文章编号: 1000 - 8152(2002)05 - 0771 - 03

不确定广义系统鲁棒镇定控制器的设计

谢湘生, 刘洪伟
(广东工业大学 系统工程研究所,广州 510090)

摘要: 讨论了线性定常广义系统的稳定性,给出了这种系统 H_∞ 范数形式的稳定性判据,在此基础上,利用线性矩阵不等式(LMI)方法讨论了含有不确定参数的线性广义控制系统的鲁棒镇定问题,并相应地给出了鲁棒镇定控制器的设计.

关键词: 广义系统; 鲁棒镇定; H_∞范数; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　**文献标识码:** A

Robust stabilizing control for uncertain singular systems

XIE Xiang-sheng, LIU Hong-wei
(Institute of Systems Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: The stability of linear time-invariant singular systems is discussed first and some criteria are established in terms of H_∞ norm. Based on this, a design of the robust stabilizing controller for linear uncertain singular control systems is obtained by using LMI approach.

Key words: singular system; robust stabilization; H_∞ norm; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

广义系统比通常的系统能更好地描述实际物理过程,因此其研究受到广泛的关注,在控制方面许多关于通常系统的结果都已被推广到了广义系统.由于实际问题建模过程不可避免存在误差,因此讨论含不确定参数的广义系统的鲁棒控制对广义系统的实际应用是极为重要的.广义系统的结构远比通常系统复杂,因而要给出合理且易于实现的鲁棒控制器的设计方法较困难.现在见到的文献(例如文[1~3])上的一些方法,可以解决一类线性定常广义系统的鲁棒镇定问题,但应用这些方法时,除了可能会牵涉复杂的矩阵运算外,还在计算时需要考虑参数的调整,因此实现起来有一定的难度.本文采用线性矩阵不等式(LMI)方法研究了含不确定参数的广义系统鲁棒镇定控制器的设计问题,所得到的方法简化了矩阵的计算,也避免了复杂的参数调整,从而为实际应用带来了方便.

2 稳定性分析(Stability analysis)

本节先给出广义系统稳定性的一个简要分析.

考虑具有如下形式的广义系统

$$E\dot{x} = Ax. \tag{1}$$

其中 $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为常数矩阵,本文总假定系统(1)是正则的,即 $\det(\lambda E - A)$ 不恒等于零;不失一般性,设矩阵 E, A 具有分块形式

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

这里 I_r 是 $r\times r$ 单位矩阵,其它子块有相容的维数.若系统(1)是无脉冲的,即 $\det A_{22} \neq 0$[4],则系统零解渐近稳定的充分必要条件是 $\det\begin{bmatrix} \lambda I_r - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \neq 0, \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$. 简单计算可知,该不等式等价于 $\det(\lambda I_r - A_{11} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \neq 0$, $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$. 明显地,这一不等式又等价于

$$\det[I_r + (\lambda I_r - A_{11})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}] \neq 0,\ \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0. \tag{3}$$

直接由矩阵的代数运算和 Jordan 标准型,容易证明下面的引理.

引理 1 对任意矩阵 $M \in \mathbb{C}^{p\times q}, N \in \mathbb{C}^{q\times p}$. 若 $I_p - MN$ 可逆,则 $I_q - NM$ 也可逆.

引理 2 设矩阵 $M \in \mathbb{C}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{C}$. 若 $|\lambda|\rho(M) < 1$,则 $\det(I_n + \lambda M) \neq 0$,其中 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径.

收稿日期:2000 - 05 - 29; 收修改稿日期:2001 - 05 - 28.

现在可以建立本节的主要结果.

定理 1 设系统(1)无脉冲,若

$$\| A_{22}^{-1}A_{21}(\lambda I_r - A_{11})^{-1}A_{12} \|_\infty < 1. \tag{4}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 H_∞ 范数,则系统(1)的零解渐近稳定.

证 要得到所需要的结论,只须证(3)式成立即可.根据引理 1,(3)式等价于

$\det[I_{n-r} + A_{22}^{-1}A_{21}(\lambda I_r - A_{11})^{-1}A_{12}] \neq 0.\ \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0.$

但按引理 2,要使这一不等式成立,只需

$$\| A_{22}^{-1}A_{21}(\lambda I_r - A_{11})^{-1}A_{12} \| < 1,\ \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0.$$

这里 $\|\cdot\|$ 为矩阵的欧氏范数.而按 H_∞ 范数的定义,这等价于 $\| A_{22}^{-1}A_{21}(\lambda I_r - A_{11})^{-1}A_{12} \|_\infty < 1$.

证毕.

引理 3[5] 对有适当维数的矩阵 M,N,Q,若存在正定矩阵 P 使代数 Riccati 不等式

$$PM + M^{\mathrm{T}}P + PNN^{\mathrm{T}}P + Q^{\mathrm{T}}Q < 0$$

成立,则

$$I - N^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega I - M^{\mathrm{T}})^{-1}Q^{\mathrm{T}}Q(\mathrm{j}\omega I - M)^{-1}N > 0,\ \omega \in \mathbb{R}.$$

定理 2 若代数 Riccati 不等式

$$XA_{11} + A_{11}^{\mathrm{T}}X + XA_{12}A_{12}^{\mathrm{T}}X + A_{21}^{\mathrm{T}}(A_{22}^{-1})^{\mathrm{T}}A_{22}^{\mathrm{T}}A_{21} < 0 \tag{5}$$

存在对称正定解 X,则系统(1)的零解渐近稳定.

证 由定理 1,只需要证明(4)式成立即可.但易见按 H_∞ 范数的定义,(4)式可以表示为

$$I_{n-r} - A_{12}^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega I_r - A_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}A_{21}^{\mathrm{T}}(A_{22}^{-1})^{\mathrm{T}}A_{22}^{-1}A_{21}(\mathrm{j}\omega I_r - A_{11})^{-1}A_{12} > 0,\ \omega \in \mathbb{R}.$$

而由引理 3,当代数 Riccati 不等式(5)存在对称正定解时,上述不等式成立. 证毕.

3 主要结果(Main results)

考虑含不确定参数的广义控制系统

$$E\dot{x} = Ax + \Delta Ax + Bu + \Delta Bu. \tag{6}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的状态与控制输入变量,E,A,B 分别是具有适当维数的实常数矩阵,$\Delta A,\Delta B$ 是相应的不确定参数矩阵.仍设 E,A 具有(2)的形式,相应地,$B,\Delta A,\Delta B$ 具有形式

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\ \Delta A = \begin{bmatrix} \Delta A_{11} & \Delta A_{12} \\ \Delta A_{21} & \Delta A_{22} \end{bmatrix},\ \Delta B = \begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

并且相应于上面的分块方式,状态变量可写成 $x = [x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

如果标称系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{8}$$

是脉冲可控的,则 $\mathrm{rank}[A_{22}, B_2] = n - r$[4].因此存在非奇异矩阵 $P_1, Q_1 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 使 $Q_1A_{22}P_1 = \mathrm{blockdiag}(I_{r_1}, 0)$,$r_1 = \mathrm{rank}A_{22}$. 记 $Q_1B_2 = [B_{21}^{\mathrm{T}}, B_{22}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,$B_{21} \in \mathbb{R}^{r_1\times m}$,$B_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r-r_1)\times m}$. 因此由 $\mathrm{rank}[A_{22}, B_2] = n - r$,可知 B_{22} 有满行秩 $n - r - r_1$.取

$$u(t) = K_2x_2(t) + v(t),\ K_2 = [0,\ B_{22}^{\mathrm{T}}]P_1, \tag{9}$$

则(8)的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + (A_{12} + B_1K_2)x_2 + B_1v, \\ 0 = A_{21}x_1 + (A_{22} + B_2K_2)x_2 + B_2v \end{cases}$$

无脉冲,即 $\det(A_{22} + B_2K_2) \neq 0$.现在要寻求控制 $v = K_1x_1$.使得系统(6)在控制 $u = [K_1, K_2][x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = K_1x_1 + K_2x_2$ 下的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} + \Delta A_{11} + B_1K_1 + \Delta B_1K_1)x_1 + \\ \qquad (A_{12} + \Delta A_{12} + B_1K_2 + \Delta B_1K_2)x_2, \\ 0 = (A_{21} + \Delta A_{21} + B_2K_1 + \Delta B_2K_1)x_1 + \\ \qquad (A_{22} + \Delta A_{22} + B_2K_2 + \Delta B_2K_2)x_2 \end{cases} \tag{10}$$

的零解是渐近稳定的.

假定 $\Delta A,\Delta B$ 具有形式:$\Delta A = L\Sigma F_a$,$\Delta B = L\Sigma F_b$,按(7)中的分块它们又可以分别写成

$$\Delta A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\Sigma[F_{a_1} \quad F_{a_2}] = \begin{bmatrix} L_1\Sigma F_{a_1} & L_1\Sigma F_{a_2} \\ L_2\Sigma F_{a_1} & L_2\Sigma F_{a_2} \end{bmatrix},$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\Sigma F_b = \begin{bmatrix} L_1\Sigma F_b \\ L_2\Sigma F_b \end{bmatrix}.$$

其中 Σ 为未知参数矩阵且 $\Sigma \in \Omega = \{\Theta \mid \Theta^{\mathrm{T}}\Theta \leqslant I\}$;$L_1, L_2, F_{a_1}, F_{a_2}, F_b$ 为具有适当维数的已知矩阵;并且对由(9)式定义的矩阵 K_2,下式满足:

$$\| L_2 \| \, \| F_{a_2} + F_bK_2 \| < \delta^{-1}. \tag{11}$$

其中 $\delta = \| (A_{22} + B_2K_2)^{-1} \|$.因

$$\| \Delta A_{22} + \Delta B_2K_2 \| = \| L_2\Sigma(F_{a_2} + F_bK_2) \| \leqslant \| L_2 \| \, \| F_{a_2} + F_bK_2 \| < \delta^{-1},$$

则

$$\| (A_{22} + B_2K_2)^{-1}(\Delta A_{22} + \Delta B_2K_2) \| < 1.$$

从而根据引理 2 可知 $\det(A_{22} + B_2K_2 + \Delta A_{22} + \Delta B_2K_2) \neq 0$.这表明对由(9)式定义的 K_2,在条件(11)下,闭环系统(10)是无脉冲的.

在下面的讨论中我们总假定：

i) 标称系统(8)是脉冲可控的；

ii) $[A_{11}, B_1]$ 是可镇定的；

iii) 对由(9)式定义的 K_2，(11)式成立.

引理 4[6]　对任意 $a>0$ 和适当维数的矩阵 X，Y 以及适当维数的矩阵 Σ，$\Sigma^{\mathrm T}\Sigma \le I$，不等式 $X^{\mathrm T}\Sigma Y + Y^{\mathrm T}\Sigma^{\mathrm T}X \le a^2 X^{\mathrm T}X + a^{-2}Y^{\mathrm T}Y$ 成立.

下面我们给出系统(6)可鲁棒镇定的条件.

定理 3　设条件 i), ii) 及 iii) 满足. 若下面的矩阵不等式

$$\Lambda^{\perp}\Omega(\Lambda^{\perp})^{\mathrm T} < 0 \tag{12}$$

存在对称正定解 X，则系统(6)是可鲁棒镇定的，这里

$$\Omega = \begin{bmatrix} XA_{11}^{\mathrm T} + A_{11}X & P \\ P^{\mathrm T} & R \end{bmatrix},$$

$$P = [XF_{a_1}^{\mathrm T} \quad XA_{21}^{\mathrm T} \quad L_1 \quad A_{12} + B_1K_2],$$

$$R = \mathrm{blockdiag}(-(1+2\beta)^{-1}, -I/2, -(1+2\alpha)^{-1}I, -(2\delta^2)^{-1}I).$$

K_2 由(9)定义；$\Lambda^{\perp}$ 是 $\Lambda = [B_1^{\mathrm T}, F_b^{\mathrm T}, B_2^{\mathrm T}, 0, 0]^{\mathrm T}$ 的正交补，且 $\alpha = (\|L_2\|\delta)^{-2}$，$\beta = \|L_2\|^2$.

证　设不等式(12)存在对称正定解 X，则由矩阵 Ω 的构造可知，存在矩阵 K_1 使如下的不等式成立[7]

$$\Omega + \Gamma^{\mathrm T}K_1^{\mathrm T}\Lambda^{\mathrm T} + \Lambda K_1\Gamma < 0.$$

其中 $\Gamma = [X, 0, 0, 0, 0]$，也即

$$\begin{bmatrix} XA_{11}^{\mathrm T} + A_{11}X + XK_1^{\mathrm T}B_1^{\mathrm T} + B_1K_1X & P_1 \\ P_1^{\mathrm T} & R_1 \end{bmatrix} < 0,$$

$$P_1 = [X(F_{a_1} + F_bK_1)^{\mathrm T} \quad X(A_{21} + B_2K_1)^{\mathrm T} \quad L_1 \quad A_{12} + B_1K_2],$$

$R_1 = R$.

根据 Schur 补性质，可知上式等价于

$$\begin{bmatrix} \hat A_{11} & P_2 \\ P_2^{\mathrm T} & R_2 \end{bmatrix} < 0.$$

这里

$$\hat A_{11} = A_{11}^{\mathrm T}Y + YA_{11} + K_1^{\mathrm T}B_1^{\mathrm T}Y + YB_1K_1,$$

$$P_2 = [F^{\mathrm T} \quad (A_{21} + B_2K_1)^{\mathrm T} \quad F^{\mathrm T} \quad YL_1 \quad \delta Y(A_{12} + B_1K_2)],$$

$$R_2 = \mathrm{bolckdiag}\left(-I, -\frac{1}{2}I, -\frac{1}{2\beta}I, \frac{-1}{1+2\alpha}I, -\frac{1}{2}I\right),$$

$Y = X^{-1}$，$F = F_{a_1} + F_bK_1$.

注意到

$$\Delta A_{12} + \Delta B_1K_2 = L_1\Sigma(F_{a_2} + F_bK_2),$$

$$\Delta A_{21} + \Delta B_2K_1 = L_2\Sigma(F_{a_1} + F_bK_1),$$

并且 $L_2^{\mathrm T}L_2 < \beta I$，$(F_{a_2} + F_bK_2)(F_{a_2} + F_bK_2)^{\mathrm T} < \alpha I$. 再利用引理 4 和 Schur 补性质，可以得到

$$(A_{11} + \Delta A_{11} + B_1K_1 + \Delta B_1K_1)^{\mathrm T}Y + Y(A_{11} + \Delta A_{11} + B_1K_1 + \Delta B_1K_1) + \delta^2 Y(A_{12} + \Delta A_{12} + B_1K_2 + \Delta B_1K_2)(A_{12} + \Delta A_{12} + B_1K_2 + \Delta B_1K_2)^{\mathrm T}Y + (A_{21} + \Delta A_{21} + B_2K_1 + \Delta B_2K_1)^{\mathrm T}(A_{21} + \Delta A_{21} + B_2K_1 + \Delta B_2K_1) < 0.$$

因此由定理 2，闭环系统(10)的零解是渐近稳定的.

证毕.

本文给出的控制器由两部分构成，其设计方法也分两步进行，第一步，利用(9)式设计 K_2，消除脉冲；第二步求解不等式(12)，求镇定控制律. 不等式(12)的解的存在性可利用凸规划方法判别并求解(目前有许多现成的工具软件)，此外按照 Iwasaki 等给出的方法可具体地求出矩阵 K_1 为

$$K_1 = -\rho\Lambda^{\mathrm T}\Xi\Gamma^{\mathrm T}(\Gamma\Xi\Gamma^{\mathrm T})^{-1} + S^{1/2}V(\Gamma\Xi\Gamma^{\mathrm T})^{-1/2}.$$

这里 $\Xi = (\Lambda\Lambda^{\mathrm T} - \Omega/\rho)^{-1}$；$\rho$ 为适当常数，使得 $\Xi > 0$；矩阵 V 满足 $\|V\| < \rho$ 并且 $S = I - \Lambda^{\mathrm T}[\Xi - \Xi\Gamma^{\mathrm T}(\Gamma\Xi\Gamma^{\mathrm T})^{-1}\Gamma\Xi]\Lambda$. 结合(9)式即可得到使闭环系统(10)无脉冲且零解渐近稳定的鲁棒镇定控制器. 限于篇幅，略去数值算例.

4　结论(Conclusion)

本文主要讨论了带不确定参数的广义系统的鲁棒镇定控制器的设计问题，利用线性矩阵不等式给出了系统可鲁棒镇定的条件，并相应地获得了鲁棒镇定控制器的设计方法. 这里的可镇定的条件易于利用凸规划方法判别，而相应的控制器也不难用现有的线性矩阵不等式求解工具得到，因而简化了含不确定参数的广义系统的鲁棒镇定控制器的设计过程.

参考文献(References)

[1] Liu Y Q, Wen X C. Theory and Application of Large-Scale Dynamic System Vol.6: Variable Structure Control for Singular Systems [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1996

[2] Varga A. On stabilization methods of descriptor systems [J]. Systems & Control Letters, 1995, 24(): 133 - 138

[3] Zhang Q L, Dai G Z, Xu X H, et al. Asymptotic stability and stabilization of singular systems [J]. Acta Automatica Sinica, 1998, 24

(下接第 776 页)

换系统的渐近稳定性,给出了其在相应的切换策略下,保证系统渐近稳定的两个充分条件.最后对 $m=2$ 时的系统进行了仿真计算,其结果验证了切换策略的有效性,从而提供了判断切换系统渐近稳定性的方法.

参考文献(References)

[1] Xie Guangming, Zheng Dazhong. Controllability and reachability of linear switching systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(Suppl.):135 - 140 (in Chinese)

[2] Narendra K S, Balakrishnan J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1994,39(12):2469 - 2471

[3] Shorten R N, Narendra K S. A sufficient condition for the existence of a common Lyapunov function for two second-order linear systems [A]. In Proceedings of the Conference on Decision and Control [C]. San Diego, California, USA, 1997,3521 - 3522

[4] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1998, 43(4):475 - 482

[5] Peleties P, DeCarlo R A. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions [A]. In Proceedings of American Control Conference[C]. Boston, MA, USA, 1991,1679 - 1684

本文作者简介

张霄力 1970年生.2001年在东北大学获工学博士学位,现在清华大学自动化系从事博士后研究工作.研究方向为混合系统.切换系统的稳定性研究,复杂非线性系统的结构研究等等. Email:zxl@cims.tsinghua.edu.cn

刘玉忠 1963年生.2001年在东北大学获工学博士学位,现在中国科学院沈阳自动化所从事博士后研究工作.研究方向为混合系统,切换系统的稳定性研究,复杂非线性系统的结构研究.

赵 军 1957年生.东北大学信息科学与工程学院教授,博士生导师.现为中国自动化学会控制理论委员会委员.主要研究方向为复杂非线性系统结构研究,混合系统,切换系统稳定性研究.

(上接第773页)

(2):208 - 211 (in Chinese)

[4] Dai L. Singular Control Systems [M]. Berlin: Springer-Velag,1989

[5] Shen T L. Theory and Application of H_∞ Control [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996

[6] Su H Y, Wang J C, Chu J. Output feedback stabilizing controller for linear time-varying uncertain systems with delayed state [J]. Control Theory & Applications,1998, 15(6):939 - 944

[7] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994,30(8):1196 - 1199

[8] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985

本文作者简介

谢湘生 1957年生.1997年在华南理工大学控制理论与应用专业获博士学位,现为广东工业大学系统工程研究所教授.目前主要研究:滞后系统、广义系统的基本理论、控制及其应用,系统工程在经济管理中的应用.

刘洪伟 1962年生.1999年在华南理工大学控制理论与应用专业获博士学位,现为广东工业大学系统工程研究所副教授.目前主要研究:随机系统基本理论、控制与应用,信息技术在经济管理中的应用.