k)), \quad (4)$$

$$m(k^+) = \phi(x(k), m(k)). \quad (5)$$

其中, $f(\cdot, \cdot)$ 为 n 维向量函数, 其余符号定义同前. 不失一般性, 假设混杂离散系统离散时间状态空间的原点(以下简称原点)为平衡点, 即: 若对某个 k_e

≥ 0 有 $x(k_e) = 0$, 则对于任意 $k \geq k_e$, $x(k) \equiv 0$.

对于给定的初始状态 $(x(0), m(0))$, 将一般混杂离散系统(4), (5) 的混杂状态运行空间 Ω 划分成 l 个区域 $\Omega_q (q \in \bar{q} = \{1, \dots, l\})$, 令 $\Omega_q^x \subset \mathbb{R}^n$ 表示 Ω_q 的离散时间状态集, $\Omega_q^m \subset M$ 表示 Ω_q 的离散事件状态集. 定义从区域 Ω_f 到 $\Omega_g (f, g \in \bar{q}, f \neq g)$ 的切换集 Λ_{fg} 为:

$$\Lambda_{fg} = \{(x(k), m(k)) \mid \text{若对 } (x(k), m(k)) \in \Omega_f, \\ \text{有 } (x(k^+), m(k^+)) \in \Omega_g\}. \quad (6)$$

Λ_{fg} 是混杂状态轨迹从 Ω_f 到 Ω_g 所穿过的 Ω_f 边界点的集合. 令 $\Lambda_{fg}^x \subset \mathbb{R}^n$ 表示 Λ_{fg} 的离散时间状态集, $\Lambda_{fg}^m \subset M$ 表示 Λ_{fg} 的离散事件状态集. 令 $I_\Lambda = \{(f, g) \mid \Lambda_{fg} \neq \emptyset\}$.

令区域 Ω_f 的 Lyapunov 函数为 $V_f(x(k))$, 则整个混杂离散系统运行空间 Ω 内的 Lyapunov 函数 $V(x(k))$ 为:

$$V(x(k)) = V_f(x(k)), \text{ 当 } (x(k), m(k)) \in \Omega_f \text{ 时}. \quad (7)$$

定理 2 对一般混杂离散系统(7), (8) 及给定的初始状态 $(x(0), m(0))$, 如果对所有 $f \in \bar{q}$, 当 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$ 时, 存在 $V_f(x(k))$ 使得:

- 1) $V_f(x(k))$ 正定, 当 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$ 时;
- 2) $\Delta V_f(x(k)) \leq 0$, 当 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$, 其中 $\Delta V_f(x(k)) = V_f(x(k+1)) - V_f(x(k))$;
- 3) $V_g(x(k+1)) - V_f(x(k)) \leq 0$, 当 $(f, g) \in I_\Lambda$, 且 $x(k) \in \Lambda_{fg}^x$.

则该混杂离散系统原点为混杂状态空间 $\Omega = \bigcup_{f=1}^l \Omega_f$ 内 Lyapunov 稳定.

证 当条件 1) 满足时, 由式(7)定义的整个混杂离散系统运行空间 Ω 内的 Lyapunov 函数 $V(x(k))$ 正定. 因为当 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$ 时, $\Delta V(x(k)) = \Delta V_f(x(k))$; 当 $(f, g) \in \{(f, g) \mid \Lambda_{fg} \neq \emptyset\}$, 且 $x(k) \in \Lambda_{fg}^x$ 时, $\Delta V(x(k)) = V_g(x(k+1)) - V_f(x(k))$; 所以条件 2) 和 3) 保证 $\Delta V(x(k)) \leq 0$. 因此, 此时混杂离散系统(7), (8) 的原点为混杂状态空间 $\Omega = \bigcup_{f=1}^l \Omega_f$ 内 Lyapunov 稳定.

4.2 参数摄动线性混杂离散系统的局部鲁棒 Lyapunov 稳定性 (Local robust Lyapunov stability of linear hybrid discrete systems with parameter perturbation)

本节采用分段二次型 Lyapunov 函数研究参数摄动线性混杂离散系统(1), (2) 的鲁棒稳定性, 区域

的划分遵循以下规则: 混杂状态轨迹不允许从包含原点的区域运行到不包含原点的区域.

为了能利用 S-procedure^[4] 将鲁棒稳定性条件表示为 LMI 形式, Ω_f^x 和 Λ_{fg}^x 必须用二次等式或不等式描述. 下面分两种情况叙述 $\Omega_f^x, \Lambda_{fg}^x$ 的表示形式:

1) 当 Ω_f 不包含原点时.

Ω_f^x 采用如下形式表示:

$$\begin{cases} \Omega_f^x \subseteq \bigcap_{s=1}^{u_f} \rho_{fs}, \\ \text{且 } \rho_{fs} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x}^T \bar{W}_f^s \bar{x} \geq 0\}, s = 1, \dots, u_f. \end{cases} \quad (8)$$

Λ_{fg}^x 表示为:

$$\begin{cases} \Lambda_{fg}^x \subseteq \bigcap_{r=1}^{v_{fg}} \lambda_{fgr}, \\ \text{且 } \lambda_{fgr} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x}^T \bar{W}_{fg}^r \bar{x} \geq 0\}, r = 1, \dots, v_{fg}. \end{cases} \quad (9)$$

式(8), (9) 中, $\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{W}_f^s \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $\bar{W}_{fg}^r \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ 均为对称阵.

2) 当 Ω_f 包含原点时.

分别用 x , 对称阵 $W_f^s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $W_{fg}^r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 代替(8) 和(9) 中的 \bar{x} , \bar{W}_f^s 和 \bar{W}_{fg}^r , 可得此种情况下 $\Omega_f^x, \Lambda_{fg}^x$ 的表示形式.

注 1 式(8), (9) 表明: $\bigcap_{s=1}^{u_f} \rho_{fs}$ 和 $\bigcap_{r=1}^{v_{fg}} \lambda_{fgr}$ 所表示的区域分别大于或等于 Ω_f^x 和 Λ_{fg}^x . 在分析稳定性时, 需要注意不能使 $\bigcap_{s=1}^{u_f} \rho_{fs}$ 和 $\bigcap_{r=1}^{v_{fg}} \lambda_{fgr}$ 所表示的区域过大, 否则会使相应的线性矩阵不等式无解.

令:

$$\bar{A}_m(k) = \begin{bmatrix} A_m(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{E}_m(k) = \begin{bmatrix} E_m(k) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{F}_m(k) = [F_m(k) \ 0], \bar{\Sigma}_m(k)(k) = \Sigma_m(k)(k).$$

其中, 当 $m(k) = m_i$ 时,

$$A_m(k) = A_i, E_m(k) = E_i,$$

$$F_m(k) = F_i, \Sigma_m(k)(k) = \Sigma_i(k).$$

则式(1)描述的离散时间状态方程可整理为:

$$\bar{x}(k+1) = (\bar{A}_m(k) + \bar{E}_m(k) \bar{\Sigma}_m(k)(k) \bar{F}_m(k)) \bar{x}(k). \quad (10)$$

定理 3 如果对所有 $f \in \bar{q}$, 当 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$ 时有:

- 1) 若 Ω_f 不包含原点, 存在正定对称阵 $\bar{P}_f \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, 标量 $\bar{\varepsilon}_f(m(k)) > 0, \bar{\beta}_f^s \geq 0, \bar{\varepsilon}_{fg} > 0, \bar{\delta}_{fg}^r \geq 0 (f, g) \in I_\Lambda$ 满足下述 LMI:

$$1a) \left[\begin{array}{ccc} \bar{P}_f - \bar{\varepsilon}_f^{-1}(m(k)) \bar{F}_{m(k)}^T \bar{F}_{m(k)} - \sum_{s=1}^{u_f} \bar{\beta}_f^s \bar{W}_f^s & - \bar{A}_{m(k)}^T \bar{P}_f & 0 \\ - \bar{P}_f \bar{A}_{m(k)} & \bar{P}_f & \bar{P}_f \bar{E}_{m(k)} \\ 0 & \bar{E}_{m(k)}^T \bar{P}_f & \bar{\varepsilon}_f^{-1}(m(k)) I \end{array} \right] \geq 0,$$

$$1b) \left[\begin{array}{ccc} \bar{P}_f + \bar{\sigma}_g - \bar{\varepsilon}_f^{-1} \bar{F}_{m(i^+)}^T \bar{F}_{m(i^+)} - \sum_{r=1}^{v_g} \bar{\delta}_{f_g}^r \bar{W}'_{f_g} & - \bar{A}_{m(i^+)}^T \bar{P}_g & 0 \\ - \bar{P}_g \bar{A}_{m(i^+)} & \bar{P}_g & \bar{P}_g \bar{E}_{m(i^+)} \\ 0 & \bar{E}_{m(i^+)}^T \bar{P}_g & \bar{\varepsilon}_f^{-1} I \end{array} \right] \geq 0.$$

其中,当 $k = i$ 时,混杂状态轨迹由 Ω_f 切换到 Ω_g , $m(i^+) \in \Omega_g$. 当 Ω_f 不包含原点时, $\bar{P}_g = \bar{P}_g, \bar{\sigma}_g = 0, \bar{P}_g \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$; 当 Ω_g 包含原点时, $\bar{P}_g = \begin{bmatrix} P_g & 0 \\ 0 & \sigma_g \end{bmatrix}, \bar{\sigma}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_g \end{bmatrix}, P_g \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 标量 $\sigma_g > 0$.

2) 若 Ω_f 包含原点, 分别用正定对称阵 $P_f \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_g \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 标量 $\varepsilon_f(m(k)) > 0, \beta_f^s \geq 0, \varepsilon_{f_g} > 0, \delta_{f_g}^r \geq 0$, 矩阵 $A_{m(k)}, E_{m(k)}, F_{m(k)}, A_{m(i^+)}, E_{m(i^+)}, F_{m(i^+)}$, 对称阵 $W_f^s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $W'_{f_g} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 代替条件 1a), 1b) 中的 $\bar{P}_f, \bar{P}_g, \bar{\varepsilon}_f(m(k)) > 0, \bar{\beta}_f^s \geq 0, \bar{\varepsilon}_{f_g} > 0, \bar{\delta}_{f_g}^r \geq 0, \bar{A}_{m(k)}, \bar{E}_{m(k)}, \bar{F}_{m(k)}, \bar{A}_{m(i^+)}, \bar{E}_{m(i^+)}, \bar{F}_{m(i^+)}, \bar{W}_f^s$ 和 \bar{W}'_{f_g} , 去掉 1b) 中的矩阵 $\bar{\sigma}_g$, 可得此种情况下必须满足的两个条件. 对应于条件 1a) 和 1b), 这两个条件分别称为 2a) 和 2b).

那么, 参数摄动线性混杂离散系统 (1), (2) 的原点为混杂状态空间 $\Omega = \bigcup_{f=1}^l \Omega_f$ 内鲁棒 Lyapunov

$$\left[\begin{array}{ccc} \bar{P}_f - \sum_{s=1}^{u_f} \bar{\beta}_f^s \bar{W}_f^s & & - (\bar{A}_{m(k)} + \bar{E}_{m(k)} \bar{\Sigma}_{m(k)}(k) \bar{F}_{m(k)})^T \\ - (\bar{A}_{m(k)} + \bar{E}_{m(k)} \bar{\Sigma}_{m(k)}(k) \bar{F}_{m(k)}) & \bar{P}_f^{-1} & \end{array} \right] \geq 0.$$

以下证明步骤与定理 1 相似. 因此当条件 1a) 满足时, 对于 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$, 有: $\Delta V_f(x(k)) \leq 0$.

当 $k = i$ 时, 混杂状态轨迹由 Ω_f 切换到 Ω_g , $(x(i^+), m(i^+)) \in \Omega_g$, 以下分两种情况讨论:

① 若 Ω_g 不包含原点, 那么:

$$\left[\begin{array}{ccc} \bar{P}_g - \sum_{r=1}^{v_g} \bar{\delta}_{f_g}^r \bar{W}'_{f_g} & & - (\bar{A}_{m(i^+)} + \bar{E}_{m(i^+)} \bar{\Sigma}_{m(i^+)}(k) \bar{F}_{m(i^+)})^T \\ - (\bar{A}_{m(i^+)} + \bar{E}_{m(i^+)} \bar{\Sigma}_{m(i^+)}(k) \bar{F}_{m(i^+)}) & \bar{P}_g^{-1} & \end{array} \right] \geq 0.$$

那么对 $(x(i), m(i)) \in \Omega_f$, 有 $V_g(x(i+1)) - V_f(x(i)) \leq 0$. 以下推导过程与定理 1 类似.

因此当条件 1b) 满足时, 对于 $(x(i), m(i)) \in$

稳定.

证 下面分两种情况证明:

1) 当 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$, 且 Ω_f 不包含原点时.

选取如下二次型函数 $V_f(x(k))$:

$$V_f(x(k)) = \bar{x}^T(k) \bar{P}_f \bar{x}(k).$$

其中, $\bar{P}_f \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ 为正定对称阵. 因为 \bar{P}_f 正定, 所以 $V_f(x(k))$ 正定. 由式 (10) 可知:

$$\begin{aligned} \Delta V_f(x(k)) = & \bar{x}^T(k) (\bar{A}_{m(k)} + \bar{E}_{m(k)} \bar{\Sigma}_{m(k)}(k) \bar{F}_{m(k)})^T \bar{P}_f (\bar{A}_{m(k)} + \\ & \bar{E}_{m(k)} \bar{\Sigma}_{m(k)}(k) \bar{F}_{m(k)}) \bar{x}(k) - \bar{x}^T(k) \bar{P}_f \bar{x}(k). \end{aligned}$$

由式 (8) 及 S-procedure^[4] 可知, 当:

$$\begin{aligned} \bar{P}_f - (\bar{A}_{m(k)} + \bar{E}_{m(k)} \bar{\Sigma}_{m(k)}(k) \bar{F}_{m(k)})^T \bar{P}_f (\bar{A}_{m(k)} + \\ \bar{E}_{m(k)} \bar{\Sigma}_{m(k)}(k) \bar{F}_{m(k)}) - \sum_{s=1}^{u_f} \bar{\beta}_f^s \bar{W}_f^s \geq 0 \end{aligned}$$

时, 对于 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$, 有 $\Delta V_f(x(k)) \leq 0$.

由矩阵 Schur 补^[4] 可知, 上式等价于:

$$\left[\begin{array}{ccc} \bar{P}_f - \sum_{s=1}^{u_f} \bar{\beta}_f^s \bar{W}_f^s & & - (\bar{A}_{m(k)} + \bar{E}_{m(k)} \bar{\Sigma}_{m(k)}(k) \bar{F}_{m(k)})^T \\ - (\bar{A}_{m(k)} + \bar{E}_{m(k)} \bar{\Sigma}_{m(k)}(k) \bar{F}_{m(k)}) & \bar{P}_f^{-1} & \end{array} \right] \geq 0.$$

$$V_g(x(i+1)) - V_f(x(i)) =$$

$$\bar{x}^T(i) (\bar{A}_{m(i^+)} + \bar{E}_{m(i^+)} \bar{\Sigma}_{m(i^+)}(i^+) \bar{F}_{m(i^+)})^T \bar{P}_g (\bar{A}_{m(i^+)} + \bar{E}_{m(i^+)} \bar{\Sigma}_{m(i^+)}(i^+) \bar{F}_{m(i^+)}) \bar{x}(i) - \bar{x}^T(i) \bar{P}_f \bar{x}(i).$$

由式 (9), S-procedure 和矩阵 Schur 补可知, 若存在 $\bar{\delta}_{f_g}^r \geq 0$ 使:

$$V_g(x(i+1)) - V_f(x(i)) \leq 0.$$

② 若 Ω_g 包含原点.

由于这种情况下, Ω_g 的 Lyapunov 函数为:

$V_g(x(k)) = x^T(k)P_g x(k)$ (详见下文说明), 因此:
 $V_g(x(i+1)) - V_f(x(i)) =$
 $x^T(i)(A_{m(i^+)} + E_{m(i^+)}\Sigma_{m(i^+)}(i^+)F_{m(i^+)})^T P_g (A_{m(i^+)} +$
 $E_{m(i^+)}\Sigma_{m(i^+)}(i^+)F_{m(i^+)})x(i) - \bar{x}^T(i)\bar{P}_g \bar{x}(i) =$
 $\bar{x}^T(i)(\bar{A}_{m(i^+)} + \bar{E}_{m(i^+)}\bar{\Sigma}_{m(i^+)}(i^+)\bar{F}_{m(i^+)})^T \bar{P}_g (\bar{A}_{m(i^+)} +$
 $\bar{E}_{m(i^+)}\bar{\Sigma}_{m(i^+)}(i^+)\bar{F}_{m(i^+)})\bar{x}(i) -$
 $\bar{x}^T(i)\bar{P}_f \bar{x}(i) - \bar{x}^T(i)\bar{\sigma}_g \bar{x}(i).$

其中, $\bar{P}_g = \begin{bmatrix} P_g & 0 \\ 0 & \sigma_g \end{bmatrix}$, $\bar{\sigma}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_g \end{bmatrix}$, $\sigma_g > 0$.

再采用与上面类似的推导方法可得: 当条件 1b) 满足时, 对于 $(x(i), m(i)) \in \Lambda_{fg}$, $(f, g) \in I_\Lambda$ 有

$$V_g(x(i+1)) - V_f(x(i)) \leq 0.$$

2) 当 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$, 且 Ω_f 包含原点时.

因为原点为平衡点, 所以为了保证 $V(0) = 0$, 对于包含原点的区域, 选取 Lyapunov 函数形式为:

$$V_f(x(k)) = x^T(k)P_f x(k).$$

其中, $P_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为正定对称阵.

因为区域的划分保证混杂状态轨迹不会从包含原点的区域运行到不包含原点的区域, 所以采用与上面相似的方法可证明: 当条件 2a), 2b) 满足时, 对于 $(x(k), m(k)) \in \Omega_f$, 有 $V_f(x(k))$ 正定, $\Delta V_f(x(k)) \leq 0$, 对于 $(x(i), m(i)) \in \Lambda_{fg}$, $(f, g) \in I_\Lambda$, 有 $V_g(x(i+1)) - V_f(x(i)) \leq 0$.

综上所述, 根据定理 2 可知: 当条件 1a), 1b) 或 2a), 2b) 成立时, 参数扰动线性混杂离散系统 (1), (2) 的原点为混杂状态空间 $\Omega = \bigcup_{f=1}^l \Omega_f$ 内鲁棒 Lyapunov 稳定.

5 仿真实例 (Simulation results)

图 1 所示为所考虑的参数扰动线性混杂离散系统的离散事件状态转移图.

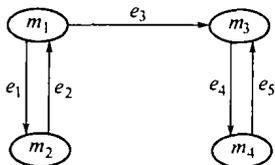


图 1 离散事件状态转移图

Fig. 1 The discrete event state chart

图 1 中离散事件状态 m_1, m_2, m_3, m_4 所对应的离散时间动态分别描述如下:

$$x(k+1) = (A_1 + \Delta A_1)x(k),$$

当 $m(k) = m_1$ 或 $m(k) = m_3$ 时;

$$x(k+1) = (A_2 + \Delta A_2)x(k),$$

当 $m(k) = m_2$ 或 $m(k) = m_4$ 时.

其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.2 \\ 0.02 & 1.0 \end{bmatrix}, \Delta A_1 = E_1 \Sigma_1(k) F_1,$$

$$\text{且 } E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \Sigma_1(k) = \cos(k), F_1 = [0.1 \quad 0.1];$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.02 \\ -0.2 & 1.0 \end{bmatrix}, \Delta A_2 = E_2 \Sigma_2(k) F_2,$$

$$\text{且 } E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \Sigma_2(k) = \cos(k), F_2 = [0.2 \quad 0.2].$$

图 1 中离散事件 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 发生的条件如下给出:

$$e_1: x(k) \text{ 到达状态集 } \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1 \leq 0\},$$

$$e_2: x(k) \text{ 到达状态集 } \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1 \geq 0\},$$

$$e_3: x(k) \text{ 到达状态集 } \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 \geq -0.5) \cap (x_2 - x_1 \leq 0)\},$$

$$e_4: x(k) \text{ 到达状态集 } \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - 2.75x_1 < 0\},$$

$$e_5: x(k) \text{ 到达状态集 } \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - 0.36x_1 > 0\}.$$

当初始状态为 $([0.3 \quad 0.826]^T, m_1)$ 时, 该参数扰动线性混杂离散系统离散时间状态轨迹如图 2 所示. 从图 2 可看出, m_1 和 m_2 沿直线 S_{12} 来回切换, 使系统产生滑模运动 (滑模运动是一种特殊的混杂动态行为), 当 $x_1 > -0.5$ 时, 混杂离散系统脱离滑模运动状态.

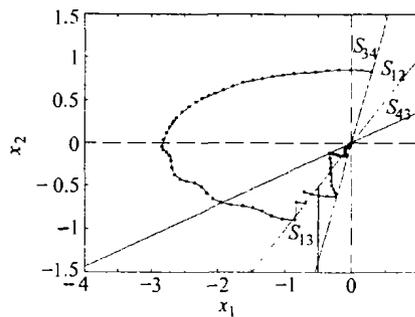


图 2 当初始状态为 $([0.3 \quad 0.826]^T, m_1)$ 时, 参数扰动线性混杂离散系统离散时间状态轨迹

Fig. 2 Simulation of the perturbed linear hybrid discrete system with initial state $([0.3 \quad 0.826]^T, m_1)$

图 2 中:

$$S_{12} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1 = 0\},$$

$$S_{34} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - 2.75x_1 = 0\},$$

$$S_{43} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - 0.36x_1 = 0\},$$

$$S_{13} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 0.5 = 0) \cap (x_2 - x_1) \leq 0\}.$$

根据定理 3 求解相关的 LMI, 得到以下 5 个解:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 7.6745 & 8.9391 \\ 8.9391 & 28.6942 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.1398 & 0.1490 \\ 0.1490 & 3.2756 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.0429 & -0.0647 \\ -0.0647 & 0.7577 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0.0313 & -0.0168 \\ -0.0168 & 0.0411 \end{bmatrix},$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0012 \end{bmatrix}.$$

可验证,这5个解满足定理3的条件2a),2b),所以该参数摄动线性混杂离散系统是鲁棒稳定的.所得到的5个Lyapunov函数的使用区域如图3,4所示:

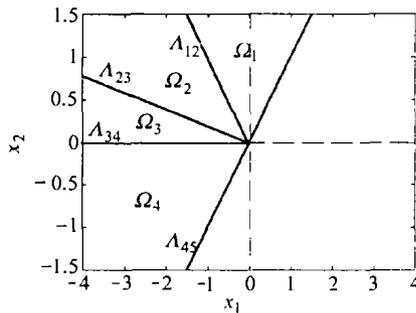


图3 $V_i = x^T P_i x (i=1, \dots, 4)$ 的使用区域

Fig. 3 The regions where $V_i = x^T P_i x (i=1, \dots, 4)$ are used

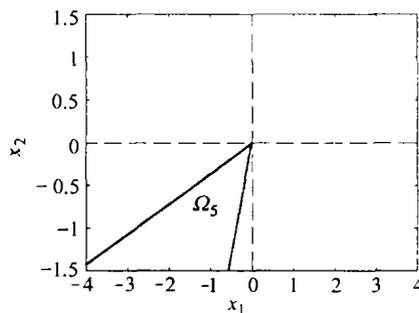


图4 $V_5 = x^T P_5 x$ 的使用区域

Fig. 4 The region where $V_5 = x^T P_5 x$ is used

图3中:

· $\Omega_1 = \{(x(k), m(k)) \mid (x_2 - x_1 > 0) \cap (x_2 + x_1 \geq 0), m(k) = m_1\}$, 为 $V_1 = x^T P_1 x$ 的使用区域; $\Lambda_{12} = \{(x(k), m(k)) \mid x_2 + x_1 = 0, m(k) = m_1\}$, 为混杂状态由 Ω_2 到 Ω_3 的切换集;

· $\Omega_2 = \{(x(k), m(k)) \mid (x_2 + x_1 < 0) \cap (x_2 + 0.2x_1 \geq 0), m(k) = m_1\}$, 为 $V_2 = x^T P_2 x$ 的使用区域; $\Lambda_{23} = \{(x(k), m(k)) \mid x_2 + 0.2x_1 = 0, m(k) = m_1\}$, 为混杂状态由 Ω_1 到 Ω_2 的切换集;

· $\Omega_3 = \{(x(k), m(k)) \mid (x_2 + 0.2x_1 < 0) \cap (x_2 \geq 0), m(k) = m_1\}$, 为 $V_3 = x^T P_3 x$ 的使用区域; $\Lambda_{34} = \{(x(k), m(k)) \mid x_2 = 0, m(k) = m_1\}$, 为混杂状态由 Ω_3 到 Ω_4 的切换集;

· $\Omega_4 = \{(x(k), m(k)) \mid (x_2 < 0) \cap (x_2 - x_1 \geq 0), m(k) = m_1\}$, 为 $V_4 = x^T P_4 x$ 的使用区域; $\Lambda_{45} = \{(x(k), m(k)) \mid x_2 - x_1 = 0, m(k) = m_1\}$, 为混杂状态由 Ω_4 到 Ω_5 的切换集.

图4中:

· $\Omega_5 = \{(x(k), m(k)) \mid (x_2 - 0.36x_1 < 0) \cap (x_2 - 2.75x_1 \geq 0), m(k) = m_1 \text{ 或 } m_2, m_3, m_4\}$ 为 $V_5 = x^T P_5 x$ 的使用区域, 即: 在 Ω_5 内, V_5 为 m_1, m_2, m_3 和 m_4 的共同 Lyapunov 函数.

由图3和图4可知,该参数摄动线性混杂离散系统的鲁棒稳定区域为 $\Omega = \bigcup_{i=1}^5 \Omega_i$.

当初始状态为 $([0.3 \ 0.826]^T, m_1)$ 时, 系统 Lyapunov 函数随时间的变化情况如图5所示. 图2, 5表明利用这5个 Lyapunov 函数判定该参数摄动线性混杂离散系统的鲁棒稳定性是有效的.

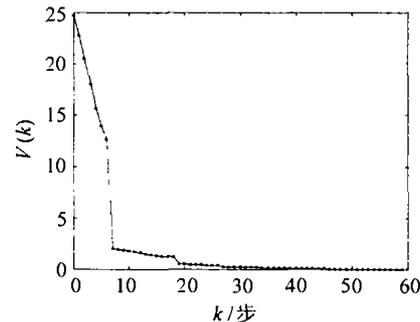


图5 初始状态为 $([0.3 \ 0.826]^T, m_1)$ 时, 参数摄动线性混杂离散系统的 Lyapunov 函数值

Fig. 5 The corresponding value of the Lyapunov function as the perturbed linear hybrid discrete system evolved with initial state $([0.3 \ 0.826]^T, m_1)$

6 结论(Conclusion)

本文采用 LMI 方法研究离散事件状态转移条件为状态依赖的参数摄动线性混杂离散系统的鲁棒稳定性问题, 给出了此类系统全局鲁棒渐近稳定判定条件, 基于分段 Lyapunov 函数提出了一般混杂离散系统在 Lyapunov 意义下局部稳定判定定理, 并在此基础上给出参数摄动线性混杂离散系统在 Lyapunov 意义下局部鲁棒稳定的充分条件. 仿真结果表明所提出的基于 LMI 的参数摄动线性混杂离散系统的鲁棒稳定性判定方法是有效的.

参考文献(References)

- [1] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1998, 43(4):475-482
- [2] Soh C B. Robust stability of perturbed periodic hybrid systems [J]. Int. J. of Systems Science, 1999, 30(8):811-821
- [3] Petersen I R. A Stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. Systems & Control Letters, 1987, 8(4),351-357
- [4] Boyd S, Ghaoui L El, Feron E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994, Vol.15

本文作者简介

张 竟 1970年生. 分别于1992年、1997年和2002年在浙江大学获学士、硕士和博士学位, 现为浙江工业大学自动化系讲师. 主要研究方向: 混杂系统鲁棒控制. Email: nzhang@iipc.zju.edu.cn

吴铁军 1950年生. 浙江大学控制系教授, 博士生导师. 主要研究方向: 混杂系统理论, 智能大系统.