文章编号：1000-8152(2002)06-0817-07

鲁棒稳定多项式双参数摄动域理论及在电力系统分析中的应用*

车延博，王成山
（天津大学 电气与自动化工程学院，天津 300072）

摘要：明确指出了鲁棒稳定多项式双参数摄动域的概念，分两种情形推导了该域的范围.将其应用于电力系统的鲁棒稳定分析，揭示负荷特性不确定性对其小扰动稳定性的影响，算例结果表明，这是一种对电力系统鲁棒稳定性进行系统化分析的新途径.

关键词：小扰动稳定；鲁棒性；双参数摄动域
中图分类号：TM712；TP13　　　**文献标识码**：A

Dual parameter perturbation region theory for robust stability analysis of polynomials and its application in power system analysis

CHE Yan-bo, WANG Cheng-shan
(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: For the robust stability analysis of polynomials, the concept of dual parameter perturbation region is clearly pointed out, and its bounds are estimated. The conclusion is then applied to power system analysis, and the framework and an example are given to investigate the influence of the nonlinear load models to the system small signal stability. This paper indicates a novel systematic method to analyze the power system robust stability.

Key words: small signal stability; robustness; dual parameter perturbation region

1 引言(Introduction)

多项式族的稳定性已成为近年来鲁棒控制理论的研究热点之一，涌现了许多有关多项式族稳定性判定的定性分析和定量分析成果.文[1]在系数空间讨论了 Hurwitz 稳定多项式的结构摄动界，把求解问题归结为有理函数在有限个点上的最小值问题.文[2]分析了在系数空间含多面体不确定性(polytopic uncertainties)的 Hurwitz 多项式的鲁棒稳定性，摄动界的计算简单易行.文[3]则利用几何方法考察了多项式的稳定问题.

电力系统鲁棒稳定性分析的目的在于研究各种模型(包括发电机、励磁系统、调速系统、汽轮机及负荷特性)的不确定性对其稳定性的影响[4]，这对于揭示出当今电力系统日益复杂的行为特征的本质具有重大的理论与实践意义.文[5]系统地推导出了一般 m 机 n 节点电力系统的通用线性模型，得出了负荷节点从电压/相角到有功/无功功率之间的特征多项式模型，利用广义哈氏定理(generalized Kharitonov's theorem)，研究了非线性负荷特性指数系数保证工作点处鲁棒稳定的扰动界.

本文明确指出了鲁棒稳定多项式双参数摄动域的概念，基于文[1,2]的有关成果，分两种情形推导了该域的范围.随之将其应用于电力系统小扰动稳定的鲁棒性分析，揭示了负荷特性不确定性对其稳定性的影响，并给出了相应的算例.结果表明，这是一种电力系统鲁棒稳定系统化分析的新途径.

2 鲁棒稳定多项式双参数摄动域(Dual parameter perturbation region theory for robust stability of polynomials)

2.1 基本概念(Basic concepts)

给定 n 次实系数多项式 $p(s)=\sum_{i=0}^{n} a_i s^i$，如果 $p(s)$ 的所有根都在左半复平面内，称 $p(s)$ 为 Hurwitz 多项式，简称 H- 多项式或稳定多项式，记为 $p(s)\in H$.如果多项式族 P 中每一个多项式都是 H-多项式，称 P 为 Hurwitz 族，简称 H- 族或稳定族，记

* 基金项目：高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划和国家重点基础研究专项经费(G1998020307)资助项目.
收稿日期：2001-01-10；收修改稿日期：2002-01-14.

为 $P \subset H$.

定义 1 设 $p_0(s)=\sum_{i=0}^{n}a_is^i\in H, a_n>0, p_1(s)=\sum_{i=0}^{n}b_is^i, p_2(s)=\sum_{i=0}^{n}c_is^i$ 为次数不大于 n 的实系数多项式，且不存在 $(k_1,k_2)^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^2$，使 $p_1(s)\equiv k_1p_0(s), p_2(s)\equiv k_2p_0(s)$. 定义多项式族

$$P(s,k_a,k_b)=\{p_0(s)+k_ap_1(s)+k_bp_2(s):k_a,k_b\in\mathbb{R}\},$$

称集合 $D=\{(k_a,k_b)\mid P(s,k_a,k_b)\subset H\}$ 为鲁棒稳定多项式双参数摄动域.

2.2 鲁棒稳定多项式双参数摄动域的求解(Solution to the dual parameter perturbation region for robust stability of polynomials)

区域 D 的求解分两种情形：1) 存在非零 $k_0\in\mathbb{R}$，使得 $p_2(s)\equiv k_0p_1(s)$；2) 不存在非零 $k_0\in\mathbb{R}$，使得 $p_2(s)\equiv k_0p_1(s)$.

1) 情形一：存在非零 $k_0\in\mathbb{R}$，使得 $p_2(s)\equiv k_0p_1(s)$.

定义 2[1] 设 $p_0(s)=\sum_{i=0}^{n}a_is^i\in H, a_n>0$, $p(s)=\sum_{i=0}^{n}b_is^i$ 为次数不大于 n 的实系数多项式，且不存在 $k_1\in\mathbb{R}$，使得 $p(s)\equiv k_1p_0(s)$. 令

$$L(s,r)=\{p_0(s)+kp(s)\mid k\in[0,r),r>0\},$$

称 $\sup\{r\mid L(s,r)\subset H\}$ 为 $p_0(s)$ 沿 $p(s)$ 方向的单向摄动上界，记为 $r_1^{\max}(p_0(s),p(s))$，简记为 $r_1^{\max}$；令

$$L(s,r')=\{p_0(s)+kp(s)\mid k\in(r',0],r'<0\},$$

称 $\inf\{r'\mid L(s,r')\subset H\}$ 为 $p_0(s)$ 沿 $p(s)$ 方向的单向摄动下界，记为 $r_1^{\min}(p_0(s),p(s))$，简记为 $r_1^{\min}$.

从定义2易得出使得 $p_0(s)+kp(s)$ 保持稳定的 k 的最大取值范围为 $(r_1^{\min},r_1^{\max})$，且

$$r_1^{\min}(p_0(s),p(s))=-r_1^{\max}(p_0(s),-p(s)). \tag{1}$$

在情形一中，存在非零 $k_0\in\mathbb{R}$，使得 $p_2(s)\equiv k_0p_1(s)$，多项式族

$$P(s,k_a,k_b)=\{p_0(s)+k_ap_1(s)+k_bp_2(s):k_a,k_b\in\mathbb{R}\}=\{p_0(s)+(k_a+k_bk_0)p_1(s):k_a,k_b\in\mathbb{R}\}\subset H$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D=\{(k_a,k_b)\mid r_1^{\min}(p_0(s),p_1(s))\leqslant k_a+k_bk_0\leqslant r_1^{\max}(p_0(s),p_1(s)),k_a,k_b\in\mathbb{R}\}.$$

这是一个充要条件. 有关 $r_1^{\max}$ 的算法参见文[1].

2) 情形二：不存在非零 $k_0\in\mathbb{R}$，使得 $p_2(s)\equiv k_0p_1(s)$.

定义 3 设

$$p_0(s)=\sum_{i=0}^{n}a_is^i\in H, a_n>0,$$

$$p_1(s)=\sum_{i=0}^{n}b_is^i,\ p_2(s)=\sum_{i=0}^{n}c_is^i$$

为次数不大于 n 的实系数多项式，且不存在 $(k_1,k_2)^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^2$，使得 $p_1(s)\equiv k_1p_0(s), p_2(s)\equiv k_2p_0(s)$ 同时成立.

$$F(s,r)=\{p_0(s)+k[\lambda p_1(s)+(1-\lambda)p_2(s)]:\lambda\in[0,1],k\in[0,r),r>0\},$$

称 $\sup\{r\mid F(s,r)\subset H\}$ 为 $p_0(s)$ 在 $(p_1(s),p_2(s))$ 模式下的边向摄动上界[2]，记为 $r_2^{\max}(p_0(s),p_1(s),p_2(s))$，简记为 $r_2^{\max}$.

$$F(s,r')=\{p_0(s)+k[\lambda p_1(s)+(1-\lambda)p_2(s)]:\lambda\in[0,1],k\in(r',0],r'<0\},$$

称 $\inf\{r'\mid F(s,r')\subset H\}$ 为 $p_0(s)$ 在 $(p_1(s),p_2(s))$ 模式下的边向摄动下界，记为 $r_2^{\min}(p_0(s),p_1(s),p_2(s))$，简记为 $r_2^{\min}$.

从定义 3 易得出

$$r_2^{\min}(p_0(s),p_1(s),p_2(s))=-r_2^{\max}(p_0(s),-p_1(s),-p_2(s)). \tag{2}$$

有关 $r_2^{\max}$ 的算法参见文[2].

在情形二中，不存在非零 $k_0\in\mathbb{R}$，使得 $p_2(s)\equiv k_0p_1(s)$. 此时，若令

$$k=k_a+k_b,\ k_a=\lambda k,\ k_b=(1-\lambda)k,\lambda\in[0,1], \tag{3}$$

则多项式族

$$P(s,k_a,k_b)=\{p_0(s)+k_ap_1(s)+k_bp_2(s):k_a,k_b\in\mathbb{R}\}=\{p_0(s)+k[\lambda p_1(s)+(1-\lambda)p_2(s)]:\lambda\in[0,1],k\in\mathbb{R}\}.$$

根据定义 3，在条件(3)下，

$$P(s,k_a,k_b)\subset H\Leftrightarrow k\in[r_2^{\min}(p_0(s),p_1(s),p_2(s)),r_2^{\max}(p_0(s),p_1(s),p_2(s))],$$

进而得出如下命题：

命题 1 设

$$p_0(s)=\sum_{i=0}^{n}a_is^i\in H,\ a_n>0,$$

$$p_1(s)=\sum_{i=0}^{n}b_is^i,\ p_2(s)=\sum_{i=0}^{n}c_is^i$$

为次数不大于 n 的实系数多项式，且不存在$(k_1, k_2)^T \in \mathbb{R}^2$，使得 $p_1(s) \equiv k_1 p_0(s), p_2(s) \equiv k_2 p_0(s)$ 同时成立，则在如图 1 所示阴影区域(记为 D_1) 内，多项式族

$$\{p_0(s) + k_a p_1(s) + k_b p_2(s) : k_a, k_b \in D_1\} \subset H.$$

其中

$$ra = r_2^{\max}(p_0(s), p_1(s), p_2(s)), \tag{4}$$

$$rc = r_2^{\max}(p_0(s), -p_1(s), -p_2(s)). \tag{5}$$

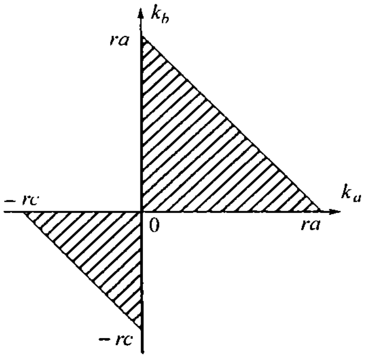

图 1　鲁棒稳定摄动域 D_1

Fig. 1　The robust stability perturbation region D_1

上述推导仅限于 k_a, k_b 极性相同(Ⅰ,Ⅲ 象限)时的参数稳定摄动区域. 当 k_a, k_b 极性相异(Ⅱ,Ⅳ 象限)时，稳定摄动区域又如何呢? 至少，可以给出下面结论:

定理　设

$$p_0(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \in H,\ a_n > 0,$$

$$p_1(s) = \sum_{i=0}^{n} b_i s^i,\ p_2(s) = \sum_{i=0}^{n} c_i s^i$$

为次数不大于 n 的实系数多项式，且不存在$(k_1, k_2)^T \in \mathbb{R}^2$，使得 $p_1(s) \equiv k_1 p_0(s), p_2(s) \equiv k_2 p_0(s)$ 同时成立，则在图 2 所示阴影区域 D 中，不能保证

$$\{p_0(s) + k_a p_1(s) + k_b p_2(s) : k_a, k_b \in D\} \subset H.$$

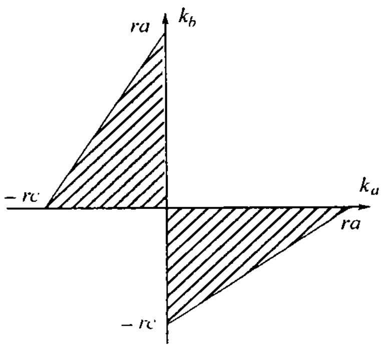

图 2　摄动域 D

Fig. 2　Perturbation region D

在证明上述定理之前，首先给出下述引理.

引理[3]　考虑

$$\Omega = \{(1-\lambda)f_1(s) + \lambda f_2(s) : \lambda \in [0,1],\ f_1(s), f_2(s) \in H\},$$

则 $\Omega \subset H$，当且仅当 $\arg[f_2(j\omega)/f_1(j\omega)] \neq \pi, \forall \omega \geq 0$.

定理的证明:

令 $D = \text{Ⅱ} \cup \text{Ⅳ}$，Ⅱ,Ⅳ 分别表示在第二、四象限中的阴影区域. 只需证明在区域Ⅱ中，定理成立. 区域Ⅳ的情形，可同理推证.

$\forall (k_a, k_b) \in \text{Ⅱ}$，$\exists \lambda \in [0,1]$，$k_{a0} \in [-rc, 0]$，$k_{b0} \in [0, ra)$ 使得 $k_a = \lambda k_{a0}, k_b = (1-\lambda)k_{b0}$. 则

$$\begin{aligned} &P(s, k_a, k_b) = \\ &\{p_0(s) + k_a p_1(s) + k_b p_2(s) : k_a, k_b \in \text{Ⅱ}\} = \\ &\{p_0(s) + \lambda k_{a0} p_1(s) + (1-\lambda) k_{b0} p_2(s) : \\ &\lambda \in [0,1], k_{a0} \in (-rc, 0], k_{b0} \in [0, ra)\} = \\ &\{\lambda[p_0(s) + k_{a0} p(s)] + (1-\lambda)[p_0(s) + k_{b0} p_2(s)] : \\ &\lambda \in [0,1], k_{a0} \in (-rc, 0], k_{b0} \in [0, ra)\}. \end{aligned}$$

记

$$f_1(s) = p_0(s) + k_{b0} p_2(s),$$

$$f_2(s) = p_0(s) + k_{a0} p_1(s).$$

由定义 3 及式(4),(5)知，$f_1(s) \in H, f_2(s) \in H$. 即

$$P(s, k_a, k_b) = \{(1-\lambda)f_1(s) + \lambda f_2(s) : \lambda \in [0,1], f_1(s), f_2(s) \in H\}.$$

根据引理，在阴影区域Ⅱ中，$P(s, k_a, k_b) \subset H$，当且仅当

$$\begin{aligned} &\arg[f_2(j\omega)/f_1(j\omega)] = \\ &\arg[p_0(j\omega) + k_{a0} p_1(j\omega)] - \\ &\arg[p_0(j\omega) + k_{b0} p_2(j\omega)] \neq \pi,\ \forall \omega \geq 0. \end{aligned} \tag{a}$$

而由定理中对 $p_0(s), p_1(s), p_2(s)$ 的唯一约束条件"不存在$(k_1, k_2)^T \in \mathbb{R}^2$，使得 $p_1(s) \equiv k_1 p_0(s)$，$p_2(s) \equiv k_2 p_0(s)$ 同时成立"仅说明 $p_1(s), p_2(s)$ 不同时在 $p_0(s)$ 方向上，即

$$\arg[k_{a0} p_1(j\omega)] - \arg[k_{b0} p_2(j\omega)] \neq \pi. \tag{b}$$

在图 2 阴影区域Ⅱ中，条件(b)成立并不能保证条件(a)成立，从而不能保证 $P(s, k_a, k_b) \subset H$.

尽管由上述定理不能确定第Ⅱ,Ⅳ象限的参数稳定区域，然而，利用定义 3，易得到如下结论:

命题 2　设

$$p_0(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \in H,\ a_n > 0,$$

$$p_1(s) = \sum_{i=0}^{n} b_i s^i,\ p_2(s) = \sum_{i=0}^{n} c_i s^i$$

为次数不大于 n 的实系数多项式,且不存在 $(k_1, k_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$,使得 $p_1(s) \equiv k_1 p_0(s), p_2(s) \equiv k_2 p_0(s)$ 同时成立.则在如图3所示阴影区域 D_2 中,

$\{p_0(s) + k_a p_1(s) + k_b p_2(s): k_a, k_b \in D_2\} \subset H$.

其中

$$rb = r_2^{\max}(p_0(s), -p_1(s), p_2(s)), \tag{6}$$

$$rd = r_2^{\max}(p_0(s), p_1(s), -p_2(s)). \tag{7}$$

综上,由命题1和命题2,在情形二下,$D = D_1 \cup D_2$,这是一个充分条件.

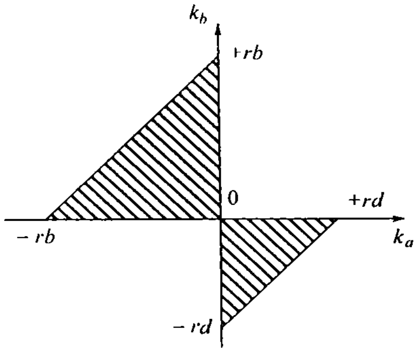

图3 鲁棒稳定摄动域 D_2

Fig. 3 Robust stability perturbation region D_2

3 电力系统应用框架(Framework for power systems application)

电力系统的小扰动稳定性是指正常运行的电力系统受到微小的、瞬时出现但又立即消失的扰动后,恢复到它原来运行状况的能力.或者,这种扰动虽不消失,但可用原有的运行状况近似地表示可能的新运行状况.它是指系统在相对静止时的稳定性.由于电力系统运行中,出现的很多扰动表现为小的干扰,研究小扰动稳定具有重要的工程意义.

小扰动稳定性问题的研究依赖于将描述系统动态行为的方程在稳态运行点处线性化后得到的线性模型.当雅可比矩阵的所有特征根的实部为负时,系统是小扰动稳定的.也可以通过对特征多项式的特性加以间接的判别.

本节分析某节点负荷存在不确定性时系统小扰动稳定的鲁棒性,推导出线性系统的特征多项式,从而应用双参数摄动域理论进行分析.

3.1 数学模型(Mathematical model)

考虑 m 机 n 节点电力系统,对节点处理如下:发电机节点编号为1到 m,其余节点编号为 $m+1$ 到 n.节点 $i(i = 1, \cdots, n)$ 处的电压记为 $V_i \angle \theta_i$,该点负荷功率 $[P_{Li}, Q_{Li}]$ 是电压 $V_i \angle \theta_i$ 的函数.

电力系统数学模型由一组微分方程和一组代数方程构成.微分方程描述每一发电机及其控制设备的动态行为:对于第 i 机组 $(i = 1, \cdots, m)$,设其状态向量 x_i 的维数为 n_{gi},定子电流的直交轴分量为 I_{di},I_{qi},原动机输入转矩 T_{Mi},参考电压 V_{refi}.代数方程共 $2(n+m)$ 个,包含发电机定子直、交轴方程 m 对,发电机节点有功功率、无功功率平衡方程 m 对,其余节点有功功率、无功功率平衡方程 $n-m$ 对.

将电力系统方程在工作点处线性化后得到:

$$\Delta\dot{X} = A_1\Delta X + A_2\Delta I_g + A_3\Delta V_g + E\Delta U, \tag{8}$$

$$0 = B_1\Delta X + B_2\Delta I_g + B_3\Delta V_g, \tag{9}$$

$$0 = C_1\Delta X + C_2\Delta I_g + C_3\Delta V_g + C_4\Delta V_l + \Delta S_{lg}, \tag{10}$$

$$0 = D_1\Delta V_g + D_2\Delta V_l + \Delta S_{ll}. \tag{11}$$

式中

$$\Delta X = [\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_m]^{\mathrm{T}},$$

其维数记为

$$n_g \triangleq \sum_{i=1}^{m} n_{gi},$$

$$\Delta I_g = [\Delta I_{d1}, \Delta I_{q1}, \Delta I_{d2}, \Delta I_{q2}, \cdots, \Delta I_{dm}, \Delta I_{qm}]^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta U = [\Delta T_{M1}, \Delta V_{ref1}, \Delta T_{M2}, \Delta V_{ref2}, \cdots, \Delta T_{Mm}, \Delta V_{refm}]^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta V_g = [\Delta\theta_1, \Delta V_1, \Delta\theta_2, \Delta V_2, \cdots, \Delta\theta_m, \Delta V_m]^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta V_l = [\Delta\theta_{m+1}, \Delta V_{m+1}, \Delta\theta_{m+2}, \Delta V_{m+2}, \cdots, \Delta\theta_n, \Delta V_n]^{\mathrm{T}}.$$

发电机节点(节点1到 m)处负荷功率增量

$$\Delta S_{Lg} = [\Delta P_{L1}, \Delta Q_{L1}, \Delta P_{L2}, \Delta Q_{L2}, \cdots, \Delta P_{Lm}, \Delta Q_{Lm}]^{\mathrm{T}}.$$

其余节点(节点 $m+1$ 到 n)处负荷功率增量

$$\Delta S_{Ll} = [\Delta P_{Lm+1}, \Delta Q_{Lm+1}, \cdots, \Delta P_{Ln}, \Delta Q_{Ln}]^{\mathrm{T}}.$$

与稳态工作点状态有关的各矩阵及其相应维数如表1所示.

表1 各系数矩阵

Table 1 Coefficient Matrices

矩阵	维数	特征
A_1	$n_g \times n_g$	块对角阵
A_2	$n_g \times 2m$	
A_3	$n_g \times 2m$	
E	$n_g \times 2m$	
B_1	$2m \times n_g$	
B_2	$2m \times 2m$	
B_3	$2m \times 2m$	
C_1	$2m \times n_g$	
C_2	$2m \times 2m$	
C_3	$2m \times 2m$	满阵
C_4	$2m \times 2(n-m)$	
D_1	$2(n-m) \times 2m$	
D_2	$2(n-m) \times 2(n-m)$	

3.2 多变量系统及其特征多项式(Multi-variable system and its characteristic polynomial)

记 $\Delta V^{\mathrm{T}} = [\Delta V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{T}} \mid \Delta V_{\mathrm{l}}^{\mathrm{T}}], \Delta S_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}} = [\Delta S_{\mathrm{Lg}}^{\mathrm{T}} \mid \Delta S_{Ll}^{T}]$,维数均为 $2n$. 整理式(8) ~ (11),并设 $\Delta U = 0$ 得

$$\Delta \dot{X} = A\Delta X + B\Delta S_{\mathrm{L}}, \tag{12}$$

$$\Delta V = C\Delta X + D\Delta S_{\mathrm{L}}. \tag{13}$$

式中

$$A = A_1 - [A_2 \quad A_3 \quad 0]\begin{bmatrix} B_2 & B_3 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & D_1 & D_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B = -[A_2 \quad A_3 \quad 0]\begin{bmatrix} B_2 & B_3 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & D_1 & D_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$D = -\begin{bmatrix} C_3 - C_2B_2^{-1}B_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}^{-1},$$

$$C = D\begin{bmatrix} C_1 - C_2B_2^{-1}B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由于负荷 $[P_{\mathrm{L}i}, Q_{\mathrm{L}i}]$ 为电压 $V_i\angle\theta_i$ 的函数,令 $2n \times 2n$ 块对角阵 $H(s)$ 表征节点负荷与节点电压矢量间的关系:

$$\Delta S_{\mathrm{L}} = H(s)\Delta V. \tag{14}$$

根据式(12) ~ (14),可得图 4 所示反馈多变量系统. 图中, $G(s)$ 为 $2n \times 2n$ 矩阵:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{15}$$

该系统的闭环特征多项式[6]

$$\mathrm{CLCP} = \frac{\det[I - G(s)H(s)]}{\det[I - G(\infty)H(\infty)]}\Delta_{\mathrm{g}}(s)\Delta_{\mathrm{h}}(s). \tag{16}$$

式中 $\Delta_{\mathrm{g}}(s)$, $\Delta_{\mathrm{h}}(s)$ 分别为矩阵传递函数阵 $G(s)$ 和 $H(s)$ 的特征多项式.

从式(16)可知,闭环特征多项式与 $\det[I - G(s)H(s)]$, $\Delta_{\mathrm{g}}(s)$, $\Delta_{\mathrm{h}}(s)$ 有关.

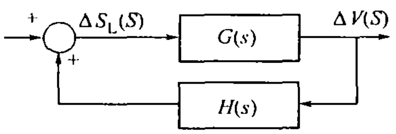

图 4　多变量反馈系统
Fig. 4　Multi-variable feedback system

3.3 鲁棒稳定性分析(Robust stability analysis)

现考察某节点 j 负荷的不确定性对系统小扰动稳定的影响,假设系统中其它节点为恒功率负荷. 由于系统频率变化不大,可以仅考虑该点负荷与其电压变化的关系. 对于各节点负荷,可采用指数型形式的负荷模型.

指数型负荷模型[7,8]是静态负荷模型的一种描述形式,其表达式为

$$P = P_{\mathrm{Lo}}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{n_{\mathrm{p}}}, \quad Q_{\mathrm{L}} = Q_{\mathrm{Lo}}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{n_{\mathrm{q}}}.$$

其中功率系数代表节点电压为额定值时的负荷功率. 当指数为 0,1,2 时,上式分别可以表示恒功率、恒电流、恒阻抗负荷. 指数取其它值时,可以用来表达不同类型负荷成分的综合作用. 指数大于 2 或小于 0 可以合理表达某些类型的负荷. 系统运行时,节点的负荷可能随电压变化有较大的改变,通过指数的不确定性可以表达负荷的这种不确定性.

根据所研究问题及假设,系统中各点负荷

$$P_{\mathrm{L}i} = \begin{cases} P_{\mathrm{Lo}j}\left(\dfrac{V_j}{V_{jo}}\right)^{n_{\mathrm{p}j}}, & i = j, \\ P_{\mathrm{Lo}i}, & i \neq j, \end{cases} \tag{17}$$

$$Q_{\mathrm{L}i} = \begin{cases} Q_{\mathrm{Lo}j}\left(\dfrac{V_j}{V_{jo}}\right)^{n_{\mathrm{p}j}}, & i = j, \\ Q_{\mathrm{Lo}i}, & i \neq j, \end{cases} \tag{18}$$

从而,式(14)中

$$H(s) = \mathrm{diag}[H_i(s)], \quad i = 1, \cdots, n. \tag{19}$$

这里

$$H_j(S) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{P_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{p}j} \\ 0 & \dfrac{Q_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{q}j} \end{bmatrix}, \tag{20a}$$

$$H_i(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i \neq j. \tag{20b}$$

这样, $H(s)$ 高度稀疏,仅有两个非零元,

$\det[I - G(s)H(s)] =$

$$\det\left[I - \begin{bmatrix} g_{2j-1,2j-1}(s) & g_{2j-1,2j}(s) \\ g_{2j,2j-1}(s) & g_{2j,2j}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{P_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{p}j} \\ 0 & \dfrac{Q_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{q}j} \end{bmatrix}\right] =$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -g_{2j-1,2j-1}(s)\dfrac{P_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{p}j} - g_{2j-1,2j}(s)\dfrac{Q_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{q}j} \\ 0 & 1 - g_{2j,2j-1}(s)\dfrac{P_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{p}j} - g_{2j,2j}(s)\dfrac{Q_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{q}j} \end{bmatrix} =$$

$$1 - g_{2j,2j-1}(s)\frac{P_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{p}j} - g_{2j,2j}(s)\frac{Q_{\mathrm{Lo}j}}{V_{jo}}n_{\mathrm{q}j}.$$

其中, $g_{\cdot,\cdot}(s)$ 为传递函数阵的相应元素. 式(16)中, $\Delta_{\mathrm{g}}(s)$ 为 $g_{\cdot,\cdot}(s)$ 的公共分母多项式, $\Delta_h(s) =$

1. 这样,闭环特征多项式 CLCP 中负荷电压指数 n_{pj}, n_{qj} 将以线性系数的形式存在.

至此,可利用稳定多项式的双参数摄动域理论分析其鲁棒稳定界:根据系统稳态,求得其主导极点,然后假设 n_{pj}, n_{qj} 有一变化量 $\Delta n_{pj}, \Delta n_{qj}$,考察使主导极点在复平面上区域 $\{s \mid \mathrm{Re}(s) \leqslant -\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+\}$ 的 $\Delta n_{pj}, \Delta n_{qj}$ 大小. 非负实数 α 表征了其鲁棒稳定程度,选择 $-\alpha$ 为大于原主导极点实部的某值.

4 算例(Example)

4.1 系统描述(System description)

考虑如图 5 所示单机无穷大系统[5,7],数据如表 2 所示,设 $\Delta P_L = 0.5V_L^{n_p}, \Delta Q_L = 0.5V_L^{n_q}$,考察指数 n_p, n_q 关于工作点 n_p^*, n_q^* 的摄动 $\Delta n_p, \Delta n_q$ 能够使系统鲁棒稳定的域.

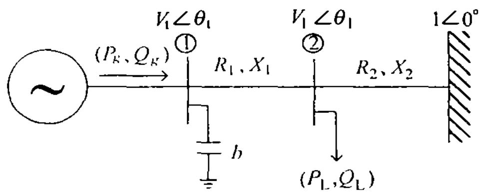

图 5 单机无限大系统

Fig. 5 Single-machine infinite-bus system

4.2 数学模型(Mathematical model)

网络代数方程:

$$\begin{cases} I_d V_t \sin(\delta - \theta_t) + I_q V_t \cos(\delta - \theta_t) + P_{L1} - \\ V_t^2 Y_{11}\cos\alpha_{11} - V_t V_1 Y_{12}\cos(\theta_t - \theta_1 - \alpha_{12}) = 0, \\ I_d V_t \cos(\delta - \theta_t) - I_q V_t \sin(\delta - \theta_t) + Q_{L1} + \\ V_t^2 Y_{11}\sin\alpha_{11} - V_t V_1 Y_{12}\sin(\theta_t - \theta_1 - \alpha_{12}) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} P_{L1} - V_1 V_t Y_{21}\cos(\theta_1 - \theta_t - \alpha_{21}) - V_1^2 Y_{22}\cos\alpha_{22} - \\ V_1 E_b Y_{23}\cos(\theta_1 - 0 - \alpha_{23}) = 0, \\ Q_{L1} - V_1 V_t Y_{21}\sin(\theta_1 - \theta_t - \alpha_{21}) + V_1^2 Y_{22}\sin\alpha_{22} - \\ V_1 E_b Y_{23}\sin(\theta_1 - 0 - \alpha_{23}) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

微分方程:

$$\begin{cases} T_{d0}'\dot{E}_q' = -E_q' - (X_d - X_d')I_d + E_{fd}, \\ \dot{\delta} = \omega - 1, \\ M\dot{\omega} = T_m - E_q' I_q - (X_q - X_d')I_d I_q - D\omega, \\ T_A \dot{E}_{fd} = -E_{fd} + K_A(V_{ref} - V_t), \end{cases} \tag{23}$$

定子代数方程:

$$\begin{cases} 0 - V_t\sin(\delta - \theta_t) + X_q I_q = 0, \\ E_q' - V_t\cos(\delta - \theta_t) - X_d' I_d = 0. \end{cases} \tag{24}$$

根据潮流计算结果,将上述非线性方程在平衡点(工作点)进行线性化,求得相应的矩阵,进而得到其闭环特征多项式 CLCP.

表 2 单机无穷大系统数据

Table 2 Data for SMIB system

发电机参数	传输线参数	节点参数
$X_d = 1.72$p.u.	$R_1 = 0.012$p.u.	$p_g = 0.9$p.u.
$X_d' = 0.45$p.u.	$X_1 = 0.3$p.u.	$V_g = 1.007$p.u.
$X_q = 0.45$p.u.	$R_2 = 0.012$p.u.	$P_{L0} = 0.5$p.u.
$X_q' = 0.45$p.u.	$X_2 = 0.3$p.u.	$Q_{L0} = 0.3$p.u.
$T_{d0}' = 6.3$s	$b = 0.066$p.u.	
$M = 8/\omega_0, D = 0.05$		
$K_A = 20,\ T_A = 0.03$s		

4.3 鲁棒稳定分析(Robust stability analysis)

以恒电流特性负荷($n_p^* = n_q^* = 1$)为例进行分析. 表 3 给出了系统潮流计算结果,相应的闭环特征多项式(CLCP)与 n_p, n_q 的关系如式(25)所示. 式中 $n_p = n_p^* + \Delta n_p,\ n_q = n_q^* + \Delta n_q$.

$$\begin{aligned} \text{CLCP} = &(s^4 + 35.63s^3 + 167s^2 + 1100s + 2639) + \\ &0.5n_p(0.03509s^4 + 1.262s^3 + \\ &2.731s^2 - 27.1s - 54.43) + \\ &0.3n_q(0.2517s^4 + 8.984s^3 + \\ &39.75s^2 + 323.3s + 543.2). \end{aligned} \tag{25}$$

表 3 潮流计算结果

Table 3 Power flow result

节点运行数据	发电机运行数据
$\theta_t = 24.5033°$	$I_d = 0.5647$p.u.
$\theta_2 = 8.0143°$	$I_q = 0.7480$p.u.
$V_2 = 0.9299$p.u.	$V_d = 0.3366$p.u.
$Q_1 = 0.3511$p.u.	$V_q = 0.9491$p.u.
	$\delta = 44.0332°$
	$E_q' = 1.2032$p.u.

表 4 列出了恒电流负荷下的主导极点、选定的极点变化区域边界(用 α 表示)以及根据式(4)~(7)计算出的摄动域. 可以看出,在第 Ⅱ 象限,参数 n_p, n_q 摄动域达到 60 以上,这个在数学上成立的结果缺乏实际物理意义. 这是因为 n_p, n_q 偏离 n_p^*, n_q^* 很大时,潮流结果即工作点会发生变化,从而传递函数矩阵 $G(s)$ 发生变化,闭环特征多项式 CLCP 也就不同. 然而,这个相当大的数值表明:对于实际电力

系统，n_p, n_q 在这个方向变化时系统具有良好的抗扰性能.究竟 n_p, n_q 在这个方向上的小扰动稳定域有多大，可以估计为其它象限的最小值，即 $rb \approx \min(ra, rc, rd)$.其更精确的数值，拟借鉴其它方法如结构奇异值($\mu$ 理论)来加以判别，另作研究.

表 4　主导极点及其鲁棒摄动域

Table 4　Dominant poles and robust perturbation bounds

闭环主导极点	$-0.6750 \pm j5.2488$
α	0.66
ra	1.0757
rb	60.8117
rc	0.6755
rd	0.6755

表 5　摄动域边界检验

Table 5　Bound checking for perturbation region

象限	$(\Delta n_p, \Delta n_q)$	主导极点
	$(+ra, 0)$	$-0.6600 \pm j5.1661^*$
I	$(+0.5ra, +0.5ra)$	$-0.6787 \pm j5.2278$
	$(0, +ra)$	$-0.6957 \pm j5.2861$
	$(0, +rb)$	$-0.8680 \pm j5.7018$
II	$(-0.5rb + 0.5rb)$	$-0.9344 \pm j6.5151$
	$(-rb, 0)$	$0.6600 \pm j60.4102^*$
	$(-rc, 0)$	$-0.6846 \pm j5.3017$
III	$(-0.5rc, -0.5rc)$	$-0.6727 \pm j5.2630$
	$(0, -rc)$	$-0.6600 \pm j5.2227^*$
	$(0, -rd)$	$-0.6600 \pm j5.2227^*$
IV	$(0.5rd, -0.5rd)$	$-0.6628 \pm j5.2093$
	$(rd, 0)$	$-0.6656 \pm j5.1967$

为对计算结果进行检验，选取摄动 $(\Delta n_p, \Delta n_q)$ 大小取值为表 5 中间一列 12 个点进行特征值计算，其中 * 为临界点.结果显示，在相应的摄动域中，系统鲁棒稳定.进一步分析可知：在第 I 象限各点中，$(+ra, 0)$ 为临界点，说明在该点对摄动域的估计是精确的；而在 $(+0.5ra, +0.5ra)$，$(0, +ra)$ 处，主导极点距指定的区域边界还有一定的距离，说明本方法对摄动域边界的估计具有一定的保守性.这是由于按本文提出的估计方法得出的解是充分条件.其它象限的情况可作类似分析.

针对该系统，文[5]利用广义哈氏定理(generalized Kharitonov's theorem)研究了上述摄动界.广义哈氏定理需要根据指定的稳定区域的边界构造一个实数连续尺度函数 $H(\delta)$.该函数的构造相当复杂.为使问题简化，文[5]仅就 $\Delta n_p = \Delta n_q$ 这种特殊情形，通过迭代的方法进行了计算.尽管如此，计算过程仍很复杂，结果也过于乐观[5].本文提出的方法，简明直观，不但可以程序化实现，而且可在方便地给出四象限的结果.

5　结语(Conclusion)

本文明确指出了鲁棒稳定多项式双参数摄动域的概念，基于文[1,2]的有关成果，分两种情形推导了该域的范围.进而给出了利用鲁棒稳定多项式双参数摄动域理论揭示负荷特性不确定性对电力系统稳定性影响的一般应用框架.结合具体算例，说明该方法的有效性.尽管对摄动域的估计结果有所保守性，仍不失为电力系统鲁棒稳定系统化分析的一种新途径.

参考文献(References)

[1] An Senjian, Wang Enping. Perturbation bounds for the robust stability of polynomials [J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 1994, 14(3): 242 - 251 (in Chinese)

[2] An Senjian, Wang Enping. Polytopic perturbation bound for stability of polynomials [J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 1995, 8(2): 134 - 143

[3] Huang Lin, Hollot C V, Bartlett A C. Stability of polynomials: geometric considerations in coefficient space [J]. Int. J. Control, 1987, 45(2): 649 - 660

[4] Dai Hongwei. Models and methods for analyzing the robustness of small disturbance stability in power systems [D]. Tianjin: Tianjin University, 1997 (in Chinese)

[5] Pai M A, Ranjan R K, Sauer P W, Robust stability in power Systems with nonlinear loads using generalized Kharitonov's theorem [J]. Electrical Power & Energy Systems, 1994, 16(5): 321 - 328

[6] Chen Qizhong. Linear System Theory and Design [M]. Beijing: Science Press, 1988 (in Chinese)

[7] Padiyar K R, Rajasekharam P, Radhakrishna C, et al. Dynamic stabilization of power systems through reactive power modulation [J]. Electric Machines and Power Systems, 1986, 11(1): 281 - 293

[8] IEEE Task Force. Load representation for dynamic performance analysis [J]. IEEE Trans. Power Systems, 1993, 8(2): 472 - 482

本文作者简介

车延博　1972 年生.1993 年在浙江大学电机系工业电气自动化专业获学士学位.1996 年在天津大学自动化系工业自动化专业获硕士学位.1996 年至今在天津大学自动化系任教.1998 年入天津大学电力系统及其自动化专业在职攻读博士学位至今.研究方向为电力系统的分析与控制.　Email: ybche@eyou.com

王成山　1962 年生.1983 年天津大学自动化系毕业.现为天津大学自动化学院院长，教授，博士生导师.高校青年教师奖获得者.现主要从事与电力系统安全性分析，城市电网规划和配电系统自动化等方面相关的教学与科研工作.